# AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

## Spazi di Hilbert (segue dalle lezioni precedenti)

Possiamo ora dimostrare un risultato fondamentale sugli spazi di Hilbert, e cioè l'isomorfismo isometrico tra un Hilbert e il suo duale.

**Teorema** (di Riesz-Fréchet).
*Sia $H$ uno spazio di Hilbert.*
*Allora $H$ è isometrico al suo duale $H^*$ attraverso un'isometria suriettiva $\Phi : H \to H^*$ data da*

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftrightarrow & H^* \\ h & \leftrightarrow & L_h : x \to (x, h) \end{array}$$

*Dimostrazione.*
Costruiamo l'isometria inversa $\Psi : H^* \to H$. Affinché valga l'ultima proprietà che caratterizza l'isometria tra $H$ e $H^*$, $H$ dovrà soddisfare $Lx = \big(x, \Psi(L)\big)$ per ogni $x \in H$, $L \in H^*$.
Se $L = 0 \in H^*$, pongo $\Psi(L) = 0$. Altrimenti, dato $L \in H^* \setminus \{0\}$, avremo $\ker L \underset{\neq}{\lhd} H$ e dunque esiste $y \in (\ker L)^\perp \setminus \{0\}$; pongo $\Psi(L) = \dfrac{Ly}{\|y\|^2} y$.
Poiché, per ogni $x \in H$, vale

$$L\big((Ly)x - (Lx)y\big) = (Ly)Lx - (Lx)Ly = 0,$$

allora $y \in (\ker L)^\perp$ verifica

$$(x, \Psi(L)) - Lx = \frac{Ly(x,y) - Lx\|y\|^2}{\|y\|^2} = \frac{\big((Ly)x - (Lx)y, y\big)}{\|y\|^2} = 0.$$

Verifichiamo l'unicità: se $Lx = \big(x, \Psi_1(L)\big) = \big(x, \Psi_2(L)\big)$ per ogni $x \in H$, allora $\big(x, \Psi_1(L) - \Psi_2(L)\big) = 0$, in particolare per $x = \Psi_1(L) - \Psi_2(L)$ otteniamo $\|\Psi_1(L) - \Psi_2(L)\|^2 = 0$ e quindi $\Psi_1(L) = \Psi_2(L)$.
Per la linearità, basta scrivere

$$\big(x, \Psi(\alpha L + \beta M)\big) = (\alpha L + \beta M)x = \alpha Lx + \beta Mx = \alpha\big(x, \Psi(L)\big) + \beta\big(x, \Psi(M)\big) = \big(x, \alpha\Psi(L) + \beta\Psi(M)\big).$$

La suriettività segue dal fatto che, per ogni $h \in H$, il funzionale $L_h : x \mapsto (x, h)$ verifica $\Psi(L) = h$.
Infine, $\Psi$ è un'isometria perché per costruzione abbiamo

$$\|\Psi(L)\|_H \le \frac{|Ly|}{\|y\|_H} \le \|L\|_{H^*}; \qquad \|L\|_{H^*} = \sup_{\|x\|_H \le 1} \frac{\big|\big(x, \Psi(L)\big)\big|}{\|x\|_H} \le \|\Psi(L)\|_H.$$

□

**Osservazione.**
*Il Teorema di Riesz-Frechét è coerente con quanto già visto per gli spazi $L^2(\mu)$, inclusi $\ell_2$ e lo spazio euclideo finito-dimensionale.*

Studieremo ora un'altra proprietà che rende gli spazi di Hilbert particolarmente interessanti: la possibilità di scrivere un elemento qualsiasi dello spazio come combinazione (eventualmente infinita)

di elementi di una base. In particolare, faremo in modo che queste combinazioni si accordino bene con la struttura di prodotto scalare, cioè che siano ortonormali.
Sistemi di questo tipo sono già stati studiati nei corsi di base di algebra lineare nel caso finito-dimensionale, ma anche nel caso delle serie di Fourier costruite a partire dai polinomi trigonometrici. Vedremo ora che un procedimento simile funziona anche in casi molto più generali.

**Definizione.**
*Un sottoinsieme $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di uno spazio di Hilbert $H$ si dice* ***sistema ortonormale*** *se $(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & se\ \alpha = \beta \\ 0 & se\ \alpha \neq \beta \end{cases}$.*

**Esempio.**

1. *Un sistema ortonormale su $\mathbb{R}^N$, con il prodotto scalare standard, è data dagli elementi della base standard. Analogamente, un sistema ortonormale su $\ell_2$ è dato dalla base standard infinito-dimensionale $\{e_n\}$ definita da $e_n(k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & se\ n = k \\ 0 & se\ n \neq k \end{cases}$.*
   *Più in generale, prendendo un generico spazio misura $(X, \mathcal{P}(X), \#)$), con $\#$ misura che conta, un sistema ortonormale per*
   $$L^2(\#) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} :\ f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \text{ e } \sum_{x\in X} f(x)^2 < +\infty \right\}$$
   *è dato da $\{\chi_{\{x\}}\}_{x\in X}$.*

2. *Un sistema ortonormale su $L^2([-\pi, \pi])$ è dato da $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Osservazione.**

1. *Data una famiglia $\{e_\alpha\}$ di vettori ortogonali tra loro, un sistema ortonormale sarà dato da $\{e'_\alpha\}$ definito da $e'_\alpha := \frac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|}$.*

2. *Più in generale, data una famiglia numerabile di vettori $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearmente indipendenti, posso costruire un sistema ortonormale attraverso il procedimento di Gram-Schmidt: innanzi tutto costruisco induttivamente una famiglia di vettori ortogonali $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da $e'_n := e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e_n, e'_i)}{\|e'_i\|^2} e'_i$, poi trovo il sistema ortonormale ponendo $e''_n := \frac{e'_n}{\|e'_n\|}$.*

3. *Ogni sistema ortonormale verifica $\|e_\alpha\| = 1$ e $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$ per ogni $\alpha \neq \beta$; in particolare, ogni sotto-sistema numerabile $\{e_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sarà una successione limitata che, non avendo sotto-successioni di Cauchy, non ha estratte convergenti. Poiché si può sempre costruire un sistema ortonormale di cardinalità infinita con il procedimento di Gram-Schmidt, in ogni Hilbert infinito-dimensionale esistono successioni limitate senza estratte convergenti.*

**Definizione.**
*Sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale su uno spazio di Hilbert $H$.*
*Per ogni $x \in H$ i valori $\{(x, e_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ si dicono* ***coefficienti di Fourier*** *di $x$ rispetto al sistema $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*
*La serie $\sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ si dice* ***serie di Fourier*** *di $x$ relativa a $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

**Proposizione** (Disuguaglianza di Bessel)**.**
*Sia $H$ un Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale su $H$.*
*Allora, per ogni $x \in H$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$ vale*
$$\sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 \leq \|x\|^2.$$

*Dimostrazione.*
Dall'ortonormalità degli $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_N}$ segue direttamente che

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2 \left( x, \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right) + \left\| \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 + \sum_{i,j=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) \left(x, e_{\alpha_j}\right) \left(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}\right) \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 + \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2.
\end{aligned}$$

□

**Osservazione.**

1. *Dalla disuguaglianza di Bessel segue che i coefficienti di Fourier sono diversi da zero per al più un infinità numerabile di elementi; infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in A$, ci possono essere al più $N\|x\|$ elementi per cui $(x, e_\alpha) \geq \frac{1}{N}$. Dunque la serie di Fourier è una somma al più numerabile e quindi può essere sempre definita come limite delle somme parziali.*

2. *La serie di Fourier inoltre è sempre convergente perché, chiamando $\{e_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gli elementi del sistema ortonormale per cui $(x, e_{\alpha_i}) \neq 0$, la successione $x_n := \sum_{i=1}^{n} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i}$ delle somme parziali è di Cauchy; infatti, $\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} (x, e_{\alpha_i})^2 \underset{m,n \to +\infty}{\to} 0$, perché dalla disuguaglianza di Bessel la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_{\alpha_i})^2$ converge.*

**Definizione.**
*Un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}$ su un Hilbert si dice **completo** se $H = \overline{\mathrm{Span}(\{e_a\})}$.*

**Esempio.**

1. *Tutti gli esempi di sistemi ortonormali visti in precedenza sono completi.*
   *Questo è ovvio nel caso finito-dimensionale e ben noto nel caso delle funzioni trigonometriche.*
   *Per $\ell_2$ è sufficiente osservare che ogni $x = (x(1), x(2), \dots)$ è limite di $x_n = (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, \dots)$ perché $\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x(k)|^2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Analogamente si dimostra la completezza nel caso generico $L^2(\#)$.*

2. *Se invece, in uno dei casi precedenti, un sottoinsieme proprio del sistema ortonormale completo, ne otterremo uno non completo, perché ad esempio $e_1 \notin \overline{\mathrm{Span}(\{e_n\}_{n \geq 2})}$*

Per dimostrare l'esistenza di un sistema ortonormale completo occorre enunciare un risultato fondamentale in logica e teoria degli insiemi, noto come Lemma di Zorn.
Questo risultato è essenziale per dimostrare moltissimi risultati in cui la cardinalità è più che numerabile (e dunque il principio di induzione non è più sufficiente). Utilizzeremo il Lemma di Zorn anche più avanti per dimostrare un altro teorema fondamentale di analisi funzionale.

**Lemma** (di Zorn).
*Sia $(P, \preceq)$ un insieme non vuoto parzialmente ordinato. Se ogni sottoinsieme $Q \subset P$ totalmente ordinato ha un maggiorante (cioè un $m \in P$ tale che $q \preceq m$ per ogni $q \in Q$), allora $P$ ammette un elemento massimale (cioè un $M \in P$ tale che non esistono $p \in P \setminus \{M\}$ tali che $M \preceq p$).*

**Proposizione.**
*Ogni spazio di Hilbert $H$ ha un sistema ortonormale completo.*

*Dimostrazione.*
Consideriamo l'insieme

$$P := \{E \subset H : \ E \text{ è un sistema ortonormale di } H\} :$$

è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione, e non è vuoto perché contiene tutti gli insiemi contenenti un solo vettore $\{e\}$ con $\|e\| = 1$. Prendiamo ora $Q \subset P$ totalmente ordinato e verifichiamo che $E_0 := \bigcup_{E \in Q} E$ è un maggiorante: è esso stesso un sistema ortonormale, perché se $e \in E_0$ allora $e \in E$ per qualche $E \in Q$ e dunque $\|e\| = 1$; inoltre, se $e, f \in E_0$, allora $e \in E$ e $f \in F$ per qualche $E, F \in Q$, ma siccome $Q$ è totalmente ordinato avremo (a meno di scambiare) $E \subset F$ e quindi $e, f \in F$, pertanto essendo $F$ un sistema ortonormale avremo $e \perp f$. Dunque $E_0 \in P$, e poiché per costruzione $E \subset E_0$ per ogni $E \in Q$, $E_0$ è un maggiorante.
Possiamo dunque applicare il Lemma di Zorn a $(P, \subset)$ e trovare un elemento massimale $\widetilde{E} \in P$. Rimane da dimostrare la completezza di $\widetilde{E}$: se così non fosse, allora $\widetilde{E}^\perp \neq \{0\}$, ma quindi scegliendo $e \in \widetilde{E}^\perp$ con $\|e\| = 1$ avremmo $\widetilde{E} \cup \{e\}$ come sistema ortonormale contenente strettamente $\widetilde{E}$, e dunque ne contraddirebbe la massimalità. □

**Definizione.**
*Sia $X$ uno spazio topologico. $X$ si dice **separabile** se ha un sottoinsieme denso e numerabile.*

**Corollario.**
*Uno spazio di Hilbert $H$ ha un sistema ortonormale completo al più numerabile $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se e solo se $H$ è separabile, cioè se ha un sottospazio denso numerabile. In particolare, tutti i sistemi ortonormali di uno stesso spazio di Hilbert hanno la stessa cardinalità.*

*Dimostrazione.*
Se $H$ ha un sistema ortonormale completo numerabile $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, allora l'insieme delle combinazioni lineari razionali di elementi della base

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})\{c_1 e_1 + \cdots + c_N e_N : \ c_i \in \mathbb{Q}\}$$

è numerabile e denso in $H$. Viceversa, $H$ ha un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ più che numerabile, allora come abbiamo visto $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$ per $\alpha \neq \beta$, dunque $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\alpha) \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\beta) = \emptyset$: essendoci quindi un infinità più che numerabile di aperti disgiunti, ogni insieme denso dovrà intersecarli tutti e quindi non potrà essere numerabile. □

**Esempio.**
*Lo spazio $L^2(\#)$ con la misura del conteggio è separabile se e solo se lo spazio $X$ è numerabile (visto che $X$ ha la stessa cardinalità di un sistema completo), come ad esempio nel caso di $\ell_2$.*

**Teorema** (Caratterizzazione dei sistemi completi).
*Sia $H$ uno spazio di Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un suo sistema ortonormale.*
*Allora si equivalgono:*

a. *$\{e_\alpha\}$ è completo;*

b. *$\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$;*

c. *Per ogni $x \in X$ vale $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$;*

d. *Per ogni $x \in X$ vale $x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha$ per qualche $c_\alpha \in \mathbb{R}$;*

*e.* *Vale l'uguaglianza di Bessel* $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)^2$ *per ogni* $x \in H$;

*f.* *Vale l'identità di Parseval* $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)(y, e_\alpha)$ *per ogni* $x, y \in H$.

*Dimostrazione.*

$a \iff b$ Segue dal Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso: poiché $H = \overline{\mathrm{Span}\{e_\alpha\}} \oplus \{e_\alpha\}^\perp$, allora $\overline{\mathrm{Span}\{e_\alpha\}} = H$ se e solo se $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$.

$b \Rightarrow c$ Se $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$, allora $y := \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ verifica, per ogni $\alpha \in A$,

$$(y, e_\alpha) = \left( \sum_{\beta \in A} (x, e_\beta) e_\beta, e_\alpha \right) = \sum_{\beta \in A} (x, e_\alpha)(e_\beta, e_\alpha) = (x, e_\alpha),$$

dunque $y - x \in \{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$ e cioè $y = x$.

$c \Rightarrow b$ Se $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ per ogni $x$ e $x \in \{e_\alpha\}^\perp$, allora

$$x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha = \lim_{n \to +\infty} \sum_{\alpha \in A} 0 = 0,$$

dunque $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$.

$c \Rightarrow d$ Ovvio.

$d \Rightarrow c$ Se $x = \sum_{\beta \in A} c_\beta e_\beta$, allora per ogni $\alpha \in A$ abbiamo

$$(x, e_\alpha) = \sum_{\beta \in A} c_\beta (e_\beta, e_\alpha) = c_\alpha.$$

$c \iff e$ Se $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono gli indici per cui $(x, \alpha_i) \neq 0$ (che già sappiamo essere al più numerabili), allora avremo

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2,$$

come è stato visto nella dimostrazione della disuguaglianza di Bessel; passando al limite per $N \to +\infty$, il termine a sinistra va a zero se e solo se vale $c$, mentre il termine a destra va a zero se e solo se vale $e$, pertanto le due affermazioni sono equivalenti.

$f \Rightarrow e$ Basta scegliere $x = y$.

$e \Rightarrow f$ Applicando l'uguaglianza di Bessel per $x$ e $y$ separatamente e poi a $x + y$ si ottiene

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)^2 + \sum_{\alpha \in A} (y, e_\alpha)^2 + 2(x, y), \\ \|x + y\|^2 &= \sum_{\alpha \in A} (x + y, e_\alpha)^2 = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)^2 + \sum_{\alpha \in A} (y, e_\alpha)^2 + 2 \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)(y, e_\alpha) \end{aligned}$$

da cui $f$.

□

**Osservazione.**

1. *In generale, se* $\{e_\alpha\}$ *non è completo, per ogni* $x$ *avrò* $Px = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_a$*, dove* $P$ *è la proiezione su* $E = \overline{\mathrm{Span}(\{e_\alpha\})}$*. Infatti, se* $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ *è un sistema ortonormale completo per* $E^\perp$*, allora,* $\{e_\alpha\} \cup \{f_\beta\}$ *è completo su* $H$*, dunque* $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha + \sum_{\beta \in B} (x, f_\beta) f_\beta \in E \oplus E^\perp$*, ma essendo la somma diretta dovrà essere* $Px = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_a$*.*
   *Analogamente, la disuguaglianza di Bessel e l'identità di Parseval avranno la forma*

$$\|Px\|^2 = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)^2; \qquad\qquad (Px, Py) = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)(y, e_\alpha).$$

2. *La convergenza delle serie di Fourier è solamente rispetto alla norma di* $H$*.*
   *In particolare, nel caso ben noto delle serie di Fourier trigonometriche, la convergenza è in* $L^2$*. Tuttavia, poiché la convergenza in* $L^2$ *non implica quella puntuale (se non su una estratta), la convergenza puntuale delle serie di Fourier non segue dal teorema precedente ed è in generale molto delicata da ottenere.*

Concludiamo il discorso sugli spazi di Hilbert con un risultato forse sorprendente: ogni spazio di Hilbert è una copia isometrica di un qualche $L^2$.

**Corollario.**
*Sia* $H$ *uno spazio di Hilbert e* $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *un suo sistema ortonormale completo.*
*Allora,* $H$ *è isometrico allo spazio*

$$L^2(\#) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \ f(\alpha) \neq 0 \text{ per al più numerabili } \alpha \text{ e } \sum_{\alpha \in A} f(\alpha)^2 < +\infty \right\},$$

*definito sullo spazio misura* $(A, \mathcal{P}(A), \#)$*.*
*In particolare, se* $H$ *è separabile, è isometrico a* $\ell_2$*.*

*Dimostrazione.*
Definiamo l'isometria tra i due spazi come

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Phi} & L^2(\#) \\ x & \mapsto & \Phi(x) : \alpha \to (x, e_\alpha). \end{array}$$

La linearità di $\Phi$ è immediata, inoltre $\Phi$ è un'isometria per l'uguaglianza di Bessel, perché

$$\|\Phi(x)\|_2^2 := \int_A |\Phi(x)|^2 \mathrm{d}\# = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)^2 = \|x\|_H^2;$$

in particolare, $\Phi$ è anche continua e iniettiva. Per la suriettività, data $f \in L^2(\#)$ considero $x := \sum_{\alpha \in A} f(\alpha) e_\alpha$. La somma è ben definita perché sono diversi da zero solo numerabili coefficienti, e inoltre dalla definizione di $x$ si ottiene $(x, e_\alpha) = f(\alpha)$ per ogni $\alpha$, e dunque $\Phi(x) = f$. $\square$