AM450 - II prova di esonero - 10/06/2019

Esercizio 1 (10 punti)**.**
Siano X, Y spazi normati, $Z \subset X$ un sottoinsieme denso e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una successione limitata.

1. *(3 punti) Dimostrare che, se $A_n z \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $z \in Z$ allora $A_n x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $x \in X$.*

Soluzione: *Fissato $x \in X$, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo $z \in Z$ tale che $\|x - z\| \leq \varepsilon$; dunque, prendendo N_ε tale che $\|A_n z\| \leq \varepsilon$ per $n \geq N_\varepsilon$, abbiamo*

$$\|A_n x\| \leq \|A_n(x - z)\| + \|A_n z\| \leq \|A_n\|\|x - z\| + \varepsilon \leq \varepsilon \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| + 1\right),$$

cioè $A_n x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

2. *(4 punti) Sia ora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$. Dimostrare che $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ se e solo se valgono entrambe le seguenti affermazioni:*

$$\{x_n\} \text{ è limitata} \qquad\qquad x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Soluzione: *Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$, allora è limitata per il Teorema di Banach-Steinhaus e $x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ perché $x \mapsto x(k)$ è un funzionale lineare continuo su ℓ_2. Viceversa, se $\{x_n\}$ è limitata in ℓ_2, allora sarà limitata anche la successione $\{L_n\} \subset \ell_2^*$ data da $L_n : y \to \sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k)$; per ipotesi, $L_n e_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, dove $e_n(k) = \begin{cases} 1 & se\ k = n \\ 0 & se\ k \neq n \end{cases}$, quindi per linearità $L_n y \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $y \in \mathrm{Span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ma poiché $\mathrm{Span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in ℓ_2, dal punto precedente deduciamo che $L_n y \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $y \in \ell_2$, cioè $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$.*

3. *(3 punti) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da $x_n(k) = \begin{cases} k & se\ k = n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:*

$$\{x_n\} \text{ è limitata?} \qquad\qquad x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}? \qquad\qquad x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0?$$

Soluzione: *$\|x_n\|_{\ell_2} = n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ e dunque non è limitata; inoltre, poiché $x_n(k) = 0$ per $n \geq k$, allora $x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni k; infine, x_n non può convergere debolmente perché non è limitata.*

Esercizio 2 (10 punti)**.**
Sia $f \in L^{\frac{4}{3}}((0,1))$ e $F : W_0^{1,4}((0,1)) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(u) = \int_0^1 \left(\frac{u'^4}{4} - fu\right).$$

1. *(3 punti) Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza di Poincaré, che F è limitato dal basso e che i suoi sottolivelli $\left\{u \in W_0^{1,4}((0,1)) : F(u) \leq C\right\}$ sono limitati per ogni $C \in \mathbb{R}$.*

Soluzione: *Applicando, nell'ordine, le disuguaglianze di Hölder e di Poincaré si ottiene:*

$$F(u) \geq \frac{1}{4}\|u'\|^4_{L^4((0,1))} - \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,1)}\|u\|_{L^4((0,1))} \geq C\|u\|^4_{W^{1,4}((0,1))} - \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,1)}\|u\|_{W^{1,4}((0,1))} \geq -C.$$

Dalla stessa stima otteniamo che $F(u) \underset{\|u\|\to+\infty}{\to} +\infty$ *e quindi i sottolivelli del tipo* $\left\{u \in W^{1,4}_0((0,1)) :\ F(u) \leq C\right\}$ *sono limitati.*

2. *(2 punti) Dimostrare che se* $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf_{W^{1,4}_0((0,1))} F$ *allora* $\{u_n\}$ *ha un'estratta convergente debolmente** *in* $W^{1,4}((0,1))$ *e convergente in norma in* $L^4((0,1))$.

Soluzione: *Dal punto precedente,* $\inf_{W^{1,4}_0((0,1))} F > -\infty$, *dunque se* $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf_{W^{1,4}_0((0,1))} F$ *allora* $F(u_n)$ *sarà limitata e, sempre dal punto precedente, anche* $\{u_n\}$ *dev'essere limitata; pertanto, dal Teorema di Banach-Alaoglu, avrà un'estratta debolmente** *convergente e, dal Teorema di immersione di Sobolev, un'ulteriore estratta convergerà in* $L^4((0,1))$.

3. *(2 punti) Sia* u *il limite dato dal punto precedente. Dimostrare che* $F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n)$ *e dedurne che* u *è un punto di minimo per* F.

Soluzione: *Dalla semi-continuità debole** *della norma* $\|u\|_{W^{1,4}_0((0,1))} := \left(\int_0^1 u'^4\right)^{\frac{1}{4}}$ *sappiamo che* $\|u\|_{W^{1,4}_0((0,1))} \leq \liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|_{W^{1,4}_0((0,1))}$, *mentre dalla disuguaglianza di Hölder segue che* $\int_0^1 fu_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 fu$; *pertanto,*

$$F(u) = \frac{\|u\|^4_{W^{1,4}_0((0,1))}}{4} - \int_0^1 fu \leq \liminf_{n\to+\infty}\frac{\|u_n\|^4_{W^{1,4}_0((0,1))}}{4} - \liminf_{n\to+\infty}\int_0^1 fu_n = \liminf_{n\to+\infty} F(u_n),$$

e poiché $\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{W^{1,4}_0((0,1))} F \leq F(u)$, *dev'essere necessariamente* $F(u) = \inf_{W^{1,4}_0((0,1))} F$, *cioè* u *è un punto di minimo per* F.

4. *(3 punti) Dimostrare che per ogni* $\varphi \in C^1_0((0,1))$ *vale la formula*

$$\int_0^1 u'^3\varphi' = \int_0^1 f\varphi.$$

Soluzione: *Dal punto precedente, per ogni* $\varphi \in C^1_0((0,1))$ *la mappa* $g(t) = F(u + t\varphi)$ *ha un minimo in* $t = 0$ *e quindi* $g'(0) = 0$; *scrivendo*

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^1 \left(\frac{(u' + t\varphi')^4}{4} - \int_0^1 f(u + t\varphi)\right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{u'^4}{4} - fu\right) + t\int_0^1 \left(u'^3\varphi' - f\varphi\right) + t^2\frac{3}{2}\int_0^1 u'^2\varphi'^2 + t^3\int_0^1 u'\varphi'^3 + t^4\int_0^1 \frac{\varphi'^4}{4}, \end{aligned}$$

deduciamo $0 = g'(0) = \int_0^1 u'^3\varphi' - \int_0^1 f\varphi$.

Esercizio 3 (10 punti)**.**
Sia $\Sigma \subset \mathbb{C}$ *un sottoinsieme limitato,* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *denso e numerabile e* $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *definito da* $Ax(k) = \lambda_k x(k)$.

1. *(3 punti) Dimostrare che* λ_n *è un autovalore di* A *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e calcolarne esplicitamente il relativo autospazio.*

Soluzione: *Scrivendo* $(A - \lambda_n\mathbb{I})x(k) = (\lambda_k - \lambda_n)x(k)$, *deduciamo che* $(A - \lambda_n\mathbb{I})x = 0$ *se e solo se* $x(k) = 0$ *per ogni* $k \neq n$, *dunque* $\ker(A - \lambda_n) = \mathrm{Span}\{e_n\}$ *e cioè* λ_n *è un autovalore di* A *e il suo autospazio è* $\mathrm{Span}\{e_n\}$.

2. *(3 punti) Dimostrare che se $\lambda \in \Sigma \setminus \Lambda$ allora è nello spettro continuo di A, e quindi $\Sigma \subset \sigma(A)$.* (Suggerimento: usare una nota proprietà dello spettro per ottenere $\lambda \in \sigma(A)$; ricordare inoltre $c_{00} \subset \ell_2$ è denso.)

Soluzione: *$\Sigma \subset \sigma(A)$ perché $\Sigma = \overline{\Lambda}$, $\sigma(A)$ è chiuso e per il punto precedente contiene Λ; inoltre, $(A - \lambda\mathbb{I})$ è iniettivo, perché $\lambda \notin \Lambda$, e $\operatorname{ran}(A - \Sigma\mathbb{I})$ è denso perché contiene lo spazio c_{00} delle successioni definitvamente nulle in quanto $(A - \lambda\mathbb{I})\dfrac{y(k)}{\lambda_k - \lambda} = y(k)$ per ogni $y \in c_{00}$.*

3. *(4 punti) Fissato $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, scrivere esplicitamente $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ e dimostrare che $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_2)$, e quindi $\sigma(A) = \Sigma$.*

Soluzione: *Fissato $y \in \ell_2$, avremo $(A - \lambda\mathbb{I})x = y$ se e solo se $x(k) = \dfrac{y(k)}{\lambda_k - \lambda}$; la mappa $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ data da $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}y(k) = \dfrac{y(k)}{\lambda_k - \lambda}$ è ben definita e continua su ℓ_2, perché essendo $\lambda \notin \Sigma = \overline{\Lambda}$ non esistono estratte di $\{\lambda_n\}$ convergenti a λ, dunque $|\lambda_n - \lambda| \geq \dfrac{1}{C}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi*

$$\left\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\, y\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{\lambda_n - \lambda}\right| \|y\| \leq C\|y\|.$$