AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Teorema di Hahn-Banach e applicazioni

Torniamo a parlare più in generale di spazi di Banach.
In particolare, ci occuperemo dell'estensione di funzionali lineari e continui definiti su un sottospazio lineare di un dato spazio. Questo procedimento si può compiere facilmente su spazi di Hilbert grazie alla proiezione ortogonale, ma in generale non è così: c'è bisogno di un risultato tra i più importanti dell'analisi funzionale: il Teorema di Hahn-Banach.
In un caso particolare è molto facile estendere funzionali lineari e continui: quello di un sottospazio denso.

Proposizione.
Sia X uno spazio normato, $E \subset X$ sottospazio lineare denso e $L \in E^*$.
Allora esiste un unico $\widetilde{L} \in X^*$ tale che $\widetilde{L}x = Lx$ per ogni $x \in E$ e $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*}$.

Dimostrazione.
Per ogni $x \in X$ esisterà una successione $\{x_n\}$ in E tale che $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, dunque pongo $\widetilde{L}(x) := \lim_{n\to+\infty} Lx_n$. Verifichiamo che:

- $\widetilde{L}(x)$ esiste per ogni x, perché $\|Lx_n - Lx_m\| \le \|L\|\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$, dunque $\{Lx_n\}$ è di Cauchy e quindi converge;
- $\widetilde{L}(x)$ non dipende dalla scelta della successione, perché se $\{x_n\},\{y_n\}$ verificano $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$ allora per la continuità di L abbiamo $\lim_{n\to+\infty} Lx_n = \lim_{n\to+\infty} Ly_n$;
- $\widetilde{L}$ è lineare, perché se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ e $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ allora per ogni $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ vale
$$\widetilde{L}(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to+\infty} L(\alpha x_n+\beta y_n) = \lim_{n\to+\infty}(\alpha Lx_n+\beta Ly_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} Lx_n+\beta \lim_{n\to+\infty} Ly_n = \alpha\widetilde{L}(x)+\beta\widetilde{L}(y)$$
- $\widetilde{L}$ è continua, perché se $\|x\| = 1$ e $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ allora anche $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ converge a x e $\|y_n\| = 1$, dunque $\left\|\widetilde{L}x\right\| = \lim_{n\to+\infty} \|Ly_n\| \le \|L\|_{E^*}$, quindi facendo l'estremo superiore in x si ottiene $\left\|\widetilde{L}\right\| \le \|L\|$;
- $\widetilde{L}$ estende L, perché ogni $x \in E$ è limite della successione che vale costantemente $x_n = x$ e dunque $\widetilde{L}x = \lim_{n\to+\infty} Lx_n = Lx$;
- $\left\|\widetilde{L}\right\| = \|L\|$, perché abbiamo già visto che $\left\|\widetilde{L}\right\| \le \|L\|$, e inoltre per ogni $x \in E$ vale $\left\|\widetilde{L}x\right\| = \|Lx\|$, dunque deve valere l'uguaglianza;
- $\widetilde{L}$ è l'unica con queste proprietà, e dunque la dimostrazione è conclusa, perché se $F : X \to \mathbb{R}$ è continua e $F(x) = Lx$ per ogni $x \in E$, allora per ogni $x \in X$ e $x_n \in E$ con $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ vale
$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} Lx_n = \widetilde{L}x.$$

$\square$

Osservazione.
Con la stessa dimostrazione è possibile estendere $A \in \mathcal{L}(E, Y)$ a $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\left\|\widetilde{A}\right\|_{L(X,Y)} = \|A\|_{L(E,Y)}$, purché Y sia completo.

Per dimostrare il Teorema di Hahn-Banach introduciamo un'importante classe di funzionali, che condividono alcune proprietà delle norme: i funzionali omogenei e subadditivi.

Definizione.
Sia X uno spazio normato e $p : X \to \mathbb{R}$.
*p si dice **omogeneo** se $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $x \in X$ e $\lambda > 0$.*
*p si dice **subadditivo** se $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in Y$.*

Esempio.
Ogni seminorma, e in particolare ogni norma, è omogenea e subadditiva.

Teorema (di Hahn-Banach)**.**
Sia X uno spazio normato, $p : X \to \mathbb{R}$ omogeneo e subadditivo, $E \subset X$ un sottospazio lineare e $L : E \to \mathbb{R}$ lineare e tale che $Lx \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.
Allora esiste $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{L}x = Lx$ per ogni $x \in E$ e $\widetilde{L}x \leq p(x)$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione.
Applichiamo il Lemma di Zorn all'insieme P delle estensioni di L:

$$P := \left\{(F, M) : \ F \subset X \text{ sottospazio lineare tale che } E \subset F, \ M : F \to \mathbb{R} \text{ lineare tale che } \begin{cases} Mx = Lx & \forall\, x \in E \\ Mx \leq p(x) & \forall\, x \in F \end{cases}\right\},$$

su cui è definita la relazione

$$(F, M) \preceq (F', M') \quad :\Longleftrightarrow \qquad F \subset F', \ M'x = Mx \quad \forall\, x \in F.$$

Chiaramente $\preceq$ è una relazione d'ordine e P è non vuoto perché contiene (E, L).
Inoltre, se $Q = \{(F_\alpha, M_\alpha)\}_{\alpha \in A} \subset P$ è totalmente ordinato allora un maggiorante (F_0, M_0) dato da $F_0 := \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ e $M_0 x = M_\alpha x$ per $x \in F_\alpha$; M è ben definita perché Q è totalmente ordinato e inoltre $M_0 \leq p$ perché $M_\alpha \leq p$ per ogni α. Dunque possiamo applicare il Lemma di Zorn.
Esiste quindi un elemento massimale $\left(\widetilde{E}, \widetilde{L}\right) \in P$: per concludere basterà mostrare $\widetilde{E} = X$. Supponiamo per assurdo che non sia così, cioè che esista $x_0 \in X \setminus \widetilde{E}$: allora potrei estendere $\widetilde{L}$ a $\mathrm{Span}\left\{\widetilde{E}, x_0\right\}$ come $\widehat{L}(x + t x_0) = \widetilde{L}x + ct$; se riesco a scegliere c in modo tale che valga $\widehat{L}(x + t x_0) \leq p(x + t x_0)$ avrò contraddetto il fatto che $\left(\widetilde{E}, \widetilde{L}\right)$ sia un maggiorante.
Dalla definizione di $\widetilde{L}$ e dall'omogeneità di p, L, la precedente disuguaglianza equivale a:

$$\begin{cases} \widetilde{L}\left(\dfrac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\dfrac{x}{t} + x_0\right) & \forall\, x \in \widetilde{E}, \ t > 0 \\ \widetilde{L}\left(\dfrac{x}{t}\right) + c \geq -p\left(-\dfrac{x}{t} - x_0\right) & \forall\, x \in \widetilde{E}, \ t < 0 \end{cases};$$

essendo $\widetilde{E}$ un sottospazio lineare, c dovrà equivalentemente soddisfare

$$-\widetilde{L}z - p(-z - x_0) \leq c \leq p(y + x_0) - \widetilde{L}y \quad \forall\, y, z \in \widetilde{E},$$

e un c con queste proprietà può essere trovato se e solo se per ogni y, z vale $-\widetilde{L}z - p(-z - x_0) \leq p(y + x_0) - \widetilde{L}y$. Infine, quest'ultima disuguaglianza è vera, e dunque la dimostrazione è conclusa, perché, essendo $\widetilde{L} \leq p$ e p subadditivo,

$$\begin{aligned} -\widetilde{L}z - p(-z - x_0) - \left(p(y + x_0) - \widetilde{L}y\right) &= \widetilde{L}(y - z) - (p(y + x_0) + p(-z - x_0)) \\ &\leq p(y - z) - (p(y + x_0) + p(-z - x_0)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Corollario.
Sia X uno spazio normato, $E \subset X$ un sottospazio lineare e $L \in E^*$.
Allora esiste $\widetilde{L} \in X^*$ tale che $\widetilde{L}x = Lx$ per ogni $x \in E$ e $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*}$.

Dimostrazione.
Basta applicare il Teorema di Hahn-Banach con $p(x) = \|L\|_{E^*}\|x\|$: per la simmetria della norma otterremo che $\left|\widetilde{L}x\right| = \max\left\{\widetilde{L}x, \widetilde{L}(-x)\right\} \le \|L\|\|x\|$, e cioè $\left\|\widetilde{L}\right\| \le \|L\|$, ma poiché coincidono su E deve valere l'uguaglianza. □

Osservazione.

1. *Se X è uno spazio di Hilbert, ogni $L \in E^*$ può essere esteso prima su $\overline{E}$ per densità e poi su tutto X come $\widetilde{L}x := L(Px)$, dove $P : X \to \overline{E}$ è la proiezione ortogonale. Come si verifica facilmente, questa è l'unica estensione che verifica $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*}$.*
2. *L'estensione data dal Teorema di Hahn-Banach potrebbe non essere unica.*
   Prendiamo infatti $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, $E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ e $L : E \to \mathbb{R}$ data da $Lx = x_1$. Allora, ogni estensione $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ del tipo $\widetilde{L}(x_1, x_2) = x_1 + cx_2$, per $c \in [-1, 1]$, verifica $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*} = 1$.

Il Teorema di Hahn-Banach ha anche molte altre applicazioni in analisi funzionale. Alcune di queste forniscono informazioni importanti sulla struttura degli spazi duali.

Lemma.
Sia X uno spazio normato e $x_0 \in X \setminus \{0\}$.
Allora esiste $L_{x_0} \in X^*$ tale che $\|L_{x_0}\|_{X^*} = 1$ e $L_{x_0}x_0 = \|x_0\|$.
Più in generale, dati un sottospazio lineare $E \subset X$ e $x_0 \in X \setminus E$, esiste $L_{E,x_0} \in X^*$ tale che $\|L_{E,x_0}\|_{X^*} = 1$, $L_{x_0}x = 0$ per ogni $x \in E$ e $L_{E,x_0}x_0 = \mathrm{d}(x_0, E)$.

Dimostrazione.
Basta applicare il Teorema di Hahn-Banach con $E = \mathrm{Span}\{x_0\}$, $L : tx_0 \mapsto t\|x_0\|$ e $p(x) = \|x\|$.
Nel caso generale, applico il Teorema di Hahn-Banach su $\mathrm{Span}\{E, x_0\}$ con $L(x + tx_0) = t\mathrm{d}(x_0, E)$; il funzionale avrà norma 1 perché

$$\|L\|_{E^*} = \sup_{x \in E, t \in \mathbb{R}} \frac{|t|\mathrm{d}(x_0, E)|}{\|x + tx_0\|} = \sup_{x \in E, t \in \mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}(x_0, E)}{\left\|x_0 + \frac{x}{t}\right\|} = \sup_{y \in E} \frac{\mathrm{d}(x_0, E)}{\|x_0 - y\|} = 1.$$

. □

Esempio.

1. *Se $X = L^p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$, sappiamo che X^* è una copia isometrica di $L^{p'}(\mu)$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ e ogni elemento di X^* è del tipo $L : f \mapsto \int_X fg\mathrm{d}\mu$ per qualche $g \in L^{p'}(\mu)$. Per ogni $f \not\equiv 0$ fissata, il funzionale dato dal lemma precedente si ottiene prendendo $g_f = \dfrac{|f|^{p-2}f}{\|f\|_p^{p-1}}$.*
2. *Se X è uno spazio di Hilbert, abbiamo visto che X^* è isometrico a X e ogni funzionale in X^* è dato da $L : x \mapsto (x, h)$ per qualche $h \in H$. Il funzionale dato dal lemma precedente si ottiene con $h_x = \dfrac{x}{\|x\|}$.*

Corollario.
Uno spazio normato $X \ne \{0\}$ non banale ha un duale $X^* \ne \{0\}$ non banale.
Se inoltre $\dim X = +\infty$ allora $\dim(X^*) = +\infty$.

Dimostrazione.
Se esiste $x_0 \in X \setminus \{0\}$ allora con il lemma precedente troviamo un funzionale $L_{x_0} \in X$ per cui $L_{x_0}x_0 = \|x_0\| \ne 0$, dunque $L_{x_0} \ne 0$.

Se inoltre $\dim X = +\infty$, allora esiste una successione crescente di sottospazi lineari $E_n \subset X$ tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Dunque, prendendo $x_n \in E_{n+1} \setminus E_n$, dal lemma precedente si può costruire una successione $\{L_n = L_{x_n,E_n}\} \subset X^*$ tali che $L_n|_{E_n} \equiv 0$ ma $L_n|_{E_{n+1}} \not\equiv 0$; questi funzionali dovranno essere linearmente indipendenti, perché L_n è identicamente nullo su E_n mentre non lo è nessun $L \in \mathrm{Span}\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, e quindi X^* ha dimensione infinita. $\square$

Osservazione.
Il corollario precedente non è più vero sugli spazi metrici.
Ad esempio, lo spazio $X = L^p([0,1])$, per $p \in (0,1)$ è uno spazio metrico completo con la distanza $\mathrm{d}(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p$, ha ovviamente dimensione infinita ed è anche completo, come si può dimostrare analogamente al caso $p \geq 1$; tuttavia il suo duale contiene solo il funzionale nullo.
Supponiamo infatti che esista $L \in X^* \setminus \{0\}$, dunque esisterà $f \in X$ tale che $Lf \geq 1$. Consideriamo la mappa $t \mapsto \mathrm{d}\left(f\chi_{[0,t]}, 0\right) = \int_0^t |f|^p$: per il teorema di convergenza dominata sarà continua, dunque esisterà $t_0 \in (0,1)$ tale che $g := f\chi_{(0,t_0]}$ e $h := f\chi_{(t_0,1)} = f - g$ verificano $\mathrm{d}(g,0) = \mathrm{d}(h,0) = \frac{\mathrm{d}(f,0)}{2}$, cioè $\mathrm{d}(2g,0) = \mathrm{d}(2h,0) = \frac{\mathrm{d}(f,0)}{2^{1-p}}$; inoltre, essendo $1 \leq Lf = \frac{L(2g)}{2} + \frac{L(2h)}{2}$, avrò $L(2g) \geq 1$ oppure $L(2h) \geq 1$. A questo punto definisco f_1 come quella tra $2g$ e $2h$ che verifica la disuguaglianza e poi itero il procedimento, scrivendo $f_1 = g_1 + h_1$ e definendo $f_2 = 2g_1$ oppure $f_2 = 2h_1$: avrò ottenuto una successione $\{f_n\}$ che verifica $\mathrm{d}(f_n,0) = \frac{\mathrm{d}(f,0)}{2^{n(1-p)}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e $Lf_n \geq 1$, contraddicendo la continuità di L.

Proposizione (Immersione isometrica nel bi-duale)**.**
Ogni spazio normato X può essere mappato isometricamente nel suo bi-duale X^{**} attraverso la mappa J data da:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J} & X^{**} \\ x & \mapsto & \Lambda : L \to Lx \end{array}$$

Dimostrazione.
Si verifica immediatamente che J è lineare. Per mostrare che è un'isometria, notiamo innanzi tutto che

$$\|J(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|L\|_{X^*}\leq 1} |Lx| \leq \sup_{\|L\|_{X^*}\leq 1} \|L\|_{X^*}\|x\|_X = \|x\|;$$

inoltre, fissato $x_0 \in X$, posso prendere L_{x_0} come nel lemma precedente e ottenere $\|J(x_0)\| \geq |L_{x_0}x_0| = \|x_0\|$, pertanto $\|J\|_{\mathcal{L}(X,X^{**})} = \sup_x \frac{\|J(x)\|}{\|x\|} \geq 1$ e quindi J è un'isometria. $\square$

Definizione.
Uno spazio di Banach X si dice ***riflessivo*** *se l'immersione isometrica nel bi-duale è suriettiva, cioè se ogni elemento del bi-duale $\Lambda \in X^{**}$ è del tipo $\Lambda : L \mapsto Lx$ per qualche $x \in X$.*

Osservazione.

1. *Uno spazio normato X non completo non può essere riflessivo perché X^{**}, essendo un duale, è sempre completo, dunque non possono esserci isometrie suriettive tra X e X^{**}.*

2. *Per definizione di norma operatoriale, sappiamo che $\|\Lambda\|_{X^{**}} = \sup_{\|L\|_{X^*}\leq 1} |\Lambda L|$, ma non è detto che esiste un $L \in X^*$ per cui l'estremo superiore è raggiunto. Questo può essere un criterio per la riflessività di uno spazio, perché se $\Lambda = J(x)$ per $x \in X$ allora l'estremo superiore è sempre raggiunto per il lemma precedente.*

Esempio.

1. *Gli spazi $L^p(\mu)$ per $p \in (1,+\infty)$ sono riflessivi e anche tutti gli spazi di Hilbert sono riflessivi.*

2. *$X = L^1([0,1])$ <u>non</u> è riflessivo, perché X^* è isometrico a $L^\infty([0,1])$ ma $(L^\infty([0,1]))^*$ non è isometrico a $L^1([0,1])$.*
   Prendiamo infatti il sottospazio $E = C([0,1]) \subset L^\infty([0,1])$ e $L \in E^*$ dato da $Lf = f(0)$ e estendiamolo a $L^\infty([0,1])$ con il Teorema di Hahn-Banach: se $(L^\infty([0,1]))^*$ fosse una copia isometrica di $L^1([0,1])$, allora esisterebbe $g \in L^1([0,1])$ tale che per ogni $f \in C([0,1])$ valga $\displaystyle\int_0^1 fg = \widetilde{L}f = Lf = f(0)$, che è assurdo.

3. *Anche ℓ_1 <u>non</u> è riflessivo, perché $(\ell_\infty)^*$ non è isometrico a ℓ_1.*
   Applichiamo infatti il Teorema di Hahn-Banach su

$$c := \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ \exists \lim_{k\to+\infty} x(k) \in \mathbb{R}\right\} \subset \ell_\infty$$

   con $L \in c^*$ dato da $Lx = \lim_{k\to+\infty} x(k)$. Supponiamo per assurdo che la sua estensione $\widetilde{L} \in (\ell_\infty)^*$ sia tale che $\widetilde{L}x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$ per qualche $y \in \ell_1$; allora prendendo un elemento della base standard $x = e_n \in c$ avremmo

$$0 = Le_n = \widetilde{L}e_n = y(n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

   cioè $y \equiv 0$ e cioè $\widetilde{L} = 0$, ma questo è assurdo perché ad esempio la successione costante $x = (1, 1, \dots)$ verifica $\widetilde{L}x = Lx = 1$.

4. *Neanche $C([0,1])$ è riflessivo. Prendiamo infatti $L_0 \in X^*$ definito da $L_0 f = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f$: dal lemma precedente sappiamo che esiste $\Lambda_{L_0} \in X^{**}$ tale che $\|\Lambda_{L_0}\| = 1$ e $\Lambda_{L_0} L_0 = \|L_0\| = 1$; se fosse $\Lambda_{L_0} = J(f)$ allora esisterebbe $f \in C([0,1])$ con $\sup_{[0,1]} |f| = 1$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 1$, che è assurdo.*

Osservazione.
Abbiamo appena visto che ℓ_1 non è isometrico al duale di ℓ_∞. In realtà, è una copia isometrica del duale dello spazio delle successioni infinitesime

$$c_0 := \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ \lim_{k\to+\infty} x(k) = 0\right\},$$

munito della norma $\|\cdot\|_\infty$; infatti, per ogni funzionale $L \in {c_0}^*$ esiste un'unica $y \in \ell_1$ tale che $Lx = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$.
Infatti, dato $L \in {c_0}^*$, definiamo $(\Phi(L))(k) = Le_k$: innanzi tutto, $\Phi(L) \in \ell_1$ perché, prendendo $x_n \in c_0$ data da $x_n(k) = \begin{cases} \text{segno}(Le_k) & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k \ge n+1 \end{cases}$, avremo

$$\sum_{k=1}^{n} |Le_k| = Lx_n \le \|L\|_{c_0^*} \|x_n\|_{c_0} = \|L\|_{c_0^*},$$

dunque $\|\Phi(L)\|_{\ell_1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |Le_k| \le \|L\|_{c_0^*}$. La linearità di Φ si verifica immediatamente e inoltre Φ è suriettiva perché ogni $y \in \ell_1$ è immagine del funzionale $L : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$. Per mostrare infine che Φ è un'isometria, osserviamo che un sottospazio lineare denso di c_0 è dato dalle successioni definitivamente nulle

$$c_{00} := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ \exists\, K \in \mathbb{N} : \ x(k) = 0 \quad \forall\, k \ge K\} = \mathrm{Span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

in quanto ogni $x \in c_0$ può essere approssimato dalla successione $\sum_{k=1}^{n} x(k)e_k \in c_{00}$; dunque, dato $L \in c_0^*$, per continuità avremo

$$Lx = L\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} x(k)e_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)Le_k \leq \|x\|_\infty\|\Phi(L)\|_1.$$

Da ciò deduciamo $\|L\| \leq \|\Phi(L)\|$, mentre la disuguaglianza opposta era già stata dimostrata e dunque Φ è un'isometria e la dimostrazione è conclusa.

Il Teorema di Hahn-Banach ha altre applicazioni molto importanti in analisi funzionale, legati alle proprietà degli iperpiani e degli insiemi convessi.
Per vederle introduciamo prima una classe di funzionali omogenei e subadditivi che dunque possono essere utilizzati come la funzione p nel Teorema di Hahn-Banach, ruolo che finora è stato giocato dalla norma.

Definizione.
Sia X uno spazio normato e $K \subset X$ un sottoinsieme convesso contenente $B_\delta(0)$ per qualche $\delta > 0$.
Il ***funzionale di Minkowski*** *di K relativo a K è:*

$$p_K(x) := \inf\left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in K\right\}.$$

Esempio.

1. *Se $K = \overline{B_R(0)}$ è una palla chiusa, allora $p_K(x) = \frac{\|x\|}{R}$.*

2. *Se $K = \{x \in X : \ Lx \leq a\}$ per qualche $L \in X^*, a > 0$, allora $p_K(x) = \begin{cases} \frac{Lx}{a} & \text{se } Lx > 0 \\ 0 & \text{se } Lx \leq 0 \end{cases}$*

Lemma.
Sia X uno spazio normato e $K \subset X$ convesso contenente un intorno di 0. Allora:

1. *p_K è omogeneo e subadditivo;*

2. *$p_K(x) \leq C\|x\|$ per ogni $x \in X$ e qualche $C > 0$, e in particolare è continua;*

3. *Se K' è convesso e $K \subset K'$ allora $p_{K'} \leq p_K$;*

4. *$p_{\mathring{K}} = p_K = p_{\overline{K}}$, inoltre $p_K(x) \leq 1$ se e solo se $x \in \overline{K}$ e $p_K(x) < 1$ se e solo se $x \in \mathring{K}$;*

5. *Se K è bilanciato, cioè $x \in K \iff -x \in K$, allora p_K è una seminorma;*

6. *Se K è bilanciato e limitato allora p_K è una norma, ed è equivalente a $\|\cdot\|$.*

Dimostrazione.

1. Innanzi tutto, $p_K(x) \neq +\infty$ per ogni x: infatti, $p_K(0) = 0$ per definizione; inoltre, se $\overline{B_\delta(0)} \subset K$, allora $\frac{\delta}{2\|x\|}x \in K$ e dunque $p_K(x) \leq \frac{2\|x\|}{\delta}$. L'omogeneità segue da:

$$p_K(\lambda x) = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{\lambda x}{r} \in K\right\} = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{x}{\frac{r}{\lambda}} \in K\right\} = \inf\left\{\lambda s > 0 : \ \frac{x}{s} \in K\right\} = \lambda p_K(x).$$

Mostriamo poi che è subadditivo: dati $x, y \in K, \varepsilon > 0$, trovo r, s tali che $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in K$ e $p_K(x) \geq r - \varepsilon, p_K(y) \geq s - \varepsilon$. Essendo K convesso, allora

$$\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in K,$$

dunque dalla definizione di p avremo

$$p_K(x+y) \leq r + s \leq p_K(x) + p_K(y) + 2\varepsilon,$$

ma essendo ε arbitrario abbiamo $p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y)$.

2. Abbiamo visto che $p_K(x) \leq \dfrac{2\|x\|}{\delta}$ per qualche $\delta > 0$; dunque dalla subadditività segue che, per ogni $x, y \in X$,
$$p_K(x) - p_K(y) \leq p_K(x-y) \leq \frac{2\|x-y\|}{\delta},$$
mentre invertendo x e y si ottiene $p_K(y) - p_K(x) \leq \dfrac{2\|x-y\|}{\delta}$ e quindi $|p_K(x) - p_K(y)| \leq \dfrac{2\|x-y\|}{\delta}$, dunque p è Lipschitz e in particolare continua.

3. Poiché $\dfrac{x}{r} \in K$ per ogni $r > p_K(x)$, se $K \subset K'$ allora $\dfrac{x}{r} \in K'$ per questi valori di r; passando all'estremo inferiore avremo $p_{K'}(x) \leq r$ per ogni $r > p_K(x)$ e dunque $p_{K'}(x) \leq p_K(x)$.

4. Osserviamo innanzi tutto che, essendo K convesso, $\dfrac{x}{r} \in \overline{K}$ se e solo se $\dfrac{x}{s} \in \mathring{K}$ per ogni $s > r$, dunque
$$p_{\overline{K}}(x) = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in \overline{K}\right\} = \inf\left\{s > 0 : \ \frac{x}{s} \in \mathring{K}\right\} = p_{\mathring{K}}(x);$$
essendo poi $\mathring{K} \subset K \subset \overline{K}$, allora dal punto precedente $p_{\mathring{K}}(x) \leq p_K(x) \leq p_{\overline{K}}(x)$, quindi deve valere l'uguaglianza. Inoltre, abbiamo $x \in \mathring{K}$ se e solo se $(1+\varepsilon)x \in K$ per qualche $\varepsilon > 0$, cioè se e solo se $p_K(x) < 1$. Analogamente, $x \in \overline{K}$ se e solo se $(1-\varepsilon)x \in K$ per qualche $\varepsilon > 0$, cioè se e solo se $p_K(x) \leq 1$.

5. Se K è bilanciato, allora
$$p_K(x) = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in K\right\} = \inf\left\{r > 0 : \ -\frac{x}{r} \in K\right\} = p_K(-x);$$
dunque, per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$ vale $p_K(\lambda x) = p_K(|\lambda| x) = |\lambda| p_K(x)$; inoltre, per costruzione $p_K(x) \geq 0$ per ogni x, dunque p_K verifica tutte le proprietà che caratterizzano le seminorme.

6. Se K è anche limitato, allora $\dfrac{x}{r} \in K$ per $r < \dfrac{\|x\|}{\operatorname{diam}(K)}$ e dunque per $x \neq 0$, $p_K(x) \geq \dfrac{\|x\|}{\operatorname{diam}(K)} > 0$; avendo già visto che verifica tutte le altre proprietà, p_K è una norma, e poiché già sappiamo $p_K(x) \leq C\|x\|$ allora sarà equivalente a $\|\cdot\|$.

□

Definizione.
Un sottospazio $H \subset X$ di uno spazio normato si dice ***iperpiano chiuso*** *se esistono $L \in X^* \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che*
$$H = \{L = \alpha\} = \{x \in X : \ Lx = \alpha\}.$$
Diremo che due sottospazi $A, B \subset X$ sono ***separati*** *dall'iperpiano chiuso $\{L = \alpha\}$ se $\sup_A L \leq \inf_B L$, cioè se*
$$Lx \leq \alpha \quad \forall\, x \in A \qquad\qquad Lx \geq \alpha \quad \forall\, x \in B.$$
Diremo che $A, B \subset X$ sono ***separati strettamente*** *se $\sup_A L < \inf_B L$, cioè che esiste $\varepsilon > 0$ tale che*
$$Lx \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall\, x \in A \qquad\qquad Lx \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall\, x \in B.$$

Proposizione.
Se X è uno spazio normato e $L : X \to \mathbb{R}$ è lineare, allora $L \in X^*$ se e solo se $\ker L := \{x \in X : Lx = 0\}$ è chiuso in X.
Inoltre, se L non è continua, allora $\ker L$ è denso in X.

Dimostrazione.
Se L è continua allora $\ker L = L^{-1}(\{0\})$ è la preimmagine rispetto a una mappa continua del chiuso $\{0\} \subset \mathbb{R}$, pertanto è chiuso in X.

Se invece L non è continua, allora esiste una successione $\{x_n\}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ e $|Lx_n| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dunque, per ogni $y \in X$ la successione $y_n := y - \frac{Ly}{Lx_n} x_n$ verifica

$$Ly_n = Ly - \frac{Ly}{Lx_n} Lx_n = 0; \qquad \|y_n - y\| = \left\| -\frac{Ly}{Lx_n} x_n \right\| = \frac{|Ly|}{|Lx_n|} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

quindi $\ker L$ è denso in X, e poiché $L \not\equiv 0$ avremo $\ker L \neq X$, dunque non potrà essere chiuso. $\square$

Lemma.
Sia X uno spazio normato, $K \subset X$ un aperto convesso e $x_0 \in X \setminus K$.
Allora, K e $\{x_0\}$ sono separati.

Dimostrazione.
A meno di traslazioni, possiamo supporre $0 \in K$; essendo K aperto, conterrà un intorno di 0, cosicché il funzionale di Minkowski $p = p_K$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Hahn-Banach, che applicheremo con $E = \mathrm{Span}\{x_0\}$ e $L : tx_0 \mapsto t$.
Verifichiamo innanzi tutto che $L \leq p$ su E: poiché $x_0 \notin K$, allora $p(x_0) \geq 1$ e dunque se $t \geq 0$ avremo

$$L(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0),$$

mentre per $t < 0$ abbiamo $L(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$. Dunque, dal Teorema di Hahn-Banach otteniamo $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ lineare, e continuo perché dalle proprietà di p otteniamo $\widetilde{L}x \leq p(x) \leq C\|x\|$; inoltre, se $x \in K$ allora $\widetilde{L}x \leq p(x) < 1$, mentre $\widetilde{L}x_0 = Lx_0 = 1$, dunque $\left\{\widetilde{L} = 1\right\}$ separa K e $\{x_0\}$. $\square$

Osservazione.
I due insiemi potrebbero non essere separati in senso stretto, ad esempio se $K = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ e $\|x_0\| = 1$.

Teorema (I forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach)**.**
Sia X uno spazio normato, $A, B \subset X$ convessi disgiunti tali che A è aperto.
Allora A e B sono separati.

Dimostrazione.
Applichiamo il lemma precedente all'insieme

$$K = A - B := \{a - b : \ a \in A, \ b \in B\} :$$

è aperto, perché $K = \bigcup_{x\in B} (A - x)$ è unione di aperti; è anche convesso perché se $k_1 = a_1 - b_1, k_2 = a_2 - b_2 \in K$, con $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, e $t \in [0, 1]$, allora

$$(1 - t)k_1 + tk_2 = (1 - t)a_1 + ta_2 - ((1 - t)b_1 + tb_2) \in A - B = K.$$

Inoltre poiché $A \cap B = \emptyset$, allora $0 \notin K$ e dunque le ipotesi del lemma sono soddisfatte: troviamo quindi $L \in X^*$ tali che $Lx \leq L(0) = 0$ per ogni $x \in K$, ovvero $L(a - b) \leq 0$ per ogni $a \in A, b \in B$, cioè $La \leq Lb$ e pertanto A, B sono separati. $\square$

Teorema (II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach)**.**
Sia X uno spazio normato, $A, B \subset X$ chiusi convessi disgiunti tali che B è compatto.
Allora A e B sono separati strettamente.

Dimostrazione.
Come nella I forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach, $K := A - B$ è un convesso che non contiene l'origine, e in questo caso è anche chiuso: infatti, prendendo $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tali che $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$, per la compattezza di B avremo $b_n \underset{n\to+\infty}{\to} b \in B$ a meno di estratte, dunque $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} x + b \in X$, ma essendo A chiuso, allora $x + b \in A$ e dunque $x = x + b - b \in A - B = K$.
Essendo dunque K chiuso, $B_\delta(0) \notin K$ per qualche $\delta > 0$.
Dunque, per la I forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach, K e $B_\delta(0)$ sono separati e cioè esiste $L \in X^*$ tale che $L(a-b) \leq L(\delta x)$ per ogni $a \in A, b \in B, x \in B_1(0)$; facendo l'estremo inferiore in x otteniamo che $L(a - b) \leq -\delta\|L\|$, cioè $La + \frac{\delta}{2}\|L\| \leq Lb - \frac{\delta}{2}\|L\|$ per ogni $a \in A, b \in B$, e quindi sono separati strettamente. $\square$

Esempio.
Prendendo $X = \mathbb{R}^2$, *gli insiemi*

$$A := \{(x_1, x_2) \in X : x_2 \le 0\}, \qquad B := \left\{(x_1, x_2) \in X : \ x_1 > 0, \ x_2 \ge \frac{1}{x_1}\right\},$$

sono chiusi convessi disgiunti, separati dall'iperpiano $H = \{x_2 = 0\}$, *ma non sono separati in senso stretto. Tuttavia, nessuno dei due è compatto, e infatti non sono separati in senso stretto.*

Corollario.
Sia X *uno spazio normato e* $E \subset X$ *un sottospazio lineare.*
Allora, E *è denso se e solo se l'unico funzionale* $L \in X^*$ *che verifica* $Lx = 0$ *per ogni* $x \in E$ *è quello nullo.*

Dimostrazione.
Supponiamo che E sia denso. Allora per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{x_n\}$ in E tale che $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, dunque se $L|_E \equiv 0$ allora $Lx = \lim\limits_{n\to+\infty} Lx_n = 0$, quindi L è identicamente nullo.
Viceversa supponiamo che E non sia denso, cioè che esista $x_0 \in X \setminus \overline{E}$. Allora, possiamo applicare la II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach con $A = \overline{E}$ e $B = \{x_0\}$ e trovare $L \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $Lx < \alpha < Lx_0$ per ogni $x \in A$. Essendo però A un sottospazio lineare, questo è possibile solo se $Lx = 0$ per ogni $x \in A$, e in particolare per $x \in E$; dunque $Lx_0 > 0$ e quindi $L|_E \equiv 0$ ma $L \not\equiv 0$. □

Come ultima applicazione del Teorema di Hahn-Banach, possiamo definire gli spazi ortogonali su qualsiasi spazio di Banach usando la dualità. Sugli spazi di Hilbert questa ortogonalità coincide con quella già vista attraverso il prodotto scalare, grazie al Teorema di Riesz-Fréchet, ma solo alcune proprietà continuano a valere nel caso generale.

Definizione.
Sia X *uno spazio normato,* X^* *il suo duale e* $E \subset X, F \subset X^*$.
Definiamo gli ***ortogonali*** *di* E, F *come, rispettivamente,*

$$E^\perp := \{L \in X^* : \ Lx = 0 \quad \forall\, x \in E\} \qquad F^\perp := \{x \in X : \ Lx = 0 \quad \forall\, L \in F\}$$

Osservazione.
Se X *è uno spazio di Hilbert, allora questa definizione coincide con quella data in precedenza, dopo aver identificato* X^* *con* X *con l'isometria data dal Teorema di Riesz-Fréchet.*

Proposizione.
Sia X *uno spazio normato,* X^* *il suo duale e* $E \subset X, F \subset X^*$. *Allora:*

1. $E^\perp \lhd X^*$, $F^\perp \lhd X$;
2. *Se* $E \subset E', F \subset F'$ *allora* $E'^\perp \subset E^\perp, F'^\perp \subset F^\perp$;
3. $E^\perp = \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp, F^\perp = \left(\overline{\mathrm{Span}(F)}\right)^\perp$;
4. $\overline{\mathrm{Span}(E)} = E^{\perp\perp}$.
5. $\overline{\mathrm{Span}(F)} \subset F^{\perp\perp}$.

Dimostrazione.
Si dimostra tutto allo stesso modo che negli Hilbert, tranne il fatto che nella *4* l'inclusione non è stretta.
Supponiamo per assurdo che esiste $x_0 \in E^{\perp\perp} \setminus \overline{\mathrm{Span}(E)}$. Per la II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach esiste $L \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $Lx < \alpha < Lx_0$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$; come nella dimostrazione del corollario precedente, per linearità avremo $Lx = 0$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$ e $Lx_0 > 0$, e in particolare $L|_E \equiv 0$ cioè $L \in E^\perp$, ma essendo $x_0 \in E^{\perp\perp}$ dovrà valere $Lx_0 = 0$, in contraddizione con quanto appena visto. □

Osservazione.

1. *Se X è riflessivo, con il ragionamento precedente si dimostra che* $\overline{\mathrm{Span}(F)} = F^{\perp\perp}$.

2. *In generale, se X non è riflessivo, l'inclusione* $\overline{\mathrm{Span}(F)} \subset F^{\perp\perp}$ *può essere stretta. Prendiamo infatti $X = \ell_1$ e $F = c_0 \subset \ell_\infty = X^*$. Allora,*

$$F^{\perp} := \left\{ x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k) = 0 \quad \forall\, y \in c_0 \right\} = 0,$$

perché scegliendo $y = e_n$ otteniamo che ogni $x \in F^{\perp}$ verifica $x(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; dunque, $F^{\perp\perp} = 0^{\perp} = X^*$.