AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Teoria spettrale

Affrontiamo ora l'ultimo grande argomento del corso: la teoria spettrale.
Studieremo infatti alcune proprietà degli operatori lineari tra spazi di Banach, generalizzando i concetti di spettro, autovalori e autovettori.
D'ora in poi considereremo spazi normati sui complessi, piuttosto che sui reali, perché più adatti allo studio della teoria spettrale.

Definizione.
Sia X uno spazio vettoriale complesso.
Una ***norma*** *su X è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0,+\infty)$ che verifichi:*

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in X$ *(Disuguaglianza triangolare);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}$ *(Omogeneità);*
3. $\|x\| > 0 \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}$ *(Positività).*

$(X, \|\cdot\|)$ *si dice* ***spazio normato complesso*** *e, se è uno spazio metrico completo rispetto a* $\mathrm{d}(x,y) := \|x-y\|$, *si dice* ***spazio di Banach complesso****.*
Un ***prodotto hermitiano*** *su X è una mappa $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ che verifichi:*

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ *per ogni $x,y \in X$ (Simmetria);*
2. *Per ogni $y \in H$ fissato, $x \mapsto (x,y)$ è lineare in x, cioè*
$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z), \qquad \forall\, x,y,z \in X,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \qquad \textit{(Linearità)};$$
3. $(x,x) \in \mathbb{R}_{>0}$ *per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ (Positività).*

Se X è uno spazio di Banach complesso rispetto alla norma $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ indotta dal prodotto hermitiano X si dice ***spazio di Hilbert complesso****.*

Osservazione.

1. *Un prodotto hermitiano (x,y) non è lineare in y, bensì antilineare, cioè $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$.*
2. *Sugli spazi di Hilbert complessi continuano a valere, nelle stesse forme degli spazi di Hilbert reali, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la regola del parallelogramma e il Teorema di Pitagora; l'identità di polarizzazione invece assume la forma*
$$(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + \imath \frac{\|x+\imath y\|^2 - \|x-\imath y\|^2}{4}.$$

Esempio.
Gli spazi $L^p(\mu), C^k, W^{1,p}$ sono degli spazi di Banach complessi se visti come spazi di funzioni a valori complessi piuttosto che reali. Le rispettive norme sono definite allo stesso modo, considerando i moduli di numeri complessi invece che reali.
Gli spazi $L^2(\mu)$ sono spazi di Hilbert complessi con il prodotto hermitiano $(f,g) := \int_a^b f\overline{g}\mathrm{d}\mu$.

Definizione.
Sia X uno spazio di Banach complesso, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{I} \in \mathcal{L}(X)$ l'identità e $\lambda \in \mathbb{C}$.
*Si dice che λ appartiene allo **spettro** di A se $A - \lambda\mathbb{I}$ <u>non</u> è un operatore invertibile. Inoltre:*

- *Se $A - \lambda\mathbb{I}$ <u>non</u> è iniettivo si dice che λ appartiene allo spettro **puntuale** di A; in questo caso, λ si dice **autovalore** di A, il sottospazio $\ker(A-\lambda\mathbb{I})$ si dice **autospazio** di A e i suoi elementi diversi da zero si dicono **autovettori** di A.*
- *Se $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo e $\operatorname{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I})$ è un sottoinsieme denso proprio di X si dice che λ appartiene allo spettro **continuo** di A.*
- *Se $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo ma $\overline{\operatorname{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I})} \subsetneq X$ si dice che λ appartiene allo spettro **residuo** di A.*

Lo spettro di A si denota con il simbolo $\sigma(A)$ e gli spettri puntuale, continuo, residuo si indicano rispettivamente con i simboli $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$.

Osservazione.

1. *Come abbiamo già visto, l'inverso di un operatore continuo invertibile è sempre continuo, dunque se $\lambda \notin \sigma(A)$ allora $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*
2. *Se $\dim X < +\infty$, allora è ben noto che tutti gli elementi dello spettro sono autovalori, perché le mappe lineari da uno spazio finito-dimensionale in sé sono iniettive se e solo se sono suriettive, e inoltre $\sigma(A)$ è finito ed ha cardinalità al più pari a $\dim X$.*

Esempio.

1. *Se $A : \ell_2 \to \ell_2$ è lo shift sinistro definito da $A : (x(1), x(2), x(3), \dots) \mapsto (x(2), x(3), x(4), \dots)$, cioè $Ax(k) = x(k+1)$, allora $0 \in \sigma_p(A)$ perché $e_1 \in \ker A$; pur non essendo iniettivo, A è suriettivo.*
2. *Se $A : \ell_2 \to \ell_2$ è lo shift destro definito da $A : (x(1), x(2), x(3), \dots) \mapsto (0, x(1), x(2), \dots)$, cioè $Ax(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1 \\ x(k-1) & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$, allora $0 \in \sigma_r(A)$ perché $\operatorname{ran} A = \{x \in \ell_2 : x(1) = 0\}$.*
3. *Se $A : \ell_2 \to \ell_2$ è definito da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ allora $0 \in \sigma_c(A)$ perché non è invertibile ma iniettivo, come abbiamo già visto, e $\operatorname{ran} A$ è un sottoinsieme denso proprio di ℓ_2.*

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach complesso, $A, B \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Allora:

1. *Se $|\lambda| > \|A\|$ allora $\lambda \notin \sigma(A)$.*
2. *Se A è invertibile e $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ allora anche B è invertibile.*
3. *Se $\lambda \notin \sigma(A)$ e $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\|}$ allora $\mu \notin \sigma(A)$.*

Dimostrazione.

1. Se $|\lambda| > \|A\|$, definiamo l'inverso di $A - \lambda\mathbb{I}$ come serie geometrica: $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} := -\dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$.
   La serie è convergente perché di Cauchy, essendo
   $$\left\| -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{\lambda^n} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{M} \frac{A^n}{\lambda^n} \right\| \leq \left\| \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{A^n}{\lambda^n} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\|A\|}{\lambda}}_{<1} \Bigg)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0;$$
   inoltre, la serie inverte $A - \lambda\mathbb{I}$ perché
   $$(A - \lambda\mathbb{I}) \left(-\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} = \mathbb{I}.$$

2. Se $\|B-A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, allora

$$\left\|A^{-1}B-\mathbb{I}\right\| = \left\|A^{-1}(B-A)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|B-A\| < 1 = |-1|,$$

dunque per il punto precedente è invertibile l'operatore $A^{-1}B-\mathbb{I}-(-\mathbb{I}) = A^{-1}B$, e quindi lo è anche $B = A \circ A^{-1}B$.

3. Prendendo, nel punto precedente, $A-\lambda\mathbb{I}$ e $A-\mu\mathbb{I}$ al posto rispettivamente di A e B si ottiene

$$\|A-\lambda\mathbb{I}-(A-\mu\mathbb{I})\| = |\mu-\lambda| < \frac{1}{\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}\|},$$

dunque se $A-\lambda\mathbb{I}$ è invertibile lo è anche $A-\mu\mathbb{I}$ e cioè $\mu \notin \sigma(A)$.

□

Corollario.
L'insieme degli operatori invertibili su X è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{L}(X)$.
Inoltre, lo spettro è un sottoinsieme limitato e chiuso di $\mathbb{C}$, dunque è compatto.

Osservazione.
Se $\dim X < +\infty$, il precedente corollario era già ben noto, poiché l'insieme degli operatori invertibili è quello in cui il determinante, funzione continua rispetto alla norma operatoriale, è diverso da zero; la compattezza dello spettro invece segue dalla sua finitezza.

Esempio.

1. *L'operatore $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ verifica $\sigma(A) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$: lo zero appartiene allo spettro continuo, come abbiamo visto, mentre gli altri sono autovalori, dal momento che $Ae_n = \dfrac{e_n}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; per tutti gli altri valori di λ invece $A-\lambda\mathbb{I}$ è invertibile, con $(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}y(k) = \dfrac{k}{1-\lambda k}y(k)$.*

2. *L'operatore shift sinistro su $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ ha per autovalore ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$, come abbiamo visto nel caso particolare $\lambda = 0$, perché $x(k) = \lambda^k$ verifica $Ax = \lambda x$; se $|\lambda| > 1 = \|A\|$ allora per la proposizione precedente $\lambda \notin \sigma(A)$, mentre se $|\lambda| = 1$ allora $\lambda \in \sigma(A)$ perché lo spettro è chiuso; in quest'ultimo caso, $A-\lambda\mathbb{I}$ è iniettivo, ma la sua immagine è densa (e dunque $\lambda \in \sigma_c(A)$) perché contiene ogni elemento della base standard, essendo $e_k = (A-\lambda\mathbb{I})x_k$, dove $x_k = \left(-\dfrac{1}{\lambda^k}, \dots, -\dfrac{1}{\lambda}, 0, \dots\right)$.*

3. *L'operatore shift destro su $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ ha nello spettro residuo ogni λ con $|\lambda| < 1$: infatti, $A-\lambda\mathbb{I}$ è iniettivo per questi λ, perché se $Ax = \lambda x$ allora $x(1) = 0$ e $x(k) = \dfrac{x(k-1)}{\lambda}$ per ogni k, dunque $x = 0$; inoltre, $e_1 \notin \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda\mathbb{I})}$ perché se $e_1 + y \notin \operatorname{ran}(A-\lambda\mathbb{I})$ con $\|y\| \leq \varepsilon < 1-|\lambda|$ allora $x(k) = -\dfrac{1}{\lambda^k} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{y(j)}{\lambda^{k-j+1}}$ e dunque*

$$\begin{aligned} |x(k)| &= \left|\frac{-1-y(1)-\lambda y(2)+\cdots-\lambda^{k-1}y(k)}{\lambda^k}\right| \\ &\geq \frac{1-\|y\|_\infty \sum_{j=0}^{k-1}|\lambda|^j}{|\lambda|^k} \\ &\geq \frac{1-\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}}{|\lambda|^k} \\ &\underset{k\to+\infty}{\not\to} 0, \end{aligned}$$

quindi $x \notin \ell_2$. Se invece $|\lambda| = 1$, allora $\lambda \in \sigma_c(A)$; come prima, $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo anche in questo caso, e inoltre $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda\mathbb{I})} = \ell_2$, *perché l'unico funzionale lineare che si annulla su* $\operatorname{ran}(A - \lambda\mathbb{I})$ *è quello nullo, cioè che se $(y, (A - \lambda\mathbb{I})x)_{\ell_2} = 0$ per ogni $x \in \ell_2$ allora $y \equiv 0$: scegliendo $x = e_k$ si ottiene $y(k+1) = \lambda y(k)$, cioè $y(k) = c\lambda^k$ per qualche $c \in \mathbb{R}$, ma essendo $|\lambda| = 1$ l'unica scelta per cui $y \in \ell_2$ dev'essere $c = 0$. Infine, poiché $\|A\| = 1$, dalla proposizione precedente otteniamo che se $|\lambda| > 1$ allora $\lambda \notin \sigma(A)$.*

Possiamo ora definire il raggio spettrale, cioè la massima norma degli elementi dello spettro. Ne studieremo alcune proprietà, tra cui una caratterizzazione che curiosamente ricorda il raggio di convergenza della serie potenze.

Definizione.
Sia X uno spazio di Banach complesso $A \in \mathcal{L}(X)$.
*Il **raggio spettrale** di A il massimo valore della norma degli elementi dello spettro, cioè*

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Osservazione.
Come abbiamo già visto, $\rho(A) \le \|A\|$ e dunque in particolare $\rho(A) < +\infty$ per ogni A.

Esempio.

1. *Se A è l'operatore di shift destro o sinistro su ℓ_2, come abbiamo visto, $\sigma(A) = \overline{B_1(0)}$ e dunque $\rho(A) = 1 = \|A\|$; lo stesso vale per l'altro esempio precedente $A : \ell_2 \to \ell_2$ dato da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$.*
2. *In generale, potrebbe valere la disuguaglianza stretta: ad esempio, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $A(x_1, x_2) = (x_2, 0)$ verifica $\|A\| = 1$ ma $\sigma(A) = \{0\}$, dunque $\rho(A) = 0$.*

Lemma.
Sia X uno spazio di Banach complesso, $A \in \mathcal{L}(X)$ e $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio complesso.
Allora,

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) := \{p(\lambda) : \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dimostrazione.
Scrivendo $p(z) - \lambda = a_N(z - \alpha_1(\lambda))^{N_J} \dots (z - \alpha_J(\lambda))^{N_J}$, allora $p(A) - \lambda\mathbb{I} = a_N(A - \alpha_1(\lambda)\mathbb{I})^{N_J} \dots (A - \alpha_J(\lambda)\mathbb{I})^{N_J}$, dunque

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(p(A)) \quad &\iff \quad p(A) - \lambda\mathbb{I} \text{ non è invertibile} \\
&\iff \quad A - \alpha_j(\lambda)\mathbb{I} \text{ non è invertibile per qualche } j \\
&\iff \quad \alpha_j(\lambda) \in \sigma(A) \\
&\iff \quad \lambda = p(\alpha_j(\lambda)) \in p(\sigma(\lambda)).
\end{aligned}$$

□

Teorema (Caratterizzazione del raggio spettrale)**.**
Sia X uno spazio di Banach complesso e $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora:

1. *$\sigma(A) \neq \emptyset$;*
2. *Esiste finito il limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ e vale $\rho(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Dimostrazione.

1. La funzione di variabile complessa $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(\lambda) \to \mathcal{L}(X)$ data da $f(\lambda) = (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ è olomorfa sul suo insieme di definizione, perché

$$\frac{f(\lambda + \mu) - f(\lambda)}{\mu} \quad = \quad \frac{(A - (\lambda + \mu)\mathbb{I})^{-1} - (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(A-\lambda\mathbb{I})(A-(\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1}(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}-(A-(\lambda+\mu)\mathbb{I})(A-(\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1}(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu}\\
&= \frac{\mu(A-(\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1}(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu}\\
&\underset{\mu\to 0}{\to} (A-\lambda\mathbb{I})^{-2}.
\end{aligned}
$$

Inoltre, $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{A}{\lambda}-\mathbb{I}\right)^{-1}$ con $\left(\frac{A}{\lambda}-\mathbb{I}\right)^{-1}$ limitata in norma per $|\lambda|$ grande, dunque $f(\lambda)\underset{|\lambda|\to+\infty}{\to}0$; pertanto, se fosse $\sigma(A)=\emptyset$, f sarebbe una funzione intera limitata, cioè costante, che è assurdo.

2. Sappiamo che la serie di Laurent di f converge sulla più grande corona circolare centrata in 0 su cui f è olomorfa, cioè $\mathbb{C}\setminus\overline{B_{\rho(A)}(0)}$; in questo caso, la serie di Laurent è data dalla serie geometrica $-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$, dunque per $|\lambda|>\rho(A)$ dovrà avere $\limsup_{n\to+\infty}\frac{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|}<1$, cioè $\rho(A)\ge\limsup_{n\to+\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Per ottenere l'altra disuguaglianza è sufficiente applicare il lemma precedente con il polinomio $p(z)=z^n$; poiché $\sigma(A^n)=\sigma(A)^n$, allora $\rho(A^n)=\rho(A)^n$, dunque $\rho(A)^n=\rho(A^n)\le\|A^n\|$, dunque $\rho(A)\le\liminf_{n\to+\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

$\square$

Osservazione.
La stima precedente $\rho(A)\le\|A\|$ è in generale più debole di quella data dal teorema perché $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\le\|A\|$.

Dopo questa panoramica generale sulla teoria spettrale, studiamo più in dettaglio alcune proprietà specifiche dello spettro di una classe di operatori, che avevamo introdotto nello studio degli spazi di Sobolev: gli operatori compatti. Come vedremo, le proprietà spettrali degli operatori compatti ricordano il caso finito-dimensionale.

Lemma.
Sia X uno spazio di Banach complesso, $A\in\mathcal{L}(X)$ e $E\underset{\neq}{\lhd}F\lhd X$ tali che $(\mathbb{I}-A)F\subset E$.
Allora, esiste $x_0\in F$ tale che $\|x_0\|=1$ e $\|Ax_0-Ay\|\ge\frac{1}{2}$ per ogni $y\in E$.

Dimostrazione.
Da un lemma precedente, sappiamo che esiste $x_0\in F$ che verifica $\|x_0\|=1$ e $\|x_0-z\|\ge\frac{1}{2}$ per ogni $z\in E$. Poiché $(\mathbb{I}-A)F\subset E$, allora per ogni $y\in E$ avremo $Ax_0-Ay=x_0-(y+(\mathbb{I}-A)(x_0-y))$ con $y+(\mathbb{I}-A)(x_0-y)\in E$, dunque $\|Ax_0-Ay\|\ge\frac{1}{2}$. $\square$

Osservazione.
Dato uno spazio normato X e $E\lhd X$, il quoziente

$$\frac{X}{E}:=\{x+E;\ x\in X\}$$

ha anch'esso una struttura di spazio normato con $\|x+E\|_{\frac{X}{E}}:=\inf\{\|x+y\|:\ y\in E\}$; se X è uno spazio di Banach anche $\frac{X}{E}$ è uno spazio di Banach.

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach complesso e $A\in\mathcal{K}(X)$. Allora:

1. $\dim\ker(\mathbb{I}-A)<+\infty$;
2. $\mathrm{ran}\,(\mathbb{I}-A)$ *è chiuso;*

3. $\dim \frac{X}{\operatorname{ran}(\mathbb{I}-A)} < +\infty$.

Dimostrazione.

1. Se fosse $\dim \ker(\mathbb{I}-A) = +\infty$, allora conterrebbe una successione crescente di sottospazi lineari chiusi $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Poiché $(\mathbb{I}-A)E_n = \{0\} \subset E_{n-1}$, possiamo applicare il lemma precedente alla coppia E_{n-1}, E_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ e trovare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \frac{1}{2}$; ciò vorrebbe dire che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha estratte convergenti, in contraddizione con il fatto che A è compatto.

2. Dati $y, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $(\mathbb{I}-A)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$, vogliamo mostrare che $y \in \operatorname{ran}(\mathbb{I}-A)$. Mostriamo innanzi tutto che $d_n := \mathrm{d}(x_n, \ker(\mathbb{I}-A))$ è limitata: se fosse $d_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, allora prendendo $z_n \in \ker(\mathbb{I}-A)$ tale che $\|x_n - z_n\| \leq d_n + 1$ avremo $\left\|\frac{x_n - z_n}{d_n}\right\| \leq 2$ e dunque, essendo A compatto, a meno di estratte $A\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} w$; tuttavia, essendo $x_n - Ax_n$ limitata, avremo $\frac{x_n - Ax_n}{d_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e dunque w verifica

$$w - Aw \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \frac{x_n - z_n}{d_n} - A\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) = \frac{x - Ax_n}{d_n} - \underbrace{\frac{z_n - Az_n}{d_n}}_{=0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

dunque $w \in \ker(\mathbb{I}-A)$, in contraddizione con

$$\mathrm{d}(w, \ker(\mathbb{I}-A)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}, \ker(\mathbb{I}-A)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}\left(\frac{x_n}{d_n}, \ker(\mathbb{I}-A)\right) = 1.$$

Dunque, esiste $z_n \in \ker(\mathbb{I}-A)$ tale che $\|x_n - z_n\| \leq C$, e per compattezza $A(x_n - z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} v$, ma allora

$$x_n - z_n = x_n - Ax_n + A(x_n - z_n) - \underbrace{(\mathbb{I}-A)z_n}_{=0} \underset{n\to+\infty}{\to} y + v,$$

e cioè

$$y = \lim_{n\to+\infty} (\mathbb{I}-A)x_n = \lim_{n\to+\infty} (\mathbb{I}-A)(x_n - z_n) = (\mathbb{I}-A)(y+v) \in \operatorname{ran}(\mathbb{I}-A).$$

3. Supponiamo per assurdo che $\dim \frac{X}{\operatorname{ran}(\mathbb{I}-A)} = +\infty$. Allora, dati $\{x_n + \operatorname{ran}(\mathbb{I}-A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearmente indipendenti in $\frac{X}{\operatorname{ran}(\mathbb{I}-A)}$, applico il lemma precedente con $E_n := \operatorname{Span}\{\operatorname{ran}(\mathbb{I}-A), x_1, \dots, x_n\}$, $F = E_{n+1}$: allora, esisteranno $x_{0,n} \in E_{n+1} \setminus E_n$ tali che $\|x_{0,n}\| = 1$ e $\|Ax_{0,n} - Ax_{0,m}\| \geq \frac{1}{2}$ per $n \neq m$, assurdo perché A è compatto.

□

Corollario.
Se $\ker(\mathbb{I}-A) = \{0\}$*, allora* $\mathbb{I}-A$ *è invertibile sull'immagine.*

Osservazione.
Le proprietà degli operatori del tipo $\mathbb{I}-A$ *sono le stesse di* $A - \lambda\mathbb{I} = -\lambda\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda}\right)$*, per ogni* $\lambda \neq 0$*, perché le moltiplicazioni per* $-\lambda$ *e* $-\frac{1}{\lambda}$ *sono invertibili.*

Teorema (Alternativa di Fredholm per operatori compatti)**.**
Sia X *uno spazio di Banach e* $A \in \mathcal{K}(X)$ *e, per* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$K_n := \ker((\mathbb{I}-A)^n); \qquad R_n := \operatorname{ran}((\mathbb{I}-A)^n).$$

Allora:

1. *R_n è chiuso e $K_n \subset K_{n+1}$, $R_n \subset R_{n-1}$, $\dim K_n < +\infty$, $\dim \dfrac{X}{R_n} < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

2. *Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che*
$$K_N = K_{N+1} = \cdots = K_n \qquad R_N = R_{N+1} = \cdots = R_n \qquad \forall n \geq N,$$
inoltre $X = K_N \oplus R_N$ e
$$\begin{aligned}(\mathbb{I} - A)K_N \subset K_N \qquad & \text{con } (\mathbb{I} - A)|_{K_N} \text{ nilpotente,}\\ (\mathbb{I} - A)R_N \subset R_N \qquad & \text{con } (\mathbb{I} - A)|_{R_N} \text{ invertibile.}\end{aligned}$$

3. *$\mathbb{I} - A$ è invertibile se e solo se è iniettivo, cioè $N = 1$ e $K_1 = \{0\}, R_1 = X$.*

Dimostrazione.

1. Se $x \in K_n$, allora
$$(\mathbb{I} - A)^{n+1}x = (\mathbb{I} - A)(\mathbb{I} - A)^n = (\mathbb{I} - A)0 = 0$$
e dunque $x \in K_{n+1}$; analogamente, se $y = (\mathbb{I} - A)^n x \in R_n$ allora $y = (\mathbb{I} - A)^{n-1}(\mathbb{I} - A)x \in R_{n-1}$. Il resto segue dalla proposizione precedente, scrivendo $(\mathbb{I} - A)^n = \mathbb{I} - A_n$ con $A_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} A^k$ compatto in quanto combinazione di operatori compatti.

2.

Passo 1 Esiste N per cui $K_N = K_n$ per ogni $n \geq N$: se così non fosse, essendo $(\mathbb{I} - A)K_{n+1} = K_n$, potremmo applicare il lemma precedente con $E_n = K_n$ e $F_n = K_{n+1}$ e trovare $x_n \in K_{n+1} \setminus K_n$ con $\|x_n\| = 1$ e $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ per $n \neq m$; tuttavia, questo è assurdo perché A è compatto.

Passo 2 Esiste M per cui $R_M = R_n$ per ogni $n \geq M$: altrimenti, come prima, potrei applicare il lemma con $E_n = R_n$ e $F_n = R_{n-1}$ e trovare una successione limitata senza estratte convergenti, in contraddizione con la compattezza di A.

Passo 3 Se N è come prima, $K_N \cap R_N = \{0\}$: infatti, se $y \in K_N \cap R_N$ allora esiste $x \in X$ tale che $(\mathbb{I} - A)^N x = y$ e $(\mathbb{I} - A)^N y = 0$, dunque $(\mathbb{I} - A)^{2N} x = 0$ e cioè $x \in K_{2N} = K_N$, pertanto $y = (\mathbb{I} - A)^N x = 0$.

Passo 4 Se N, M sono i più piccoli interi per cui i K_n, R_m si "stabilizzano", allora $M \leq N$: grazie al passo precedente, questo seguirà dopo aver dimostrato $K_{M-1} \cap K_{M-1} \neq \emptyset$; prendendo $x \in R_{M-1} \setminus R_M$, avremo $(\mathbb{I} - A)x \in R_M = (\mathbb{I} - A)R_M$, cioè $(\mathbb{I} - A)x = (\mathbb{I} - A)y$ per qualche $y \in R_M$, dunque $x - y \in \ker(\mathbb{I} - A) \subset K_{M-1}$, ma inoltre $x - y \in R_{M-1} + R_M = R_{M-1} \subset R_N$ e $x - y \neq 0$ perché $y \in R_M \not\ni x$.

Passo 5 $X = K_N \oplus R_N$: per ogni $x \in X$ avrò $(\mathbb{I} - A)^N x \in R_N = (\mathbb{I} - A)^N R_N$, dunque esisterà $y \in R_N$ per cui $(\mathbb{I} - A)^N y = (\mathbb{I} - A)^N x$, quindi $x - y \in K_N$ e posso scrivere $x = x - y + y \in K_N + R_N$; la somma è diretta grazie al Passo 3.

Passo 6 Le restrizioni a K_N e R_N sono rispettivamente nilpotenti e invertibili: innanzi tutto, per definizione abbiamo $(\mathbb{I} - A)K_N \subset K_{N-1} \subset K_N$ e $(\mathbb{I} - A)R_N \subset R_{N+1} \subset R_N$ e inoltre $(\mathbb{I} - A)^N|_{K_N} = 0$, quindi $(\mathbb{I} - A)|_{K_N}$ è nilpotente; essendo poi $R_N = R_{N+1} = (\mathbb{I} - A)R_N$, $(\mathbb{I} - A)|_{R_N}$ è suriettiva; infine, se $(\mathbb{I} - A)y = 0$ per $y \in R_N = R_{2N-1}$ allora $y = (\mathbb{I} - A)^{N-1}x$ per $x \in R_N$, cioè $(\mathbb{I} - A)^N x = 0$, ma essendo $K_N \cap R_N = \{0\}$, dunque $y = 0$; quindi $(\mathbb{I} - A)|_{R_N}$ è anche iniettiva, ed essendo R_N chiuso è invertibile.

3. Se $\mathbb{I} - A$ è iniettivo, allora $K_1 = \cdots = K_n = \cdots = \{0\}$, dunque $N = 1$ e $X = K_1 \oplus R_1 = R_1 = (I - A)X$, cioè $\mathbb{I} - A$ è anche suriettivo; viceversa, se $\mathbb{I} - A$ è suriettivo, allora $R_1 = \cdots = R_N = \cdots = X$, dunque avremo $X = K_N \oplus R_N = K_N \oplus X$, quindi $\{0\} = K_N \supset \ker(\mathbb{I} - A)$ e cioè $I - A$ è iniettivo.

□

Come conseguenza di questo importante teorema, deduciamo un'interessante analogia con gli operatori finito-dimensionali, che ricorda il Teorema di Rouché-Capelli.

Corollario.
Se l'Alternativa di Fredholm vale con $N = 1$ *e* $K_1 = \{0\}$*, l'equazione* $(\mathbb{I} - A)x = y$ *avrà un'unica soluzione per ogni* y*.*
Altrimenti, $(\mathbb{I} - A)x = y$ *non avrà soluzioni se* $y \notin R_1$*, mentre se* $y \in R_1$ *le soluzioni saranno infinite e formeranno uno spazio affine di dimensione* $\dim K_1$*.*

Esempio.
In dimensione finita, ogni operatore $A : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$ *può essere rappresentato, rispetto a un'opportuna base, in forma canonica di Jordan: scriverò* $\mathbb{C}^M = \mathbb{C}^{M_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{M_J}$*, e su ciascun* $\mathbb{C}^{M_j}$ *abbiamo*

$$A|_{\mathbb{C}^{M_j}} : \left(x_{j,1}, \ldots, x_{j,M_j}\right) \to \left(\lambda_j x_{j,1} + x_{j,2}, \ldots, \lambda_j x_{j,M_j-1} + x_{j,M_j}, \lambda_j x_{j,M_j}\right),$$

con $M_j \geq 1$ *e* λ_j *non necessariamente distinti. Se* $\lambda_j \neq 1$ *per ogni* j *allora* $\mathbb{I} - A$ *è invertibile e l'alternativa di Fredholm vale con* $N = 1$ *e* $K_1 = \{0\}, R_1 = \mathbb{C}^M$*; se invece ad esempio* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_I = 1$ *per qualche* $I \geq 1$*, avremo* $N = \max\{M_1, \ldots, M_I\}$*,* $K_N = \mathbb{C}^{M_1} \times \ldots \mathbb{C}^{M_I}$ *e* $R_N = \mathbb{C}^{M_{I+1}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{M_J}$*.*

Teorema (spettrale per operatori compatti)**.**
Sia X *uno spazio di Banach complesso tale che* $\dim X = +\infty$ *e* $A \in \mathcal{K}(X)$*. Allora:*

1. $0 \in \sigma(A)$*;*
2. *Se* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *allora è un autovalore;*
3. *Per ogni* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *esiste un'unica coppia* $K(\lambda), R(\lambda) \lhd X$ *tali che* $X = K(\lambda) \oplus R(\lambda)$ *e*
$$(A - \lambda\mathbb{I})|_{R(\lambda)} : R(\lambda) \to R(\lambda) \qquad\qquad (A - \lambda\mathbb{I})|_{K(\lambda)} : K(\lambda) \to K(\lambda)$$
sono rispettivamente invertibile e nilpotente, inoltre $\dim K(\lambda) < +\infty$*,* $\dim \dfrac{X}{R(\lambda)} < +\infty$*;*
4. $K(\lambda) \subset \ker(A - \lambda\mathbb{I})$ *e* $R(\lambda) \supset \operatorname{ran}(A - \lambda\mathbb{I})$*;*
5. $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *è discreto e in particolare* $\sigma(A)$ *è numerabile;*
6. *Se* $\lambda, \mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *e* $\lambda \neq \mu$*, allora* $K(\mu) \subset R(\lambda)$*.*

Dimostrazione.

1. Se $0 \notin \sigma(A)$, allora A sarebbe invertibile e dunque $\mathbb{I} = A^{-1} \circ A$ sarebbe un operatore compatto, che è assurdo se $\dim X = +\infty$.
2. Se $\lambda \neq 0$ non è un autovalore, cioè $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo, allora per l'alternativa di Fredholm l'operatore $\mathbb{I} - \dfrac{1}{\lambda}A = -\dfrac{1}{\lambda}(A - \lambda\mathbb{I})$ è iniettivo e anche suriettivo, quindi $A - \lambda\mathbb{I} = -\lambda\left(\mathbb{I} - \dfrac{1}{\lambda}A\right)$ è invertibile e cioè $\lambda \notin \sigma(A)$.
3. Applichiamo l'alternativa di Fredholm all'operatore $\dfrac{A}{\lambda}$ e prendiamo $K(\lambda) = K_N$ e $R(\lambda) = R_N$: come abbiamo visto, le proprietà sono verificate, dunque resta da far vedere che la decomposizione è unica. Supponiamo che K', R' siano altri spazi con le stesse proprietà e scriviamo, per $x \in K'$, $x = y + z \in K(\lambda) + R(\lambda)$, dunque $0 = (A - \lambda\mathbb{I})^N x = (A - \lambda\mathbb{I})^N z$, ma poiché $(A - \lambda\mathbb{I})^N$ è invertibile su $R(\lambda)$ dev'essere $z = 0$ e cioè $x \in K(\lambda)$; invertendo il ruolo di $K(\lambda)$ e K' dimostriamo che vale anche $K(\lambda) \subset K'$ e dunque i due spazi coincidono. Scrivendo poi $R' \ni x = y + z \in K(\lambda) + R(\lambda)$, avremo $(A - \lambda\mathbb{I})^N x = (A - \lambda\mathbb{I})^N z \in R(\lambda)$, quindi $R' = (A - \lambda\mathbb{I})^N R' \subset R(\lambda)$; invertendo, avremo anche $R(\lambda) \subset R'$.
4. Segue dall'Alternativa di Fredholm e dal fatto che $K(\lambda) = \ker\left((A - \lambda\mathbb{I})^N\right), R(\lambda) = \operatorname{ran}\left((A - \lambda\mathbb{I})^N\right)$ per qualche N.

5. Scriviamo $X = K(\lambda) \oplus R(\lambda)$, con $(A-\lambda\mathbb{I})(K(\lambda)) \subset K(\lambda)$ e $(A-\lambda\mathbb{I})(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$, dunque varrà anche $(A-\mu\mathbb{I})(K(\lambda)) \subset K(\lambda)$ e $(A-\mu\mathbb{I})(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$ per ogni $\mu \in \mathbb{C}$; dal punto precedente abbiamo $\lambda \notin \sigma\left(A|_{R(\lambda)}\right)$, dunque essendo lo spettro chiuso avremo anche $\mu \notin \sigma\left(A|_{R(\lambda)}\right)$ se $|\mu-\lambda|$ è sufficiente piccolo. Inoltre abbiamo anche $\mu \notin \sigma\left(A|_{K(\lambda)}\right)$, e dunque $\mu \notin \sigma(A)$, perché su $K(\lambda)$ abbiamo $(A-\lambda\mathbb{I})^N = 0$ e dunque

$$(A-\lambda\mathbb{I}+(\lambda-\mu)\mathbb{I})\left(\frac{1}{\lambda-\mu}\mathbb{I}-\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}(A-\lambda\mathbb{I})+\cdots+\frac{(-1)^{N-1}}{(\lambda-\mu)^N}(A-\lambda\mathbb{I})^{N-1}\right)=\mathbb{I}+\frac{(-1)^N}{(\lambda-\mu)^N}(A-\lambda I)^N=\mathbb{I},$$

cioè $(A-\mu\mathbb{I})|_{K(\lambda)}$ è invertibile.

6. Scrivo, per $x \in K(\mu)$, $x = y+z \in K(\lambda)+R(\lambda)$; iterando il ragionamento del punto precedente, $(A-\mu\mathbb{I})^N(K(\lambda)) \subset K(\lambda)$ e $(A-\mu\mathbb{I})^N(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$, dunque

$$0 = (A-\mu\mathbb{I})^N x = (A-\mu\mathbb{I})^N y + (A-\mu\mathbb{I})^N z \in K(\lambda)+R(\lambda),$$

quindi per l'unicità della scrittura sarà $(A-\mu\mathbb{I})^N y = (A-\mu\mathbb{I})^N z = 0$; ragionando come prima, $(A-\mu\mathbb{I})^N$ sarà invertibile su $K(\lambda)$ e cioè $y = 0$ e quindi $x = z \in R(\lambda)$.

□

Osservazione.
Se $\dim X < +\infty$ *ovviamente* $\sigma(A)$ *può essere un qualsiasi insieme finito e non necessariamente* $0 \in \sigma(A)$.

Esempio.

1. $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *dato da* $Ax(k) = a_k x(k)$, *per una successione infinitesima* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *data, è compatto, come abbiamo già visto. Gli autovalori sono dati da* $\lambda = a_n$ *per* $n \in \mathbb{N}$, *perché* $Ae_n = a_n e_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$; *se* $a_k = 0$ *per qualche* k, $0 \in \sigma_p(A)$, *altrimenti apparterrà allo spettro residuo perché* ran A *è denso in quanto contiene i vettori della base standard; infine, lo spettro non contiene altri punti perché se* $\lambda \neq 0, a_k$ *allora* $(A-\lambda\mathbb{I})$ *ha un inverso dato da* $(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}y(k) = \dfrac{y(k)}{a_k-\lambda}$. *In particolare, se* $a_k = 0$ *per* $k \geq 0$ *allora* $\sigma(A)$ *è finito.*

2. $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *dato da* $(x(1), x(2), x(3), \dots) \to (0, a_1x(1), a_2x(2), \dots)$, *cioè dalla composizione del precedente con lo shift destro, per* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *infinitesima, è compatto in quanto composizione di un operatore compatto con uno continuo; tuttavia non ha autovalori, come si dimostra analogamente al caso dello shift destro. Dunque dovremo avere* $\sigma(A) = \{0\}$ *e, come nel caso dello shift destro, sarà nello spettro residuo perché* $e_1 \notin \overline{\mathrm{ran}\, A}$.

3. $A \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ *dato da* $Af(x) = \displaystyle\int_0^x f$ *è compatto per il Teorema di Ascoli-Arzelà, perché se* $\|f_n\|_\infty \leq C$ *e* $|x-y| \leq \delta$ *allora* $|Af_n(x) - Af_n(y)| \leq C\delta$ *e dunque* $\{Af_n\}$ *ha un'estratta convergente; tuttavia, anche in questo caso non ci sono autovalori e dunque* $\sigma(A) = \{0\}$: *infatti, se* $Af = \lambda f$ *allora* f *è di classe* C^1, *perché* ran $A \subset C^1([0,1])$ *e dunque risolve l'equazione differenziale* $\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$, *che però ha solo la soluzione banale* $f \equiv 0$. $\lambda = 0$ *apparterrà allo spettro residuo, perché* ran $A = \left\{g \in C^1([0,1]) : g(0) = 0\right\}$ *non è denso in* $C([0,1])$; *tuttavia, considerando la restrizione* $\widetilde{A}$ *di* A *a* $X := \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ *otteniamo* ran $\widetilde{A} = \left\{g \in C^1([0,1]) : g(0) = g'(0) = 0\right\}$, *che è denso in* X *(ad esempio perché contiene le funzioni a supporto compatto) e dunque* $0 \in \sigma_c\left(\widetilde{A}\right)$.

4. $A \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ *dato da* $Af(x) = \displaystyle\int_0^x f - \int_0^1\left(\int_0^y f\right)\mathrm{d}y$ *è compatto come nel caso precedente, ma ha per autovalori* $\lambda_n = \dfrac{\imath}{2n\pi}$ *per* $n \in \mathbb{Z}$: *infatti, per questi valori l'equazione differenziale* $\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x) \\ \displaystyle\int_0^1 f = 0 \end{cases}$ *ha soluzioni non banali date, a meno di costanti da* $f(x) = e^{\frac{x}{\lambda_n}}$, *che*

dunque sono autovettori. Quanto a $\lambda = 0$, come prima apparterrà allo spettro residuo perché $\text{ran } A = \left\{ g \in C^1([0,1]) : \int_0^1 g = 0 \right\}$*, ma sarà nello spettro continuo di $\widetilde{A}$, restrizione di A a* $X := \left\{ f \in C([0,1]) : \int_0^1 f = 0 \right\}$.

Studiamo ora un'altra importante classe di operatori lineari: gli operatori autoaggiunti, che hanno alcune importanti proprietà di simmetria.
Così come la teoria spettrale per operatori compatti ha molte analogie con il caso finito-dimensionale, quella per operatori compatti autoaggiunti avrà analogie con gli operatori simmetrici in dimensione finita.

Definizione.
Siano X, Y spazi normati complessi e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.
*L'**operatore aggiunto** di A è $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ definito da $A^*L : x \mapsto L(Ax)$ per ogni $L \in Y^*$, $x \in X$.*

Osservazione.

1. *Si verifica facilmente che A^* è ben definito e unico, è lineare e continuo e $\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*
2. *Se $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$; se poi $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$, allora l'aggiunto $(AC)^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$ di $AC \in \mathcal{L}(X,Z)$ è dato da $(AC)^* = C^*A^*$; se inoltre A è invertibile, lo è anche A^* e $(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$.*
3. *Se X, Y sono riflessivi, allora $A^{**} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ coincide con A attraverso le isometrie canoniche tra $J(X), J(Y)$.*
4. *Se H è uno spazio di Hilbert, l'aggiunto $A^* \in \mathcal{L}(H)$ di $A \in \mathcal{L}(H)$ può essere equivalentemente definito, attraverso l'isometria data dal Teorema di Riesz-Fréchet, dall'uguaglianza $(Ax, y) = (x, A^*y)$ per ogni $x, y \in H$.*

Esempio.

1. *Se $\dim X, \dim Y < +\infty$ è ben noto che la matrice che rappresenta $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ rispetto a due basi ortonormali di X, Y è la trasposta coniugata della matrice che rappresenta $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ rispetto alle basi duali in X^*, Y^*.*
2. *L'operatore aggiunto dell'identità $\mathbb{I} \in \mathcal{L}(X)$ è l'identità $\mathbb{I} \in \mathcal{L}(X^*)$.*
3. *L'operatore aggiunto dello shift destro su ℓ_2 è dato dallo shift sinistro, e viceversa.*
4. *Se $A : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ è dato da $A : f \mapsto fg$, per $g \in L^\infty(\mu)$, allora l'aggiunto $A^* := L^{p'}(\mu) \to L^{p'}(\mu)$, per p' tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, attraverso l'identificazione canonica dei duali, è dato da $A^* : h \mapsto h\overline{g}$.*

Lemma.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso, $A \in \mathcal{L}(H)$ e $A^* \in \mathcal{L}(H)$ il suo aggiunto. Allora,

1. $\ker A^* = (\text{ran } A)^\perp$;
2. $\overline{\text{ran } A^*} = (\ker A)^\perp$;
3. $\sigma(A^*) = \text{conj}(\sigma(A)) := \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}$;
4. $A \in \mathcal{K}(H) \iff A^* \in \mathcal{K}(H)$ *e, in caso affermativo,* $\text{ran } (\mathbb{I} - A^*) = (\ker(\mathbb{I} - A))^\perp$ *e in particolare* $\dim \dfrac{H}{\text{ran } (\mathbb{I} - A^*)} = \dim \ker(\mathbb{I} - A)$.

Dimostrazione.

1. Scrivendo $(Ax, y) = (x, A^*y)$, il membro di sinistra sarà nullo per ogni $x \in H$ se e solo se $y \in (\text{ran } A)^\perp$, mentre il membro di destra lo sarà se e solo se $y \in \ker A^*$, dunque $\ker A^* = (\text{ran } A)^\perp$.

2. Segue scrivendo
$$(\ker A)^\perp = (\ker(A^{**}))^\perp = (\text{ran } (A^*))^{\perp\perp} = \overline{\text{ran } (A^*)}.$$

3. Preso $\lambda \in \mathbb{C}$, se $A - \lambda\mathbb{I}$ è invertibile se e solo se lo è anche $(A - \lambda\mathbb{I})^* = A^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}$, dunque $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$, cioè $\lambda \in \text{conj}(\sigma(A))$.

4. Supponiamo $A \in \mathcal{K}(H)$ e prendiamo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in H; a meno di estratte avremo $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ per qualche $x \in H$. Inoltre, dalla continuità (debole) di A^* avremo $A^*x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} A^*x$, mentre per la compattezza di A la successione $\{AA^*x_n\}$ convergerà fortemente e il suo limite sarà necessariamente AA^*x, dunque
$$\begin{aligned} \|A^*x_n - A^*x\|^2 &= (A^*(x_n - x), A^*(x_n - x)) \\ &= (x_n - x, AA^*(x_n - x)) \\ &\leq \|x_n - x\|\|AA^*(x_n - x)\| \\ &\leq C\|AA^*(x_n - x)\| \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$
e quindi $A^* \in \mathcal{K}(H)$; supponendo invece A^* compatto, lo è anche $A^{**} = A$. Infine, se A^* è compatto allora $\text{ran } (\mathbb{I} - A^*)$ è chiuso e dunque
$$\text{ran } (\mathbb{I} - A^*) = \overline{\text{ran } (\mathbb{I} - A^*)} = \overline{\text{ran } ((\mathbb{I} - A)^*)} = \ker(\mathbb{I} - A)^\perp.$$

□

Definizione.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{L}(H)$.
*A si dice **autoaggiunto** se coincide con il suo aggiunto, cioè $A^* = A$, ovvero $(Ax, y) = (x, Ay)$ per ogni $x, y \in H$.*

Osservazione.

1. *Da un corollario del Teorema del grafico chiuso abbiamo visto che ogni operatore lineare autoaggiunto è sempre continuo.*

2. *Come definizione equivalente possiamo dire che $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto se e solo se $(Ae_\alpha, e_\beta) = (e_\alpha, Ae_\beta)$ per un sistema ortonormale completo $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

Esempio.

1. *Come abbiamo già visto, sono autoaggiunti: gli operatori finito-dimensionali rappresentati, rispetto a una base ortonormale, da una matrice hermitiana; l'identità su un qualsiasi spazio di Hilbert; gli operatori su $L^2(\mu)$ del tipo $Af = fg$ per $g \in L^\infty(\mu)$ a valori reali.*

2. *Un operatore autoaggiunto su $L^2([a, b])$, per $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, è dato dal risolvente A dell'equazione differenziale $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$; la restrizione $\widetilde{A}$ di A a $W_0^{1,2}((a, b))$ è anch'essa autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv)$.*

Proposizione.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto. Allora:

1. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;*

2. *$\sigma_r(A) = \emptyset$;*

3. *Se λ, μ sono autovalori e x, y sono rispettivi autovettori, allora $x \perp y$;*

4. *$\sigma(A) \subset [m, M]$, dove*

$$m := \inf_{x \in H, \|x\|=1} (Ax, x) \qquad\qquad M := \sup_{x \in H, \|x\|=1} (Ax, x).$$

5. *$m, M \in \sigma(A)$ e in particolare $\rho(A) = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$;*

6. *$\|A\| = \rho(A) = \max\{|m|, |M|\}$.*

Dimostrazione.

1. Segue dal Lemma precedente, perché $\sigma(A) = \sigma(A^*) = \mathrm{conj}(\sigma(A))$.

2. Bisognerà far vedere $\lambda \in \sigma(A)$ e $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo allora ran $(A - \lambda\mathbb{I})$ è denso in H: essendo A autoaggiunto, dal punto precedente $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo $(A - \lambda\mathbb{I})^* = A - \lambda\mathbb{I}$, dunque dal lemma precedente otteniamo

$$\ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \ker((A - \lambda\mathbb{I})^*) = (\mathrm{ran}\ (A - \lambda\mathbb{I}))^\perp;$$

dunque, se $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo nella precedente uguaglianza avremo il sottospazio banale $\{0\}$ e cioè ran $(A - \lambda\mathbb{I})$ è denso.

3. Se $Ax = \lambda x$ e $Ay = \mu y$ con $\lambda \neq \mu$ allora $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \overline{\mu}(x, y) = \mu(x, y),$$

dunque $(x, y) = 0$.

4. Innanzi tutto, essendo A autoaggiunto, $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$, dunque è reale e m, M sono ben definiti. Se $\lambda > M$, allora per ogni $x \in X$ abbiamo

$$(\lambda - M)\|x\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 - (Ax, x) = -((A - \lambda\mathbb{I})x, x) \leq \|(A - \lambda\mathbb{I})x\|\|x\|;$$

da ciò segue che $(A - \lambda\mathbb{I})$ è iniettivo. Inoltre, ran $(A - \lambda\mathbb{I})$ è chiuso perché, se $(A - \lambda\mathbb{I})x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y_0$, dalla disuguaglianza precedente abbiamo $\|x_n - x_m\| \leq \dfrac{\|(A - \lambda\mathbb{I})(x_n - x_m)\|}{\lambda - M} \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$ e dunque a meno di estratte $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$ e quindi $y_0 = (A - \lambda\mathbb{I})x_0$. Infine, come nel punto precedente ran $(A - \lambda\mathbb{I})^\perp = \ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}$ e quindi $A - \lambda\mathbb{I}$ è invertibile. Analogamente si dimostra che $(A - \lambda\mathbb{I})$ è invertibile anche per $\lambda < m$ e dunque $\sigma(A) \subset [m, M]$.

5. Prendiamo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica $\|x_n\| = 1$ e $(Ax_n, x_n) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} M$: poiché $(Mz - Az, z) \geq 0$ per ogni $x \in H$, prendendo $z = y - \dfrac{(My - Ay, x_n)}{(Mx_n - Ax_n, x_n)}x_n$ si ottiene, per ogni $y \in H$,

$$0 \leq (Mz - Az, z) = (My - Ay, y) - \frac{|(Mx_n - Ax_n, y)|^2}{(Mx_n - Ax_n, x_n)};$$

prendendo l'estremo superiore tra gli y che verificano $\|y\| \leq 1$ avremo

$$\begin{aligned}
\|Mx_n - Ax_n\|^2 &= \sup_{\|y\|\leq 1} |(Mx_n - Ax_n, y)|^2 \\
&\leq \sup_{\|y\|\leq 1} ((Mx_n - Ax_n, x_n)(My - Ay, y)) \\
&\leq \|M\mathbb{I} - A\|(Mx_n - Ax_n, x_n) \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Se $A - M\mathbb{I}$ fosse invertibile, allora otterremmo la contraddizione $x_n = -(A - M\mathbb{I})^{-1}(Mx_n - Ax_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque dev'essere $M \in \sigma(A)$. Analogamente dimostriamo che $m \in \sigma(A)$, e dunque $\rho(A) = \max\{|m|, |M|\}$.

6. Poiché la disuguaglianza $\rho(A) \leq \|A\|$ è sempre verificata, basterà dimostrare che $\|A\| \leq \max\{|m|, |M|\} =: \mu$. Essendo A autoaggiunto, avremo

$$(A(x \pm y), x \pm y) = (Ax, x) \pm 2\Re(Ax, y) + (Ay, y),$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} 4\Re(Ax, y) &= (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\ &\leq M\|x+y\|^2 - m\|x-y\|^2 \\ &\leq \mu\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ &= 2\mu\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \end{aligned}$$

Scegliendo x tale che $Ax \neq 0$ e $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} Ax$ si ottiene $\|Ax\| \leq \mu\|x\|$; questo è banalmente vero anche quando $Ax = 0$, dunque concludiamo che $\|A\| \leq \mu = \rho(A)$.

□

Corollario.

1. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto e $\sigma(A) = \{0\}$, allora $A = 0$.*

2. *Un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile ha al più un'infinità numerabile di autovalori (anche se $\sigma(A)$ potrebbe non essere numerabile).*

Esempio.
Sia $A \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ dato da $Af(x) = xf(x)$: come abbiamo visto in precedenza, si tratta di un operatore autoaggiunto; tuttavia, non ha alcun autovalore, perché se $xf(x) = \lambda f(x)$ per q.o. x allora $f \equiv 0$. Del resto, poiché

$$\inf_{f \in L^2([0,1]),\, \int_0^1 |f|^2 = 1} \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x = 0 \qquad \sup_{f \in L^2([0,1]),\, \int_0^1 |f|^2 = 1} \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x = 1,$$

allora $\sigma(A) \subset [0,1]$, e in realtà $\sigma(A) = [0,1]$ perché altrimenti per $\lambda \in [0,1]$ dovremmo avere $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda}$, che però non è continuo su $L^2([0,1])$ perché $\frac{1}{x-\lambda} \notin L^\infty([0,1])$. Dunque ogni $\lambda \in [0,1]$ apparterrà allo spettro, e sarà necessariamente nello spettro continuo perché grazie all'ultima proposizione sappiamo che lo spettro residuo è vuoto.

Come ultimo risultato del corso, presentiamo un teorema spettrale per operatori autoaggiunti compatti, che fornisce una famiglia ortogonale di autovalori in modo analogo al caso delle matrici simmetriche.

Teorema (spettrale per operatori autoaggiunti compatti)**.**
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{K}(H)$ autoaggiunto.
Allora, esiste una successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o un insieme finito $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, di valori e una famiglia $\{K(\lambda_n)\}_n$ di corrispondenti sottospazi finito-dimensionali tali che:

1. *$\sigma(A) = \{\lambda_n\}_n \cup \{0\}$;*

2. *$\lambda_n \in \mathbb{R}$ e, se sono infiniti, $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;*

3. *Ogni λ_n è un autovalore e in particolare $A|_{K(\lambda_n)} = \lambda_n\mathbb{I}$, $\forall n$;*

4. *$K(\lambda_n) \perp K(\lambda_m) \perp \ker A$, $\forall n \neq m$;*

5. *$H = \overline{\mathrm{Span}\{K(\lambda_n)\}_n} \oplus \ker A$.*

Dimostrazione.

1. Dal Teorema spettrale per operatori compatti sappiamo che $\sigma(A) \setminus \{0\}$ è al più numerabile e può accumularsi solo in 0; dunque, possiamo scrivere $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ e definire lo spazio finito-dimensionale $K(\lambda_n)$ come nel Teorema spettrale per operatori compatti. Per costruzione abbiamo $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_n$.

2. Poiché, come abbiamo visto, gli autovalori non possono accumularsi se non in 0, dovrà essere $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$; inoltre, essendo A autoaggiunto, avremo $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ e dunque tutti gli autovalori saranno reali.

3. Segue dal fatto che $(A - \lambda_n \mathbb{I})|_{K(\lambda_n)} : K(\lambda_n) \to K(\lambda_n)$ è nilpotente e autoaggiunto: infatti, se $(A - \lambda_n \mathbb{I})^N|_{K(\lambda_n)} \equiv 0$ per $N \geq 2$, allora per ogni $x \in K(\lambda_n)$ vale

   $$\left\|(A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x\right\|^2 = \left((A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x, (A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x\right) = \left(x, (A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-2} (A - \lambda_n \mathbb{I})^N x\right) = 0,$$

   cioè $(A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x = 0$, e iterando otteniamo $(A - \lambda_n \mathbb{I}) x = 0$ per ogni $x \in H$.

4. Se $x \in K(\lambda_n), y \in K(\lambda_m), z \in \ker A$ allora, per quanto appena visto, $Ax = \lambda_n x, Ay = \lambda_m y, Az = 0z$ con $\lambda_n \neq \lambda_m \neq 0$, dunque per la proposizione precedente avremo $x \perp y \perp z$.

5. Sia $E := \overline{\mathrm{Span}\{K(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}} \oplus \ker A$; dunque $A\left(E^\perp\right) \subset E^\perp$, perché se $x \in E^\perp$ e $Ay = \lambda y$ per $\lambda \in \{\lambda_n\}_n \cup \{0\}$ allora $(Ax, y) = (x, Ay) = \overline{\lambda}(x, y) = 0$, quindi argomentando con la linearità e la chiusura si ottiene $Ax \in E^\perp$. Poiché $A|_{E^\perp}$ è compatto e, per costruzione, non ha autovalori, abbiamo $\sigma(A|_{E^\perp}) = 0$, ma dal corollario precedente otteniamo $A|_{E^\perp} \equiv 0$ e cioè $E^\perp \subset \ker A$; poiché $E^\perp \perp \ker A$, allora $E^\perp = \{0\}$ e cioè $E = H$.

□

Corollario.

1. *Se $A \in \mathcal{K}(H)$ è autoaggiunto esiste un sistema ortonormale completo $\{e_\alpha\}_\alpha$ composto solo da autovettori di A, che permette di scrivere l'operatore in forma "diagonale", cioè:*

   $$A : \sum_\alpha (x, e_\alpha) e_a \mapsto \sum_\alpha \lambda_\alpha (x, e_\alpha) e_\alpha;$$

   per ottenerlo sarà sufficiente prendere un sistema ortonormale su ciascun autospazio $K(\lambda_n)$ e sul nucleo di A. Se H è separabile, cioè se il sistema è numerabile, avremo $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, mentre se non lo è avremo $\lambda_\alpha \neq 0$ solo per un infinità numerabile di indici.

2. *Se $0 \neq \lambda \neq \lambda_n$ per $n \in \mathbb{N}$ allora l'equazione $Ax - \lambda x = y$ ha un'unica soluzione per ogni y; se invece $\lambda = \lambda_n$, l'equazione non ha soluzioni per $y \not\perp K(\lambda_n)$, mentre se $y \perp K(\lambda_n)$ le soluzioni sono infinite e sono uno spazio affine finito-dimensionale di dimensione* $\dim(K(\lambda_n))$.

Esempio.

1. *$A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ ha come spettro $\sigma(A) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ e, tolto 0, sono tutti autovalori. In particolare, $K\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{Span}\{e_n\}$ è 1-dimensionale per ogni $\mathbb{R}$, $\ker A = \{0\}$ e una sistema ortonormale completo di autovettori è nato dalla base standard. Più in generale, se $Ax(k) = a_k x(k)$ e $\mathbb{R} \ni a_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, allora $\sigma(A) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$, la base standard forma un sistema ortonormale completo di autovettori ma stavolta $K(a_n)$ potrebbe non essere 1-dimensionale, se $n \mapsto a_n$ non è iniettiva; anche 0 potrebbe essere un autovalore, se $a_n = 0$ per qualche n, e se questo è vero per infiniti n allora* $\dim \ker A = +\infty$.

2. *L'operatore $A \in \mathcal{L}\left(L^2([a, b])\right)$ risolvente dell'equazione differenziale $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$*

   è, come abbiamo già visto, compatto e autoaggiunto; inoltre $\displaystyle\int_a^b (Af)f > 0$ per ogni $f \not\equiv 0$, *dunque* $\sigma(A) \subset [0,+\infty)$ *e* A *è anche iniettivo. Per ogni* λ_n *avremo autovettori* f_n *che risolveranno*

$$\begin{cases} (-pf_n')' + qf_n = \dfrac{f_n}{\lambda_n} & \textit{su } (a,b) \\ f_n(a) = f_n(b) = 0 \end{cases}.$$

Fissata $g \in L^2([a,b])$, *risolvere l'equazione* $(A - \lambda\mathbb{I})f = g$ *equivarrà a*

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = \dfrac{u-g}{\lambda} & \textit{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases};$$

come abbiamo visto, se $\lambda \neq \lambda_n$ *allora per ogni* g *esiste un'unica soluzione; altrimenti, lo sarà se e solo se* $\displaystyle\int_a^b f_n g = 0$ *per ogni* $f_n \in K(\lambda_n)$ *e, in caso affermativo l'equazione* $Af - \lambda f = g$ *sarà risolta anche da* $f + f_n$ *mentre l'equazione differenziale associata sarà risolta anche da* $u + \lambda_n f_n$ *per ogni* $f_n \in K(\lambda_n)$.

Nel caso particolare $p \equiv 1, q \equiv 0$, *la coppia* (λ_n, f_n) *risolverà* $\begin{cases} -f_n'' = \dfrac{f_n}{\lambda_n} & \textit{su } (a,b) \\ f_n(a) = f_n(b) = 0 \end{cases}$, *che ha soluzioni non banali per* $\lambda_n = \left(\dfrac{b-a}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$ *e, dopo aver normalizzato,* $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{b-a}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$, *dunque in particolare tutti gli autospazi sono* 1*-dimensionali. L'equazione* $\begin{cases} -u'' = \dfrac{u-g}{\lambda} & \textit{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ *è sempre risolubile per* $\lambda \neq \left(\dfrac{b-a}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$, *mentre per* $\lambda = \left(\dfrac{b-a}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$ *lo è se e solo se* $\displaystyle\int_a^b g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) \mathrm{d}x = 0$. *Infine, scrivendo ogni* $f \in L^2([a,b])$ *in serie di Fourier rispetto al sistema completo* $\{f_n\}$, *possiamo scrivere*

$$A : \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) \quad \mapsto \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \frac{c_n}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right).$$