AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Lezioni 1-2 (23/02/2021)

L'argomento di questo corso sarà la analisi funzionale, cioè lo studio degli spazi di funzioni.
La maggior parte degli spazi che verranno studiati sono oggetti che gli studenti già conoscono bene dai corsi precedenti, come ad esempio gli spazi L^p o delle funzioni continue, ma qui verranno studiati sotto un punto di vista differente e più generale. In particolare, nello studio di questi spazi verranno utilizzati molti concetti di algebra lineare e di topologia generale, pertanto la conoscenza delle nozioni di base di queste aree sarà essenziale per una buona comprensione del corso.
Un aspetto particolarmente interessante sarà il confronto tra gli spazi finito-dimensionali, già studiati a fondo nei corsi di base, e gli spazi funzionali che introdurremo, che hanno dimensione infinita. Durante tutto il corso saranno frequenti le osservazioni riguardo le proprietà che determinate classi di spazi funzionali condividono con gli spazi di dimensione finita.
Una motivazione per lo studio di questi spazi funzionali è data dalle equazioni differenziali, che con i concetti introdotti in questo corso potranno essere affrontate in modo ben più efficace rispetto a quanto visto nei corsi di base.

Iniziamo a definire gli oggetti di base su cui lavoreremo per tutto il corso.

Definizione.
Sia X uno spazio vettoriale.
*Una **seminorma** su X è una funzione non-negativa $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ che verifichi:*

1. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ *(Disuguaglianza triangolare);*
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$ *(Omogeneità).*

Se inoltre è verificata:

3. $\|x\| > 0 \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}$, *(Positività);*

*allora $\|\cdot\|$ si dice **norma** e $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio normato**. Quando non c'è il rischio di ambiguità scriveremo semplicemente che X è uno spazio normato.*

Osservazione.

1. *Dalla 2., prendendo $\alpha = 0$, si deduce che $\|0\| = 0$ per ogni seminorma $\|\cdot\|$.*
2. *Ogni spazio normato è uno spazio metrico rispetto alla distanza $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ indotta da $\|\cdot\|$.*

Definizione.
Sia X uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ due norme su X.
*$\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ si dicono **equivalenti** se esiste una costante $C > 0$ tale che $\dfrac{\|x\|_1}{C} \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$ per ogni $x \in X$.*

Osservazione.
Se $\dim X < +\infty$, è ben noto che tutte le possibili norme su X sono equivalenti tra di loro.

Definizione.
*Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio di Banach** (o semplicemente Banach) se è uno spazio metrico* <u>*completo*</u> *rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$, cioè se ogni successione di Cauchy è convergente, cioè:*

$$\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0 \qquad \exists\, x \in X : \, x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$$

Osservazione.

1. *Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono due norme equivalenti su X allora le successioni di Cauchy per $\|\cdot\|_1$ e per $\|\cdot\|_2$ sono le stesse, e anche le successioni convergenti per $\|\cdot\|_1$ e per $\|\cdot\|_2$ sono le stesse. Dunque, $(X, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach se e solo se lo è $(X, \|\cdot\|_2)$.*
   In particolare, tutti gli spazi normati finito-dimensionali sono spazi di Banach.

2. *Un sottoinsieme $E \subset X$ di uno spazio di Banach è a sua volta un Banach con la norma indotta $\|\cdot\|$ se e solo se è un suo sottospazio lineare chiuso. Indicheremo i sottospazi lineari chiusi con la notazione $E \lhd X$. Per sottolineare che indichiamo un sottospazio proprio, cioè $E \neq X$, scriveremo $E \underset{\neq}{\lhd} X$.*
   In dimensione infinita non tutti i sottospazi lineari sono chiusi. Un sottospazio lineare non chiuso di uno spazio di Banach è uno spazio normato ma <u>*non*</u> *è un Banach, perché i sottospazi di uno spazio metrico completo sono completi se e solo se sono chiusi.*

Esempio.

1. *Dato uno spazio misura (X, Σ, μ), gli spazi $L^p(\mu)$ sono spazi di Banach per $p \in [1, +\infty]$, con*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty); \qquad \|f\|_\infty := \mathrm{esssup_X}|f|.$$

   Prendendo lo spazio finito $X = \{1, \ldots, N\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ e $\mu = \#$ la misura che conta, otteniamo $\mathbb{R}^N$ con

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^N |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad \|x\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,N} |x(k)|.$$

   Se invece consideriamo la misura che conta su tutti gli interi positivi $X = \mathbb{N}$ otteniamo gli spazi di successioni

$$\begin{aligned} \ell_p &:= \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \, \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}; \\ \ell_\infty &:= \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \, \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

   Affinché $\|\cdot\|_p$ sia una norma, è necessario considerare gli elementi L^p non come funzioni ma come <u>*classi*</u> *di funzioni rispetto alla relazione di uguaglianza μ-quasi ovunque, altrimenti $\|\cdot\|_p$ è solo una seminorma.*

2. *Lo spazio $C^K([a, b])$ delle funzioni con k derivate continue su un intervallo chiuso e limitato è un Banach con la norma*

$$\|f\|_{C^K} := \sum_{k=1}^K \sup_{[a,b]} \left|f^{(k)}\right|.$$

3. *Se $\mu(X) < +\infty$, come ad esempio su un compatto di $\mathbb{R}^N$ con la misura di Lebesgue, è possibile considerare lo spazio normato $(L^p(\mu), \|\cdot\|_q)$ con $q \leq p$, mentre negli spazi di successioni si può considerare $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ per $q \geq p$. Tuttavia, la norma $\|\cdot\|_q$* <u>*non*</u> *è equivalente a $\|\cdot\|_p$ in nessuno dei due casi e gli spazi $(L^p(\mu), \|\cdot\|_q)$ e $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$* <u>*non*</u> *sono completi.*
   Un discorso analogo è valido per lo spazio $\left(C^K([a, b]), \|\cdot\|_{C^L}\right)$ se $L < K$.

Dunque gli oggetti del nostro studio saranno gli spazi normati che, nelle maggior parte dei casi, assumeremo completi e cioè degli spazi di Banach.
Introduciamo ora le applicazioni tra questi spazi che saranno oggetto del nostro studio. Siamo interessati a mappe che conservino sia la struttura di spazio vettoriale che quella di norma, dunque considereremo mappe lineari e continue.
Come vedremo, negli spazi infinito-dimensionali non è ridondante richiedere che una mappa lineare sia continua, perché esistono molti esempi di mappe lineari non continue. Questa è una delle principali differenze tra spazi di dimensione finita e infinita ed emergerà in molti degli argomenti che verranno trattati.

Definizione.
*Una mappa $A : X \to Y$ tra due spazi vettoriali X, Y si dice **lineare** se*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall\, x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per mappe lineari utilizzeremo la notazione Ax per intendere $A(x)$.

Osservazione.

1. *Se $\dim X < +\infty$ è ben noto che allora ogni mappa lineare è continua. Infatti, data una base $\{e_1, \dots, e_N\}$ di X, abbiamo che*

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| &= \left\| A \sum_{k=1}^{N} x(k)e_k - A \sum_{i=1}^{N} y(k)e_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{N} (x(k) - y(k)) Ae_k \right\| \\ &\leq \sup_{k=1,\dots,N} \|Ae_k\| \sum_{k=1}^{N} |x(k) - y(k)| \\ &\leq C\|x - y\|; \end{aligned}$$

   dunque, A è Lipschitz e in particolare continua.

2. *In generale non tutte le mappe lineari tra spazi vettoriali normati sono continue. Prendiamo infatti $X = C^1([0,1])$, $Y = C([0,1])$, entrambi con la norma $\|f\| := \sup_{[0,1]} |f|$, e $A : X \to Y$ data da $(Af)(x) \mapsto f'(x)$: è chiaramente lineare ma non è continua perché la successione $\left\{ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \right\}$ verifica $\|f_n\| \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ma $\|Af_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |\cos(nx)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$*

3. *In generale, anche se una mappa lineare è continua, l'inversa potrebbe non esserlo. Infatti, prendendo X, Y come prima, la mappa $B : Y \to X$ data da $(Bf)(x) = \displaystyle\int_0^x f$ è continua, perché*

$$\|Bf - Bg\|_X \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f - g| = \int_0^1 |f - g| \leq \|f - g\|_Y.$$

   Inoltre B è iniettiva, dunque è invertibile sull'immagine $\widetilde{X} := \{f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = 0\}$; tuttavia, la sua inversa B^{-1} è (la restrizione a $\widetilde{X}$) della mappa A definita in precedenza, che come abbiamo visto non è continua.

Lezioni 3-4-5 (26/02/2021)

Il prossimo risultato caratterizza la continuità delle mappe lineari: la continuità in un punto equivale alla continuità su tutto lo spazio e alla limitatezza del rapporto tra le norme dei vettori e delle loro immagini.

Proposizione.
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati e $A : X \to Y$ lineare.
Allora, le seguenti condizioni si equivalgono:

a. *A è continua;*

b. *$\exists\, x_0 \in X$ tale che A è continua in x_0;*

c. *A è limitata, cioè* $\|A\| := \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty.$

Dimostrazione.

$a \Rightarrow b$ Ovvio.

$b \Rightarrow c$ Siano ε, δ tali che $\|x - x_0\|_X \le \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y \le \varepsilon$. Per ogni $z \in X \setminus \{0\}$ scriviamo

$$Az = \frac{\|z\|_X}{\delta} A\left(\frac{\delta}{\|z\|_X} z\right) = \frac{\|z\|_X}{\delta}\left(A\left(\frac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0\right) - Ax_0\right),$$

e inoltre $\left\|\dfrac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0 - x_0\right\|_X = \delta$, pertanto $\left\|A\left(\dfrac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0\right) - Ax_0\right\|_Y \le \varepsilon$. Dunque,

$$\|Az\|_Y = \frac{\|z\|_X}{\delta}\left\|A\left(\frac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0\right) - Ax_0\right\|_X \le \frac{\varepsilon}{\delta}\|z\|_X,$$

e cioè $\|A\| < \dfrac{\varepsilon}{\delta} < +\infty$.

$c \Rightarrow a$ Se A è limitato, allora per $x, y \in X$ con $x \ne y$ vale

$$\|Ax - Ay\|_Y = \frac{\|Ax - Ay\|_Y}{\|x - y\|_X}\|x - y\|_X \le \|A\|\|x - y\|_X,$$

dunque A è Lipschitz e in particolare continua.

□

Osservazione.
La costante $\|A\|$ è, intuitivamente, il più grande fattore per cui A può dilatare un vettore. Può essere equivalentemente caratterizzata dai seguenti valori:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X < 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Esempio.

1. *Se (X, Σ, μ) è uno spazio misura, consideriamo la mappa $A : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ data dalla moltiplicazione per una data g, ovvero: $(Af)(x) = f(x)g(x)$. Affinché A sia ben definita bisognerà assumere $p \ge q$ e $g \in L^r(\mu)$ con $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.*
   A è ovviamente lineare ed è continua perché, dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene $\|A\| \le \|g\|_r$; in realtà, scegliendo come $f = g|g|^{\frac{r}{p}-1}$ si ottiene $\|A\| = \|g\|_r$

2. *La mappa $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ data da $(Af)(x) = \int_0^x f(t)h(t)\mathrm{d}t$, per $h \in L^1((0,1))$ fissata, è lineare e continua; infatti, si verifica immediatamente che $\|A\| \le \|h\|_1$ e, prendendo $f = \mathrm{segno}(h)$, si ottiene $\|A\| = \|h\|_1$.*

Anche sull'insieme delle mappe lineari continue tra due spazi fissati è possibile definire una struttura di spazio normato.

Proposizione.
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati.
Allora l'insieme delle mappe lineari continue tra X e Y, che indichiamo con

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{A : X \to Y \textit{ lineare e continua}\},$$

è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto date da

$$\begin{aligned}(A+B) : x &\mapsto Ax + Bx \\ (\alpha A) : x &\mapsto \alpha \cdot Ax\end{aligned}$$

e la norma già definita in precedenza $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$.
Inoltre, se Y è uno spazio di Banach, allora anche $\mathcal{L}(X,Y)$ è un Banach.
Quando il codominio $Y = X$ coincide con il dominio di A, indichiamo lo spazio degli operatori continui su X come $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

Dimostrazione.
Si verifica immediatamente che le operazioni di somma e prodotto verificano gli assiomi di spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è una norma.
Mostriamo ora la completezza di $\mathcal{L}(X,Y)$ sotto l'ipotesi che Y sia completo. Se $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy per $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, allora lo è anche $\{A_n x\}$, per ogni $x \in X$, perché $\|A_n x - A_m x\|_Y \le \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \underset{n,m \to +\infty}{\to} 0$: dunque, per la completezza di Y, avrò $A_n x \underset{n \to +\infty}{\to} A(x)$, per qualche $A(x)$. La mappa $x \mapsto A(x)$ é:

- lineare, perché
$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to +\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n \to +\infty} A_n x + \beta \lim_{n \to +\infty} A_n y = \alpha A(x) + \beta A(y);$$

- continua, perché, fissando $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tale che $\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon$ per ogni $n, m \ge N$,
$$\|Ax\|_Y = \lim_{n \to +\infty} \|A_n x\|_Y \le \limsup_{n \to +\infty} \left(\|A_n - A_N\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|A_N\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \right) \|x\|_X \le \left(\varepsilon + \|A_N\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \right) \|x\|_X$$

- il limite della successione $\|A_n\|$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, il che conclude la dimostrazione della completezza, perché, prendendo ε, n, m come prima,
$$\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A_n x - Ax\|_Y = \sup_{\|x\| \le 1} \lim_{m \to +\infty} \|A_n x - A_m x\|_Y \le \limsup_{m \to +\infty} \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon.$$

□

Osservazione.

1. *Se sia* $\dim X$ *che* $\dim Y$ *sono finite, allora anche $\mathcal{L}(X,Y)$ ha dimensione finita pari a* $\dim(\mathcal{L}(X,Y)) = \dim X \cdot \dim Y$.
2. *Dati X, Y, Z spazi normati e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, allora $B \circ A \in L(X,Z)$ verifica la disuguaglianza*
$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \le \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$
In particolare, prendendo $X = Y = Z$ e $A = B$, otteniamo $\left\|A^2\right\| \le \|A\|^2$ e, iterando, $\left\|A^N\right\| \le \|A\|^N$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Introduciamo un concetto fondamentale nell'analisi funzionale, quello di isometria tra due spazi normati: le isometrie mantengono la struttura lineare e quella di norma, dunque due spazi isometrici hanno le stesse proprietà e sono in qualche modo "interscambiabili" dal punto di vista dell'analisi funzionale.

Definizione.
Una mappa lineare $\Phi : X \to Y$ *tra due spazi normati* $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *si dice* ***isometria*** *se* $\|\Phi(x)\|_Y = \|x\|_X$ *per ogni* $x \in X$.
Se inoltre Φ *è suriettiva, si dice che* X *e* Y *sono* ***isometrici****.*

Osservazione.
Dalla definizione segue che ogni isometria Φ *è continua con* $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1$*. Inoltre, le isometrie sono iniettive perché se* $\Phi(x) = 0$ *allora* $\|x\|_X = \|\Phi(x)\|_Y = 0$*.*
Dunque, un'isometria suriettiva è invertibile e la sua inversa è anch'essa un'isometria, e in particolare è continua.

Esempio.

1. *Per ogni intervallo* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *e* $p \in [1, +\infty]$ *un'isometria suriettiva tra* $L^p((0, 1))$ *e* $L^p((a, b))$ *è data da*
$$f(x) \mapsto (b - a)^{\frac{1}{p}} f((b - a)x + a).$$

2. *Un'isometria* <u>*non suriettiva*</u> *da* ℓ_p *in sé, per ogni* $p \in [1, +\infty]$*, è data da*
$$(x(1), x(2), x(3), \dots) \mapsto (0, x(1), x(2), \dots).$$

Ci soffermeremo ora su un caso particolare di spazi di mappe lineari continue, quello in cui il codominio è $Y = \mathbb{R}$. Questo spazio dei funzionali lineari continui, detto spazio duale di X, avrà un ruolo fondamentale per lo studio delle proprietà dello stesso X.
Molti spazi duali sono in realtà isometrici ad altri spazi ben noti.

Definizione.
Lo ***spazio duale*** *di uno spazio normato* X *è lo spazio* $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ *dei funzionali lineari continui su* X*.*

Osservazione.
Poiché $\mathbb{R}$ *è completo, dalla proposizione precedente deduciamo che* X^* *è uno spazio di Banach (anche se* X *non è completo).*

Esempio.

1. *In uno spazio misura* σ*-finito il duale di* $L^p(\mu)$*, per* $p \in [1, +\infty)$*, è isometrico a* $L^{p'}(\mu)$*, con* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$*. Un'isometria suriettiva tra i due spazi è data da*
$$\begin{array}{ccc} L^{p'}(\mu) & \longleftrightarrow & (L^p(\mu))^* \\ g & \leftrightarrow & L_g : f \to \displaystyle\int_X fg\,\mathrm{d}\mu \end{array}$$

2. *Se* $K \Subset \mathbb{R}^N$ *è compatto, il duale dello spazio delle funzioni continue* $C(K)$ *è dato dallo spazio di misure con segno* $\mathcal{M}(K)$*, dotato della norma della variazione totale, e un'isometria suriettiva è*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(K) & \longleftrightarrow & (C(K))^* \\ \mu & \leftrightarrow & L_\mu : f \to \displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\mu \end{array}$$

Concentriamoci adesso su una classe di spazi normati che ha una struttura più ricca, data da un prodotto scalare. Su questi spazi sarà possibile estendere con poche difficoltà molti concetti elementari dello spazio euclideo.

Definizione.
Un ***prodotto scalare*** *su uno spazio vettoriale* H *è una mappa* $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ *che verifichi:*

1. $(x, y) = (y, x)$ *per ogni* $x, y \in H$ *(Simmetria);*
2. *Per ogni* $y \in H$ *fissato,* $x \mapsto (x, y)$ *è lineare in* x*, cioè*
$$(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y), \qquad \forall\, x, y, z \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \textit{(Linearità)};$$
3. $(x, x) > 0$ *per ogni* $x \in H \setminus \{0\}$ *(Positività).*

Osservazione.

1. *Dalla* 1 *e dalla* 2 *si deduce che* (x, y) *è lineare anche in* y*, a* x *fissato;*
2. *Da ogni prodotto scalare si può definire una* <u>*norma*</u> *su* H *data da* $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$*;*
3. *Valgono le seguenti formule, ben note nel caso euclideo:*
   - $(x, y) \leq \|x\|\|y\|$ *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz);*
   - $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(Regola del parallelogramma);*
   - *Se* $(x, y) = 0$ *allora* $\|x + y\|^2 = \|x|^2 + \|y\|^2$ *(Teorema di Pitagora);*
   - $(x, y) = \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$ *(Identità di polarizzazione).*

Definizione.
Uno spazio vettoriale con prodotto scalare H *si dice* ***spazio di Hilbert*** *(o semplicemente Hilbert) se è uno spazio di Banach rispetto alla norma* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ *indotta dal prodotto scalare.*

Esempio.

1. *Gli spazi* $L^2(\mu)$ *sono spazi di Hilbert con il prodotto scalare dato da* $(f, g) := \displaystyle\int_X fg\mathrm{d}\mu$*. In particolare, lo sono* $\mathbb{R}^N$ *con il prodotto scalare* $(x, y) := \displaystyle\sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)$ *e lo spazio* ℓ_2 *delle successioni a quadrato sommabile con* $(x, y) := \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$*.*
2. *Gli spazi* $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *per* $p \neq 2$ *oppure* $C^K([a, b])$ <u>*non*</u> *sono spazi di Hilbert con nessuna scelta di prodotto scalare, perché non vale la regola del parallelogramma per la norma* $\|\cdot\|_p$*.*
3. *Gli spazi* $(L^p(\mu), \|\cdot\|_2)$*, per* $p \neq 2$ *tale che* $L^p(\mu) \subset L^2(\mu)$*, e* $\big(C^K([0, 1]), \|\cdot\|_2\big)$ <u>*non*</u> *sono spazi di Hilbert perché la norma proviene dal prodotto scalare* $(f, g) = \displaystyle\int_X fg\mathrm{d}\mu$*, ma lo spazio non è completo rispetto a questa norma.*

Definizione.
Sia X *uno spazio vettoriale e* $E \subset X$ *un suo sottoinsieme. L'insieme delle combinazioni lineari* <u>*finite*</u> *di elementi di* X *si indica con*
$$\mathrm{Span}(E) := \{c_1 x_1 + \cdots + c_N x_N :\ c_i \in \mathbb{R},\ x_i \in E\}.$$

Osservazione.
Dato $E \subset X$, $\mathrm{Span}(E)$ *è il più piccolo sottospazio lineare contenente* E*, mentre* $\overline{\mathrm{Span}(E)}$ *è il più piccolo sottospazio lineare* <u>*chiuso*</u> *contenente* E*.*

Una prima proprietà fondamentale degli spazi con prodotto scalare è che è possibile definire la nozione di ortogonalità.

Definizione.
Due elementi $x, y \in H$ *di uno spazio vettoriale con prodotto scalare si dicono* ***ortogonali*** *se* $(x, y) = 0$ *e per indicarlo si utilizza la notazione* $x \perp y$*.*
*L'****ortogonale*** *di un sottoinsieme non vuoto* $E \subset H$ *è l'insieme degli elementi di* H *che sono ortogonali a tutti quelli di* M*, ovvero*
$$E^{\perp} := \{x \in H :\ (x, y) = 0 \quad \forall\, y \in E\}.$$

Esempio.

1. *Se* $H = \ell_2$ *e* $E = \{e_1\}$ *contiene il primo vettore della base standard infinito-dimensionale* $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$*, allora l'ortogonale è dato dalle successioni con la prima entrata nulla:*

$$E^\perp = \{x \in \ell_2 : \ x(1) = 0\} = \left\{(0, x(2), x(3), \dots) : \ \sum_{k=2}^{+\infty} x(k)^2 < +\infty \right\}.$$

2. *Se* $H = L^2((-1,1))$ *e*

$$E = \{f \in L^2((-1,1)) : \ f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1,1)\}$$

è dato da tutte le funzioni pari quasi ovunque, allora l'ortogonale è dato dalle funzioni dispari q.o.:

$$E^\perp = \{f \in L^2((-1,1)) : \ f(x) = -f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1,1)\};$$

viceversa, l'ortogonale delle funzioni dispari è dato dallo spazio $E^{\perp\perp} = E$ *delle funzioni pari.*

Lezioni 6-7 (02/03/2021)

Lemma.
Sia H uno spazio con prodotto scalare e $E \subset H$ non vuoto. Allora:

1. $E^\perp \lhd H$;
2. $E^\perp \cap E = \begin{cases} \{0\} & \text{se } 0 \in E \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin E \end{cases}$;
3. *Se* $F \subset E$, *allora* $E^\perp \subset F^\perp$;
4. $E^\perp = \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$, *e in particolare* $E^\perp = \{0\}$ *se* E *è denso in* H;
5. $\overline{\mathrm{Span}(E)} \subset E^{\perp\perp}$.

Dimostrazione.

1. $E^\perp$ è un sottospazio lineare di H perché, presi $x, y \in E^\perp, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $z \in E$, allora $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0$ e dunque $\alpha x + \beta y \in E^\perp$.
   $E^\perp$ inoltre è chiuso perché può essere scritto come
   $$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{x \in H : \ (x, y) = 0\},$$
   che è un'intersezione di chiusi in quanto $x \mapsto (x, y)$ è continua per ogni y fissato.
2. Se $x \in E \cap E^\perp$, allora nella definizione di ortogonale si può prendere $y = x$ e dunque $0 = (x, x) = \|x\|^2$, cioè $x = 0$.
3. Se $x \in E^\perp$, allora $x \perp y$ per ogni $y \in E$, e in particolare è vero prendendo $y \in F$, dunque $x \in F^\perp$.
4. Poiché $E \subset \overline{\mathrm{Span}(E)}$, allora $E^\perp \supset \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$.
   Per mostrare l'altra inclusione, facciamo vedere innanzi tutto che $E^\perp \subset (\mathrm{Span}(E))^\perp$: se $x \in E^\perp$ e $y \in \mathrm{Span}(E)$, allora $y = c_1 y_1 + \cdots + c_N y_N$ con $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_N \in E$, dunque
   $$(x, y) = c_1(x, y_1) + \cdots + c_N(x, y_N) = 0,$$
   cioè $x \in (\mathrm{Span}(E))^\perp$. Per concludere, mostriamo $(\mathrm{Span}(E))^\perp \subset \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$: se $x \in (\mathrm{Span}(E))^\perp$ e $y \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$, allora esiste $y_n \in \mathrm{Span}(E)$ con $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ e dunque
   $$(x, y) = \left(x, \lim_{n\to+\infty} y_n\right) = \lim_{n\to+\infty} (x, y_n) = 0,$$
   cioè $x \in \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$.
5. Per definizione di ortogonale, per ogni $x \in E$, $y \in E^\perp$ vale $(x, y) = (y, x) = 0$, ma allora $x \in E^{\perp\perp}$. Dunque $E \subset E^{\perp\perp}$, ma essendo quest'ultimo un sottospazio chiuso, avremo anche $\overline{\mathrm{Span}(E)} \subset E^{\perp\perp}$.

□

Un'altra caratteristica fondamentale degli spazi di Hilbert è poter definire una proiezione che mappi l'intero spazio su un suo dato sottoinsieme chiuso e convesso (e dunque in particolare per i sottospazi chiusi), con delle speciali proprietà.

Lemma.
Sia H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un suo sottoinsieme chiuso e convesso.
Allora per ogni $x \in H$ esiste un unico $P(x) \in K$ che minimizza la distanza, cioè

$$\|P(x) - x\| = \mathrm{d}(x, K) = \min_{y \in K} \|y - x\|.$$

Inoltre, $P(x)$ verifica:

1. *$(P(x) - x, P(x) - y) \leq 0$ per ogni $y \in K$, ed è l'unico $z \in K$ a verificare $(z - x, z - y) \leq 0$ per ogni $y \in K$;*

2. *$\|P(x) - P(z)\| \leq \|x - z\|$ per ogni $x, z \in H$, e in particolare P è continua.*

*P è detta **proiezione** su K.*

Dimostrazione.
Mostriamo che, fissato $x \in H$, esiste un unico punto in K che minimizza la distanza da x. Sia $\{y_n\}$ una successione minimizzante, cioè $y_n \in K$ e $\|y_n - x\| \underset{n \to +\infty}{\to} d := \mathrm{d}(x, K)$: fissato $\varepsilon > 0$, per $n, m \geq N(\varepsilon)$ avrò $\|y_n - x\|, \|y_m - x\| \leq d + \varepsilon$, inoltre essendo K convesso ho $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in K$ e dunque $\left\| \dfrac{y_n + y_m}{2} - x \right\| \geq d$. Dunque, applicando la regola del parallelogramma a $y_n - x, y_m - x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\
&\leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2 \\
&\leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2;
\end{aligned}$$

essendo ε arbitrario, $\{y_n\}$ è di Cauchy e dunque, per la completezza di H, converge.
Per mostrare l'unicità, supponiamo per assurdo che esistano y_1, y_2 con $y_1 \neq y_2$ e $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = d$. Allora, applicando come prima l'identità del parallelogramma si ottiene:

$$\|y_1 + y_2 - 2x\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - \|y_1 - y_2\|^2 < 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 = 4d^2,$$

cioè $\left\| \dfrac{y_1 + y_2}{2} - x \right\| < d$, che è assurdo. Dunque c'è un unico $P(x)$ di distanza minima.
Fissiamo poi $y \in K$ e utilizziamo il fatto che $P(x)$ minimizza la distanza rispetto a $(1-t)P(x) + ty \in K$, per $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \|P(x) - x\|^2 - \|(1 - t)P(x) + ty - x\|^2 \\
&= \|P(x) - x\|^2 - \big(\| - tP(x) + ty\|^2 + \|P(x) - x\|^2 + 2(-tP(x) + ty, P(x) - x)\big) \\
&= -t^2\|P(x) - y\|^2 + 2t(P(x) - y, P(x) - x).
\end{aligned}$$

Dividendo per $2t$ otteniamo

$$(P(x) - y, P(x) - x) \leq \frac{t}{2}\|P(x) - y\|^2 \underset{t \to 0}{\to} 0.$$

Inoltre, se $z \in K$ verifica $(z - x, z - y) \leq 0$ per ogni $y \in K$, allora scrivendo

$$\begin{aligned}
\|z - x\|^2 - \|y - x\|^2 &= \|z - x\|^2 - \|(z - x) - (z - y)\|^2 \\
&= \|z - x\|^2 - \big(\|z - x\|^2 - 2(z - x, z - y) + \|z - y\|^2\big) \\
&= 2(z - x, z - y) - \|z - y\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

otteniamo $\|z - x\| \leq \|y - x\|$ per ogni $y \in K$, e cioè $z = P(x)$.
Infine, dati $x, z \in H$ sappiamo che

$$(P(x) - x, P(x) - y) \leq 0, \qquad (P(z) - z, P(z) - w) \leq 0, \qquad \forall\, y, w \in C;$$

dunque, prendendo $y = P(z)$, $w = P(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &\geq (P(x) - x, P(x) - P(z)) + (P(z) - z, P(z) - P(x)) \\ &= (P(x) - x - P(z) + z, P(x) - P(z)) \\ &= -(x - z, P(x) - P(z)) + \|P(x) - P(z)\|^2, \end{aligned}$$

cioè $\|P(x)-P(z)\|^2 \leq (x-z, P(x)-P(z)) \leq \|x-z\|\|P(x)-P(z)\|$, e dividendo poi per $\|P(x)-P(z)\|$ la dimostrazione è conclusa. $\square$

Osservazione.
Se la norma di H non proviene da un prodotto scalare, il punto di minima distanza potrebbe non essere unico, e la proiezione potrebbe non essere ben definita.
Prendiamo ad esempio $H = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ e come K la palla unità chiusa

$$K := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| \leq 1\right\}.$$

Il punto $x = (1, 1)$ verifica $\mathrm{d}(x, K) = 1 = \|x - (t, 1 - t)\|$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Esempio.
Se $K = \overline{B_R(x_0)} = \{x \in H : \ \|x - x_0\| \leq R\}$ è una palla chiusa, allora

$$P(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x - x_0\| \leq R \\ x_0 + \dfrac{R}{\|x - x_0\|}(x - x_0) & \text{se } \|x - x_0\| > R \end{cases}.$$

Lezioni 9-10 (12/03/2021)

Teorema (Proiezione su un sottospazio chiuso)**.**
Sia H uno spazio di Hilbert e $E \lhd H$.
Allora esistono $P \in \mathcal{L}(H, E)$, $Q \in \mathcal{L}\left(H, E^{\perp}\right)$ tali che:

1. *$x = Px + Qx$ per ogni $x \in H$;*
2. *Se $x \in E$ allora $Px = x$ e $Qx = 0$;*
3. *Se $x \in E^{\perp}$ allora $Qx = x$ e $Px = 0$;*
4. *Se $E \neq \{0\}$ allora $\|P\|_{\mathcal{L}(H,E)} = 1$, se $E \neq H$ allora $\|Q\|_{\mathcal{L}(H,E^{\perp})} = 1$.*

Dimostrazione.
Definisco $P : H \to E$ come la proiezione su data dal lemma precedente, dato che E è un chiuso convesso, e $Q : x \mapsto x - Px$.
Verifichiamo che P, Q hanno tutte le proprietà richieste. Innanzi tutto, $Qx \in E^{\perp}$: infatti, so che $(Px - x, Px - y) \leq 0$ per ogni $y \in E$, ma essendo E un sottospazio lineare posso scegliere $y = Px + z$ con $z \in E$ e avrò $(Px - x, z) \leq 0$; scegliendo invece $y = Px - z$ avrò $(Px - x, -z) \leq 0$ e cioè $Qx = x - Px \in E^{\perp}$.
Mostriamo la linearità: per ogni $x, y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ scriviamo

$$\alpha P(x) + \alpha Q(x) + \beta P(y) + \beta Q(y) = \alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y),$$

dunque

$$E \ni \alpha P(x) + \beta P(y) - P(\alpha x + \beta y) = \alpha Q(x) + \beta Q(y) - Q(\alpha x + \beta y) \in E^{\perp}.$$

Essendo però $E \cap E^{\perp} = \{0\}$, entrambe le espressioni devono essere nulle, dunque

$$\alpha P(x) + \beta P(y) - P(\alpha x + \beta y) = 0 = Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Q(x) - \beta Q(y),$$

il che mostra la linearità di P, Q.
La continuità segue dal Teorema di Pitagora, perché essendo $Px \perp Qx$ deduciamo $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$, quindi $\|Px\| \leq \|x\|$ e $\|Qx\| \leq \|x\|$.
Restano da dimostrare le quattro proprietà delle proiezioni. La 1 segue dalla costruzione di P; la 2 segue nuovamente dalla definizione e dall'osservazione che una proiezione coincide con l'identità sulla sua immagine. Per la 3 osserviamo che se $x \in E^{\perp}$ allora $E^{\perp} \ni x - Qx = Px \in E$, dunque $Px \in E \cap E^{\perp} = \{0\}$.
Infine, nella dimostrazione della continuità abbiamo già visto che $\|P\| \leq 1, \|Q\| \leq 1$; se $E \neq \{0\}$, allora ogni $x \in E$ verifica $\|Px\| = \|x\|$ e dunque $\|P\| = 1$, e analogamente se $E \neq H$ per $x \in E^{\perp}$ abbiamo $\|Qx\| = \|x\|$ e dunque $\|Q\| = 1$. $\square$

Corollario.
Per ogni sottospazio lineare chiuso $E \lhd H$ possiamo scrivere l'intero spazio come somma diretta $H = E \oplus E^{\perp}$ di E e del suo ortogonale.
In particolare, se $E \lhd H$ allora vale $E = E^{\perp\perp}$, mentre in generale per ogni sottoinsieme $E \subset H$ scriveremo $H = \overline{\mathrm{Span}(E)} \oplus E^{\perp}$ e $\overline{\mathrm{Span}(E)} = E^{\perp\perp}$.

Dimostrazione.
Dal teorema precedente abbiamo che $H = E + E^{\perp}$, ma poiché abbiamo già visto che $E \cap E^{\perp} = \{0\}$ allora la somma è diretta.
Scambiando poi i ruoli di $E, E^{\perp}$ otteniamo che $H = E^{\perp} \oplus E^{\perp\perp}$; avendo già visto che $E \subset E^{\perp\perp}$, dall'uguaglianza $E^{\perp} \oplus E = E^{\perp} \oplus E^{\perp\perp}$ segue che non può essere un sottospazio proprio. Nel caso generale $E \subset H$ basterà ripetere il ragionamento considerando $\overline{\mathrm{Span}(E)}$ al posto di E. $\square$

Esempio.

1. *Se $E = \mathrm{Span}\{x_0\}$ è 1-dimensionale allora $Px = \dfrac{(x, x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$ e $Qx = x - \dfrac{(x, x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$;*

2. Se $E \subset L^2((-1,1))$ è dato dalle funzioni pari q.o. allora

$$(Pf)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}; \qquad (Qf)(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Possiamo ora dimostrare un risultato fondamentale sugli spazi di Hilbert, e cioè l'isomorfismo isometrico tra un Hilbert e il suo duale.

Teorema (di Riesz-Fréchet)**.**
Sia H uno spazio di Hilbert.
Allora H è isometrico al suo duale H^* attraverso un'isometria suriettiva $\Phi : H \to H^*$ data da

$$\begin{array}{ccc} H & \longleftrightarrow & H^* \\ h & \leftrightarrow & L_h : x \to (x,h) \end{array}$$

Dimostrazione.
Costruiamo l'isometria inversa $\Psi : H^* \to H$. Affinché valga l'ultima proprietà che caratterizza l'isometria tra H e H^*, H dovrà soddisfare $Lx = \big(x, \Psi(L)\big)$ per ogni $x \in H$, $L \in H^*$.
Se $L = 0 \in H^*$, pongo $\Psi(L) = 0$. Altrimenti, dato $L \in H^* \setminus \{0\}$, avremo $\ker L \underset{\neq}{\lhd} H$ e dunque esiste $y \in (\ker L)^\perp \setminus \{0\}$; pongo $\Psi(L) = \dfrac{Ly}{\|y\|^2} y$.
Poiché, per ogni $x \in H$, vale

$$L\big((Ly)x - (Lx)y\big) = (Ly)Lx - (Lx)Ly = 0,$$

allora $y \in (\ker L)^\perp$ verifica

$$(x, \Psi(L)) - Lx = \frac{Ly(x,y) - Lx\|y\|^2}{\|y\|^2} = \frac{\big((Ly)x - (Lx)y, y\big)}{\|y\|^2} = 0.$$

Verifichiamo l'unicità: se $Lx = \big(x, \Psi_1(L)\big) = \big(x, \Psi_2(L)\big)$ per ogni $x \in H$, allora $\big(x, \Psi_1(L) - \Psi_2(L)\big) = 0$, in particolare per $x = \Psi_1(L) - \Psi_2(L)$ otteniamo $\|\Psi_1(L) - \Psi_2(L)\|^2 = 0$ e quindi $\Psi_1(L) = \Psi_2(L)$.
Per la linearità, basta scrivere

$$\big(x, \Psi(\alpha L + \beta M)\big) = (\alpha L + \beta M)x = \alpha Lx + \beta Mx = \alpha\big(x, \Psi(L)\big) + \beta\big(x, \Psi(M)\big) = \big(x, \alpha\Psi(L) + \beta\Psi(M)\big).$$

La suriettività segue dal fatto che, per ogni $h \in H$, il funzionale $L_h : x \mapsto (x,h)$ verifica $\Psi(L) = h$.
Infine, Ψ è un'isometria perché per costruzione abbiamo

$$\|\Psi(L)\|_H \le \frac{|Ly|}{\|y\|_H} \le \|L\|_{H^*}; \qquad \|L\|_{H^*} = \sup_{\|x\|_H \le 1} \frac{\big|(x, \Psi(L))\big|}{\|x\|_H} \le \|\Psi(L)\|_H.$$

□

Osservazione.
Il Teorema di Riesz-Frechét è coerente con quanto già visto per gli spazi $L^2(\mu)$, inclusi ℓ_2 e lo spazio euclideo finito-dimensionale.

Studieremo ora un'altra proprietà che rende gli spazi di Hilbert particolarmente interessanti: la possibilità di scrivere un elemento qualsiasi dello spazio come combinazione (eventualmente infinita) di elementi di una base. In particolare, faremo in modo che queste combinazioni si accordino bene con la struttura di prodotto scalare, cioè che siano ortonormali.
Sistemi di questo tipo sono già stati studiati nei corsi di base di algebra lineare nel caso finito-dimensionale, ma anche nel caso delle serie di Fourier costruite a partire dai polinomi trigonometrici.
Vedremo ora che un procedimento simile funziona anche in casi molto più generali.

Definizione.
Un sottoinsieme $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di uno spazio di Hilbert H si dice ***sistema ortonormale*** *se $(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & se\ \alpha = \beta \\ 0 & se\ \alpha \neq \beta \end{cases}$.*

Esempio.

1. *Un sistema ortonormale su $\mathbb{R}^N$, con il prodotto scalare standard, è data dagli elementi della base standard. Analogamente, un sistema ortonormale su ℓ_2 è dato dalla base standard infinito-dimensionale $\{e_n\}$ definita da* $e_n(k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$.
   Più in generale, prendendo un generico spazio misura $(X, \mathcal{P}(X), \#)$), con # misura che conta, un sistema ortonormale per
   $$L^2(\#) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \; f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \text{ e } \sum_{x \in X} f(x)^2 < +\infty \right\}$$
   è dato da $\left\{\chi_{\{x\}}\right\}_{x \in X}$.
2. *Un sistema ortonormale su $L^2((-\pi, \pi))$ è dato da* $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Osservazione.

1. *Data una famiglia $\{e_\alpha\}$ di vettori ortogonali tra loro, un sistema ortonormale sarà dato da $\{e'_\alpha\}$ definito da* $e'_\alpha := \dfrac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|}$.
2. *Più in generale, data una famiglia numerabile di vettori $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ linearmente indipendenti, posso costruire un sistema ortonormale attraverso il procedimento di Gram-Schmidt: innanzi tutto costruisco induttivamente una famiglia di vettori ortogonali $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ data da* $e'_n := e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e_n, e'_i)}{\|e'_i\|^2} e'_i$, *poi trovo il sistema ortonormale ponendo* $e''_n := \dfrac{e'_n}{\|e'_n\|}$.
3. *Ogni sistema ortonormale verifica $\|e_\alpha\| = 1$ e $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$ per ogni $\alpha \neq \beta$; in particolare, ogni sotto-sistema numerabile $\{e_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sarà una successione limitata che, non avendo sotto-successioni di Cauchy, non ha estratte convergenti. Poiché si può sempre costruire un sistema ortonormale di cardinalità infinita con il procedimento di Gram-Schmidt, in ogni Hilbert infinito-dimensionale esistono successioni limitate senza estratte convergenti.*

Definizione.
Sia $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema ortonormale su uno spazio di Hilbert H.
Per ogni $x \in H$ i valori $\{(x, e_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ si dicono ***coefficienti di Fourier*** *di x rispetto al sistema $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*
La serie $\sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ si dice ***serie di Fourier*** *di x relativa a $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

Proposizione (Disuguaglianza di Bessel)**.**
Sia H un Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema ortonormale su H.
Allora, per ogni $x \in H$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$ vale

$$\sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 \leq \|x\|^2.$$

Dimostrazione.
Dall'ortonormalità degli $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_N}$ segue direttamente che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_i \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \left(x, \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right) + \left\| \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{N}(x, e_{\alpha_i})^2 + \sum_{i,j=1}^{N}(x, e_{\alpha_i})\left(x, e_{\alpha_j}\right)\left(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}\right) \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{N}(x, e_{\alpha_i})^2 + \sum_{i=1}^{N}(x, e_{\alpha_i})^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N}(x, e_{\alpha_i})^2.
\end{aligned}
$$

□

Osservazione.

1. *Dalla disuguaglianza di Bessel segue che i coefficienti di Fourier sono diversi da zero per al più un infinità numerabile di elementi; infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$, ci possono essere al più $N\|x\|$ elementi di A per cui $(x, e_\alpha) \geq \frac{1}{N}$. Dunque la serie di Fourier è una somma al più numerabile e quindi può essere sempre definita come limite delle somme parziali.*

2. *La serie di Fourier inoltre è sempre convergente perché, chiamando $\{e_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gli elementi del sistema ortonormale per cui $(x, e_{\alpha_i}) \neq 0$, la successione $x_n := \sum_{i=1}^{n}(x, e_{\alpha_i})e_{\alpha_i}$ delle somme parziali è di Cauchy; infatti, $\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m}(x, e_{\alpha_i})^2 \underset{m,n\to+\infty}{\to} 0$, perché dalla disuguaglianza di Bessel la serie $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_{\alpha_i})^2$ converge.*

Definizione.
*Un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}$ su un Hilbert si dice **completo** se $H = \overline{\mathrm{Span}(\{e_\alpha\})}$.*

Esempio.

1. *Tutti gli esempi di sistemi ortonormali visti in precedenza sono completi.*
   Questo è ovvio nel caso finito-dimensionale e ben noto nel caso delle funzioni trigonometriche.
   Per ℓ_2 è sufficiente osservare che ogni $x = (x(1), x(2), \dots)$ è limite di $x_n = (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, \dots)$ perché $\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|x(k)|^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Analogamente si dimostra la completezza nel caso generico $L^2(\#)$.

2. *Se invece, in uno dei casi precedenti, un sottoinsieme proprio del sistema ortonormale completo, ne otterremo uno non completo, perché ad esempio $e_1 \notin \overline{\mathrm{Span}(\{e_n\}_{n\geq 2})}$*

Lezioni 11-12 (09/03/2021)

Per dimostrare l'esistenza di un sistema ortonormale completo occorre enunciare un risultato fondamentale in logica e teoria degli insiemi, noto come Lemma di Zorn.
Questo risultato è essenziale per dimostrare moltissimi risultati in cui la cardinalità è più che numerabile (e dunque il principio di induzione non è più sufficiente). Utilizzeremo il Lemma di Zorn anche più avanti per dimostrare un altro teorema fondamentale di analisi funzionale.

Lemma (di Zorn)**.**
Sia $(P, \preceq)$ un insieme non vuoto parzialmente ordinato. Se ogni sottoinsieme $Q \subset P$ totalmente ordinato ha un maggiorante (cioè un $m \in P$ tale che $q \preceq m$ per ogni $q \in Q$), allora P ammette un elemento massimale (cioè un $M \in P$ tale che non esistono $p \in P \setminus \{M\}$ tali che $M \preceq p$).

Proposizione.
Ogni spazio di Hilbert H ha un sistema ortonormale completo.

Dimostrazione.
Consideriamo l'insieme

$$P := \{E \subset H : \ E \text{ è un sistema ortonormale di } H\} :$$

è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione, e non è vuoto perché contiene tutti gli insiemi contenenti un solo vettore $\{e\}$ con $\|e\| = 1$.
Prendiamo ora $Q \subset P$ totalmente ordinato e verifichiamo che $E_0 := \bigcup_{E \in Q} E$ è un maggiorante: è esso stesso un sistema ortonormale, perché se $e \in E_0$ allora $e \in E$ per qualche $E \in Q$ e dunque $\|e\| = 1$; inoltre, se $e, f \in E_0$, allora $e \in E$ e $f \in F$ per qualche $E, F \in Q$, ma siccome Q è totalmente ordinato avremo (a meno di scambiare) $E \subset F$ e quindi $e, f \in F$, pertanto essendo F un sistema ortonormale avremo $e \perp f$. Dunque $E_0 \in P$, e poiché per costruzione $E \subset E_0$ per ogni $E \in Q$, E_0 è un maggiorante.
Possiamo dunque applicare il Lemma di Zorn a $(P, \subset)$ e trovare un elemento massimale $\widetilde{E} \in P$. Rimane da dimostrare la completezza di $\widetilde{E}$: se così non fosse, allora $\widetilde{E}^\perp \neq \{0\}$, ma quindi scegliendo $e \in \widetilde{E}^\perp$ con $\|e\| = 1$ avremmo $\widetilde{E} \cup \{e\}$ come sistema ortonormale contenente strettamente $\widetilde{E}$, e dunque ne contraddirebbe la massimalità. $\square$

Definizione.
*Sia X uno spazio topologico. X si dice **separabile** se ha un sottoinsieme denso e numerabile.*

Corollario.
Uno spazio di Hilbert H ha un sistema ortonormale completo al più numerabile $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se e solo se H è separabile.

Dimostrazione.
Se H ha un sistema ortonormale completo numerabile $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, allora l'insieme delle combinazioni lineari razionali di elementi della base

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{c_1 e_1 + \cdots + c_N e_N : \ c_i \in \mathbb{Q}\}$$

è numerabile e denso in H. Viceversa, H ha un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ più che numerabile, allora come abbiamo visto $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$ per $\alpha \neq \beta$, dunque $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\alpha) \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\beta) = \emptyset$: essendoci quindi un infinità più che numerabile di aperti disgiunti, ogni insieme denso dovrà intersecarli tutti e quindi non potrà essere numerabile. $\square$

Esempio.
Lo spazio $L^2(\#)$ con la misura del conteggio è separabile se e solo se lo spazio X è numerabile (visto che X ha la stessa cardinalità di un sistema completo), come ad esempio nel caso di ℓ_2.

Teorema (Caratterizzazione dei sistemi completi)**.**
Sia H uno spazio di Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un suo sistema ortonormale.
Allora si equivalgono:

a. $\{e_\alpha\}$ *è completo;*

b. $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$*;*

c. Per ogni $x \in X$ *vale* $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$*;*

d. Per ogni $x \in X$ *vale* $x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha$ *per qualche* $c_\alpha \in \mathbb{R}$*;*

e. Vale l'uguaglianza di Bessel $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)^2$ *per ogni* $x \in H$*;*

f. Vale l'identità di Parseval $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)(y, e_\alpha)$ *per ogni* $x, y \in H$*.*

Dimostrazione.

$a \iff b$ Segue dal Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso: poiché $H = \overline{\mathrm{Span}\{e_\alpha\}} \oplus \{e_\alpha\}^\perp$, allora $\overline{\mathrm{Span}\{e_\alpha\}} = H$ se e solo se $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$.

$b \Rightarrow c$ Se $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$, allora $y := \sum_{\beta \in A} (x, e_\beta) e_\beta$ verifica, per ogni $\alpha \in A$,

$$(y, e_\alpha) = \left(\sum_{\beta \in A} (x, e_\beta) e_\beta, e_\alpha \right) = \sum_{\beta \in A} (x, e_\alpha)(e_\beta, e_\alpha) = (x, e_\alpha),$$

dunque $y - x \in \{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$ e cioè $x = y = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$.

$c \Rightarrow b$ Se $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ per ogni x, per $x \in \{e_\alpha\}^\perp$ si ottiene

$$x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha = \sum_{\alpha \in A} 0 = 0,$$

dunque $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$.

$c \Rightarrow d$ Ovvio.

$d \Rightarrow c$ Se $x = \sum_{\beta \in A} c_\beta e_\beta$, allora per ogni $\alpha \in A$ abbiamo

$$(x, e_\alpha) = \sum_{\beta \in A} c_\beta (e_\beta, e_\alpha) = c_\alpha.$$

$c \iff e$ Se $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono gli indici per cui $(x, \alpha_i) \neq 0$ (che già sappiamo essere al più numerabili), allora avremo

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2,$$

come è stato visto nella dimostrazione della disuguaglianza di Bessel; passando al limite per $N \to +\infty$, il termine a sinistra va a zero se e solo se vale c, mentre il termine a destra va a zero se e solo se vale e, pertanto le due affermazioni sono equivalenti.

$f \Rightarrow e$ Basta scegliere $x = y$.

$e \Rightarrow f$ Applicando l'uguaglianza di Bessel per x e y separatamente e poi a $x+y$ si ottiene

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2(x,y) = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)^2+\sum_{\alpha\in A}(y,e_\alpha)^2+2(x,y),\\ \|x+y\|^2 &= \sum_{\alpha\in A}(x+y,e_\alpha)^2 = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)^2+\sum_{\alpha\in A}(y,e_\alpha)^2+2\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)(y,e_\alpha)\end{aligned}$$

da cui f.

□

Osservazione.

1. *In generale, se $\{e_\alpha\}$ non è completo, per ogni x avrò $Px = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_a$, dove P è la proiezione su $E = \overline{\mathrm{Span}(\{e_\alpha\})}$. Infatti, se $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ è un sistema ortonormale completo per $E^\perp$, allora, $\{e_\alpha\}\cup\{f_\beta\}$ è completo su H, dunque $x = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha + \sum_{\beta\in B}(x,f_\beta)f_\beta \in E\oplus E^\perp$, ma essendo la somma diretta dovrà essere $Px = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_a$.*
   Analogamente, l'uguaglianza di Bessel e l'identità di Parseval avranno la forma
   $$\|Px\|^2 = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)^2; \qquad (Px,Py) = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)(y,e_\alpha).$$
2. *La convergenza delle serie di Fourier è solamente rispetto alla norma di H.*
   In particolare, nel caso ben noto delle serie di Fourier trigonometriche, la convergenza è in L^2. Tuttavia, poiché la convergenza in L^2 non implica quella puntuale (se non su una estratta), la convergenza puntuale delle serie di Fourier non segue dal teorema precedente ed è in generale molto delicata da ottenere.

Concludiamo il discorso sugli spazi di Hilbert con un risultato forse sorprendente: ogni spazio di Hilbert è una copia isometrica di un qualche L^2.

Corollario.
Sia H uno spazio di Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un suo sistema ortonormale completo.
Allora, H è isometrico allo spazio

$$L^2(\#) = \left\{ f: A\to\mathbb{R}:\ f(\alpha)\neq 0 \text{ per al più numerabili } \alpha \text{ e } \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)^2 < +\infty \right\},$$

definito sullo spazio misura $(A,\mathcal{P}(A),\#)$.
In particolare, se H è separabile, è isometrico a ℓ_2.

Dimostrazione.
Definiamo l'isometria tra i due spazi come

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Phi} & L^2(\#) \\ x & \mapsto & \Phi(x):\alpha\to(x,e_\alpha). \end{array}$$

La linearità di Φ è immediata, inoltre Φ è un'isometria per l'uguaglianza di Bessel, perché

$$\|\Phi(x)\|_2^2 := \int_A |\Phi(x)|^2 \mathrm{d}\# = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)^2 = \|x\|_H^2;$$

in particolare, Φ è anche continua e iniettiva. Per la suriettività, data $f\in L^2(\#)$ considero $x := \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)e_\alpha$. La somma è ben definita perché sono diversi da zero solo numerabili coefficienti, e inoltre dalla definizione di x si ottiene $(x,e_\alpha) = f(\alpha)$ per ogni α, e dunque $\Phi(x) = f$. □

Lezioni 13-14-15 (12/03/2021)

Torniamo a parlare più in generale di spazi di Banach.
In particolare, ci occuperemo dell'estensione di funzionali lineari e continui definiti su un sottospazio lineare di un dato spazio. Questo procedimento si può compiere facilmente su spazi di Hilbert grazie alla proiezione ortogonale, ma in generale non è così: c'è bisogno di un risultato tra i più importanti dell'analisi funzionale: il Teorema di Hahn-Banach.
Per dimostrare il Teorema di Hahn-Banach introduciamo un'importante classe di funzionali, che condividono alcune proprietà delle norme: i funzionali omogenei e subadditivi.

Definizione.
Sia X uno spazio normato e $p : X \to \mathbb{R}$.
*p si dice **omogeneo** se $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $x \in X$ e $\lambda > 0$.*
*p si dice **subadditivo** se $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in Y$.*

Esempio.
Ogni seminorma, e in particolare ogni norma, è omogenea e subadditiva.

Teorema (di Hahn-Banach)**.**
Sia X uno spazio normato, $p : X \to \mathbb{R}$ omogeneo e subadditivo, $E \subset X$ un sottospazio lineare e $L : E \to \mathbb{R}$ lineare e tale che $Lx \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.
Allora esiste $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{L}x = Lx$ per ogni $x \in E$ e $\widetilde{L}x \leq p(x)$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione.
Applichiamo il Lemma di Zorn all'insieme P delle estensioni di L:

$$P := \left\{ (F, M) : \ F \subset X \text{ sottospazio lineare tale che } E \subset F, \ M : F \to \mathbb{R} \text{ lineare tale che } \begin{cases} Mx = Lx & \forall\, x \in E \\ Mx \leq p(x) & \forall\, x \in F \end{cases} \right\},$$

su cui è definita la relazione

$$(F, M) \preceq (F', M') \quad :\iff \quad F \subset F', \ M'x = Mx \quad \forall\, x \in F.$$

Chiaramente $\preceq$ è una relazione d'ordine e P è non vuoto perché contiene (E, L).
Inoltre, se $Q = \{(F_\alpha, M_\alpha)\}_{\alpha \in A} \subset P$ è totalmente ordinato allora un maggiorante (F_0, M_0) dato da $F_0 := \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ e $M_0 x = M_\alpha x$ per $x \in F_\alpha$; M è ben definita perché Q è totalmente ordinato e inoltre $M_0 \leq p$ perché $M_\alpha \leq p$ per ogni α. Dunque possiamo applicare il Lemma di Zorn.
Esiste quindi un elemento massimale $\left(\widetilde{E}, \widetilde{L}\right) \in P$: per concludere basterà mostrare $\widetilde{E} = X$. Supponiamo per assurdo che non sia così, cioè che esista $x_0 \in X \setminus \widetilde{E}$: allora potrei estendere $\widetilde{L}$ a $\mathrm{Span}\left\{\widetilde{E}, x_0\right\}$ come $\widehat{L}(x + tx_0) = \widetilde{L}x + ct$; se riesco a scegliere c in modo tale che valga $\widehat{L}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$ avrò contraddetto il fatto che $\left(\widetilde{E}, \widetilde{L}\right)$ sia un maggiorante.
Dalla definizione di $\widetilde{L}$ e dall'omogeneità di p, L, la precedente disuguaglianza equivale a:

$$\begin{cases} \widetilde{L}\left(\dfrac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\dfrac{x}{t} + x_0\right) & \forall\, x \in \widetilde{E}, \ t > 0 \\ \widetilde{L}\left(\dfrac{x}{t}\right) + c \geq -p\left(-\dfrac{x}{t} - x_0\right) & \forall\, x \in \widetilde{E}, \ t < 0 \end{cases};$$

essendo $\widetilde{E}$ un sottospazio lineare, c dovrà equivalentemente soddisfare

$$-\widetilde{L}z - p(-z - x_0) \leq c \leq p(y + x_0) - \widetilde{L}y \quad \forall\, y, z \in \widetilde{E},$$

e un c con queste proprietà può essere trovato se e solo se per ogni y, z vale $-\widetilde{L}z - p(-z - x_0) \leq p(y + x_0) - \widetilde{L}y$. Infine, quest'ultima disuguaglianza è vera, e dunque la dimostrazione è conclusa, perché, essendo $\widetilde{L} \leq p$ e p subadditivo,

$$-\widetilde{L}z - p(-z - x_0) - \left(p(y + x_0) - \widetilde{L}y\right) \quad = \quad \widetilde{L}(y - z) - (p(y + x_0) + p(-z - x_0))$$

$$\begin{aligned} &\leq p(y-z) - (p(y+x_0) + p(-z-x_0)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Corollario.
Sia X uno spazio normato, $E \subset X$ un sottospazio lineare e $L \in E^*$.
Allora esiste $\widetilde{L} \in X^*$ tale che $\widetilde{L}x = Lx$ per ogni $x \in E$ e $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*}$.

Dimostrazione.
Basta applicare il Teorema di Hahn-Banach con $p(x) = \|L\|_{E^*}\|x\|$: per la simmetria della norma otterremo che $\left|\widetilde{L}x\right| = \max\left\{\widetilde{L}x, \widetilde{L}(-x)\right\} \leq \|L\|\|x\|$, e cioè $\left\|\widetilde{L}\right\| \leq \|L\|$, ma poiché coincidono su E deve valere l'uguaglianza. $\square$

Osservazione.

1. *Se X è uno spazio di Hilbert, ogni $L \in E^*$ può essere esteso prima su $\overline{E}$ per densità e poi su tutto X come $\widetilde{L}x := L(Px)$, dove $P : X \to \overline{E}$ è la proiezione ortogonale. Come si verifica facilmente, questa è l'unica estensione che verifica $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*}$.*

2. *L'estensione data dal Teorema di Hahn-Banach potrebbe non essere unica.*
Prendiamo infatti $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|$, $E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ e $L : E \to \mathbb{R}$ data da $Lx = x_1$. Allora, ogni estensione $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ del tipo $\widetilde{L}(x_1, x_2) = x_1 + cx_2$, per $c \in [-1, 1]$, verifica $\left\|\widetilde{L}\right\|_{X^*} = \|L\|_{E^*} = 1$.

Il Teorema di Hahn-Banach ha anche molte altre applicazioni in analisi funzionale. Alcune di queste forniscono informazioni importanti sulla struttura degli spazi duali.

Lemma.
Sia X uno spazio normato e $x_0 \in X \setminus \{0\}$.
Allora esiste $L_{x_0} \in X^*$ tale che $\|L_{x_0}\|_{X^*} = 1$ e $L_{x_0}x_0 = \|x_0\|$, dunque in particolare $\|x_0\|_X = \max\limits_{\|L\|_{X^*}=1} |Lx_0|$.
Più in generale, dati un sottospazio lineare $E \subset X$ e $x_0 \in X \setminus E$, esiste $L_{E,x_0} \in X^*$ tale che $\|L_{E,x_0}\|_{X^*} = 1$, $L_{x_0}x = 0$ per ogni $x \in E$ e $L_{E,x_0}x_0 = \mathrm{d}(x_0, E)$.

Dimostrazione.
Basta applicare il Teorema di Hahn-Banach con $E = \mathrm{Span}\{x_0\}$, $L : tx_0 \mapsto t\|x_0\|$ e $p(x) = \|x\|$.
Nel caso generale, applico il Teorema di Hahn-Banach su $\mathrm{Span}\{E, x_0\}$ con $L(x + tx_0) = t\mathrm{d}(x_0, E)$; il funzionale avrà norma 1 perché

$$\|L\|_{E^*} = \sup_{x \in E, t \in \mathbb{R}} \frac{|t|\mathrm{d}(x_0, E)|}{\|x + tx_0\|} = \sup_{x \in E, t \in \mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}(x_0, E)}{\left\|x_0 + \frac{x}{t}\right\|} = \sup_{y \in E} \frac{\mathrm{d}(x_0, E)}{\|x_0 - y\|} = 1.$$

. $\square$

Esempio.

1. *Se $X = L^p(\mu)$ con $1 < p < +\infty$, sappiamo che X^* è una copia isometrica di $L^{p'}(\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e ogni elemento di X^* è del tipo $L : f \mapsto \int_X fg\mathrm{d}\mu$ per qualche $g \in L^{p'}(\mu)$. Per ogni $f \not\equiv 0$ fissata, il funzionale dato dal lemma precedente si ottiene prendendo $g_f = \frac{|f|^{p-2}f}{\|f\|_p^{p-1}}$.*

2. *Se X è uno spazio di Hilbert, abbiamo visto che X^* è isometrico a X e ogni funzionale in X^* è dato da $L : x \mapsto (x, h)$ per qualche $h \in H$. Il funzionale dato dal lemma precedente si ottiene con $h_x = \frac{x}{\|x\|}$.*

Corollario.
Uno spazio normato $X \neq \{0\}$ *non banale ha un duale* $X^* \neq \{0\}$ *non banale.*
Se inoltre $\dim X = +\infty$ *allora* $\dim(X^*) = +\infty$.

Dimostrazione.
Se esiste $x_0 \in X \setminus \{0\}$ allora con il lemma precedente troviamo un funzionale $L_{x_0} \in X$ per cui $L_{x_0} x_0 = \|x_0\| \neq 0$, dunque $L_{x_0} \neq 0$.
Se inoltre $\dim X = +\infty$, allora esiste una successione crescente di sottospazi lineari $E_n \subset X$ tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Dunque, prendendo $x_n \in E_{n+1} \setminus E_n$, dal lemma precedente si può costruire una successione $\{L_n = L_{x_n,E_n}\} \subset X^*$ tali che $L_n|_{E_n} \equiv 0$ ma $L_n|_{E_{n+1}} \not\equiv 0$; questi funzionali dovranno essere linearmente indipendenti, perché L_n è identicamente nullo su E_n mentre non lo è nessun $L \in \mathrm{Span}\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, e quindi X^* ha dimensione infinita. $\square$

Osservazione.
Il corollario precedente non è più vero sugli spazi metrici.
Ad esempio, lo spazio $X = L^p((0,1))$, *per* $p \in (0,1)$ *è uno spazio metrico completo con la distanza* $\mathrm{d}(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f-g|^p$, *ha ovviamente dimensione infinita ed è anche completo, come si può dimostrare analogamente al caso* $p \geq 1$; *tuttavia il suo duale contiene solo il funzionale nullo.*
Supponiamo infatti che esista $L \in X^* \setminus \{0\}$, *dunque esisterà* $f \in X$ *tale che* $Lf \geq 1$. *Consideriamo la mappa* $t \mapsto \mathrm{d}\left(f\chi_{[0,t]}, 0\right) = \displaystyle\int_0^t |f|^p$: *per il teorema di convergenza dominata sarà continua, dunque esisterà* $t_0 \in (0,1)$ *tale che* $g := f\chi_{(0,t_0]}$ *e* $h := f\chi_{(t_0,1)} = f - g$ *verificano* $\mathrm{d}(g,0) = \mathrm{d}(h,0) = \dfrac{\mathrm{d}(f,0)}{2}$, *cioè* $\mathrm{d}(2g,0) = \mathrm{d}(2h,0) = \dfrac{\mathrm{d}(f,0)}{2^{1-p}}$; *inoltre, essendo* $1 \leq Lf = \dfrac{L(2g)}{2} + \dfrac{L(2h)}{2}$, *avrò* $L(2g) \geq 1$ *oppure* $L(2h) \geq 1$. *A questo punto definisco* f_1 *come quella tra* $2g$ *e* $2h$ *che verifica la disuguaglianza e poi itero il procedimento, scrivendo* $f_1 = g_1 + h_1$ *e definendo* $f_2 = 2g_1$ *oppure* $f_2 = 2h_1$: *avrò ottenuto una successione* $\{f_n\}$ *che verifica* $\mathrm{d}(f_n, 0) = \dfrac{\mathrm{d}(f,0)}{2^{n(1-p)}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *e* $Lf_n \geq 1$, *contraddicendo la continuità di* L.

Proposizione (Immersione isometrica nel bi-duale)**.**
Ogni spazio normato X *può essere mappato isometricamente nel suo bi-duale* X^{**} *attraverso la mappa* J *data da:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J} & X^{**} \\ x & \mapsto & \Lambda : L \to Lx \end{array}$$

Dimostrazione.
Si verifica immediatamente che J è lineare. Per mostrare che è un'isometria, notiamo innanzi tutto che

$$\|J(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|L\|_{X^*} \leq 1} |Lx| \leq \sup_{\|L\|_{X^*} \leq 1} \|L\|_{X^*} \|x\|_X = \|x\|;$$

inoltre, fissato $x_0 \in X$, posso prendere L_{x_0} come nel lemma precedente e ottenere $\|J(x_0)\| \geq |L_{x_0} x_0| = \|x_0\|$, pertanto $\|J\|_{\mathcal{L}(X,X^{**})} = \sup\limits_x \dfrac{\|J(x)\|}{\|x\|} \geq 1$ e quindi J è un'isometria. $\square$

Definizione.
Uno spazio di Banach X *si dice* ***riflessivo*** *se l'immersione isometrica nel bi-duale è* <u>*suriettiva*</u>, *cioè se ogni elemento del bi-duale* $\Lambda \in X^{**}$ *è del tipo* $\Lambda : L \mapsto Lx$ *per qualche* $x \in X$.

Osservazione.
Per definizione di norma operatoriale, sappiamo che $\|L\|_{X^*} = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} |Lx|$, *ma non è detto che l'estremo superiore sia raggiunto da qualche* $x \in X$, *mentre dal lemma precedente otteniamo* $\|L\|_{X^*} = \max\limits_{\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1} |\Lambda L|$. *Questo può essere un criterio per la riflessività di uno spazio, perché se* J *è suriettiva, allora il sup in* $\|L\|_{X^*}$ *è sempre raggiunto.*

Esempio.

1. *Gli spazi* $L^p(\mu)$ *per* $p \in (1, +\infty)$ *sono riflessivi e anche tutti gli spazi di Hilbert sono riflessivi.*

2. $X = L^1((0,1))$ *non è riflessivo, perché* X^* *è isometrico a* $L^\infty((0,1))$ *ma* $(L^\infty((0,1)))^*$ *non è isometrico a* $L^1((0,1))$.
   Prendiamo infatti il sottospazio $E = C([0,1]) \subset L^\infty((0,1))$ *e* $L \in E^*$ *dato da* $Lf = f(0)$ *e estendiamolo a* $L^\infty((0,1))$ *con il Teorema di Hahn-Banach: se* $(L^\infty((0,1)))^*$ *fosse una copia isometrica di* $L^1((0,1))$, *allora esisterebbe* $g \in L^1((0,1))$ *tale che per ogni* $f \in C([0,1])$ *valga* $\displaystyle\int_0^1 fg = \widetilde{L}f = Lf = f(0)$, *che è assurdo.*

3. *Anche* ℓ_1 *non è riflessivo, perché* $(\ell_\infty)^*$ *non è isometrico a* ℓ_1.
   Applichiamo infatti il Teorema di Hahn-Banach su

$$c := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ \exists \lim_{k \to +\infty} x(k) \in \mathbb{R} \right\} \subset \ell_\infty$$

   con $L \in c^*$ *dato da* $Lx = \lim_{k \to +\infty} x(k)$. *Supponiamo per assurdo che la sua estensione* $\widetilde{L} \in (\ell_\infty)^*$ *sia tale che* $\widetilde{L}x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$ *per qualche* $y \in \ell_1$; *allora prendendo un elemento della base standard* $x = e_n \in c$ *avremmo*

$$0 = Le_n = \widetilde{L}e_n = y(n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

   cioè $y \equiv 0$ *e cioè* $\widetilde{L} = 0$, *ma questo è assurdo perché ad esempio la successione costante* $x = (1, 1, \dots)$ *verifica* $\widetilde{L}x = Lx = 1$.

4. *Neanche* $C([0,1])$ *è riflessivo. Prendiamo infatti* $L_0 \in X^*$ *definito da* $L_0 f = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f$: *dal lemma precedente sappiamo che esiste* $\Lambda_{L_0} \in X^{**}$ *tale che* $\|\Lambda_{L_0}\| = 1$ *e* $\Lambda_{L_0} L_0 = \|L_0\| = 1$; *se fosse* $\Lambda_{L_0} = J(f)$ *allora esisterebbe* $f \in C([0,1])$ *con* $\sup_{[0,1]} |f| = 1$ *e* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 1$, *che è assurdo.*

Lezioni 16-17 (16/03/2021)

Il Teorema di Hahn-Banach ha altre applicazioni molto importanti in analisi funzionale, legati alle proprietà degli iperpiani e degli insiemi convessi.
Per vederle introduciamo prima una classe di funzionali omogenei e subadditivi che dunque possono essere utilizzati come la funzione p nel Teorema di Hahn-Banach, ruolo che finora è stato giocato dalla norma.

Definizione.
*Sia X uno spazio normato e $K \subset X$ un sottoinsieme convesso contenente $B_\delta(0)$ per qualche $\delta > 0$. Il **funzionale di Minkowski** di K è:*

$$p_K(x) := \inf \left\{ r > 0 : \ \frac{x}{r} \in K \right\}.$$

Esempio.

1. *Se $K = \overline{B_R(0)}$ è una palla chiusa, allora $p_K(x) = \dfrac{\|x\|}{R}$.*
2. *Se $K = \{x \in X : \ Lx \leq \alpha\}$ per qualche $L \in X^*, \alpha > 0$, allora $p_K(x) = \begin{cases} \dfrac{Lx}{\alpha} & \text{se } Lx > 0 \\ 0 & \text{se } Lx \leq 0 \end{cases}$*

Lemma.
Sia X uno spazio normato e $K \subset X$ convesso contenente un intorno di 0. Allora:

1. *p_K è omogeneo e subadditivo;*
2. *Esiste $C > 0$ tale che $p_K(x) \leq C\|x\|$ per ogni $x \in X$, e in particolare è continua;*
3. *Se K' è convesso e $K \subset K'$ allora $p_{K'} \leq p_K$;*
4. *$p_{\mathring{K}} = p_K = p_{\overline{K}}$, inoltre $p_K(x) \leq 1$ se e solo se $x \in \overline{K}$ e $p_K(x) < 1$ se e solo se $x \in \mathring{K}$;*
5. *Se K è <u>bilanciato</u>, cioè $x \in K \iff -x \in K$, allora p_K è una seminorma;*
6. *Se K è bilanciato e limitato allora p_K è una norma, ed è equivalente a $\| \cdot \|$.*

Dimostrazione.

1. Innanzi tutto, $p_K(x) \neq +\infty$ per ogni x: infatti, $p_K(0) = 0$ per definizione; inoltre, se $B_\delta(0) \subset K$, allora $\dfrac{\delta}{2\|x\|}x \in K$ e dunque $p_K(x) \leq \dfrac{2\|x\|}{\delta}$. L'omogeneità segue da:

$$p_K(\lambda x) = \inf \left\{ r > 0 : \ \frac{\lambda x}{r} \in K \right\} = \inf \left\{ r > 0 : \ \frac{x}{\frac{r}{\lambda}} \in K \right\} = \inf \left\{ \lambda s > 0 : \ \frac{x}{s} \in K \right\} = \lambda p_K(x).$$

Mostriamo poi che è subadditivo: dati $x, y \in K, \varepsilon > 0$, trovo r, s tali che $\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{s} \in K$ e $p_K(x) \geq r - \varepsilon, p_K(y) \geq s - \varepsilon$. Essendo K convesso, allora

$$\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in K,$$

dunque dalla definizione di p avremo

$$p_K(x+y) \leq r + s \leq p_K(x) + p_K(y) + 2\varepsilon,$$

ma essendo ε arbitrario abbiamo $p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y)$.

2. Abbiamo visto che $p_K(x) \leq \frac{2\|x\|}{\delta}$ per qualche $\delta > 0$; dunque dalla subadditività segue che, per ogni $x, y \in X$,
$$p_K(x) - p_K(y) \leq p_K(x-y) \leq \frac{2\|x-y\|}{\delta},$$
mentre invertendo x e y si ottiene $p_K(y) - p_K(x) \leq \frac{2\|x-y\|}{\delta}$ e quindi $|p_K(x) - p_K(y)| \leq \frac{2\|x-y\|}{\delta}$, dunque p è Lipschitz e in particolare continua.

3. Poiché $K \subset K'$, allora per ogni $x \in X$ varrà l'inclusione $\left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in K\right\} \subset \left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in K'\right\}$, dunque l'estremo inferiore del secondo insieme sarà minore o uguale a quello del primo, cioè $p_{K'}(x) \leq p_K(x)$.

4. Osserviamo innanzi tutto che, essendo K convesso, $\frac{x}{r} \in \overline{K}$ se e solo se $\frac{x}{s} \in \mathring{K}$ per ogni $s > r$, dunque
$$p_{\overline{K}}(x) = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in \overline{K}\right\} = \inf\left\{s > 0 : \ \frac{x}{s} \in \mathring{K}\right\} = p_{\mathring{K}}(x);$$
essendo poi $\mathring{K} \subset K \subset \overline{K}$, allora dal punto precedente $p_{\mathring{K}}(x) \leq p_K(x) \leq p_{\overline{K}}(x)$, quindi deve valere l'uguaglianza. Inoltre, abbiamo $x \in \mathring{K}$ se e solo se $(1+\varepsilon)x \in K$ per qualche $\varepsilon > 0$, cioè se e solo se $p_K(x) < 1$. Analogamente, $x \in \overline{K}$ se e solo se $(1-\varepsilon)x \in K$ per qualche $\varepsilon > 0$, cioè se e solo se $p_K(x) \leq 1$.

5. Se K è bilanciato, allora
$$p_K(x) = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{x}{r} \in K\right\} = \inf\left\{r > 0 : \ -\frac{x}{r} \in K\right\} = p_K(-x);$$
dunque, per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$ vale $p_K(\lambda x) = p_K(|\lambda|x) = |\lambda|p_K(x)$; inoltre, per costruzione $p_K(x) \geq 0$ per ogni x, dunque p_K verifica tutte le proprietà che caratterizzano le seminorme.

6. Se K è anche limitato, allora $\frac{x}{r} \notin K$ per $r < \frac{\|x\|}{\operatorname{diam}(K)}$ e dunque per $x \neq 0$, $p_K(x) \geq \frac{\|x\|}{\operatorname{diam}(K)} > 0$; avendo già visto che verifica tutte le altre proprietà, p_K è una norma, e poiché già sappiamo $p_K(x) \leq C\|x\|$ allora sarà equivalente a $\|\cdot\|$.

$\square$

Definizione.
*Un sottospazio $H \subset X$ di uno spazio normato si dice **iperpiano chiuso** se esistono $L \in X^* \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che*
$$H = \{L = \alpha\} = \{x \in X : \ Lx = \alpha\}.$$
*Diremo che due sottoinsiemi $A, B \subset X$ sono **separati** dall'iperpiano chiuso $\{L = \alpha\}$ se $\sup_A L \leq \inf_B L$, cioè se*
$$Lx \leq \alpha \quad \forall\, x \in A \qquad\qquad Lx \geq \alpha \quad \forall\, x \in B.$$
*Diremo che $A, B \subset X$ sono **separati strettamente** se $\sup_A L < \inf_B L$, cioè che esiste $\varepsilon > 0$ tale che*
$$Lx \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall\, x \in A \qquad\qquad Lx \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall\, x \in B.$$

Proposizione.
Se X è uno spazio normato e $L : X \to \mathbb{R}$ è lineare, allora $L \in X^*$ se e solo se $\ker L := \{x \in X : Lx = 0\}$ è chiuso in X.
Inoltre, se L non è continua, allora $\ker L$ è denso in X.

Dimostrazione.
Se L è continua allora $\ker L = L^{-1}(\{0\})$ è la preimmagine rispetto a una mappa continua del chiuso $\{0\} \subset \mathbb{R}$, pertanto è chiuso in X.
Se invece L non è continua, allora esiste una successione $\{x_n\}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ e $|Lx_n| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Dunque, per ogni $y \in X$ la successione $y_n := y - \frac{Ly}{Lx_n} x_n$ verifica

$$Ly_n = Ly - \frac{Ly}{Lx_n} Lx_n = 0; \qquad \|y_n - y\| = \left\| -\frac{Ly}{Lx_n} x_n \right\| = \frac{|Ly|}{|Lx_n|} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

quindi $\ker L$ è denso in X, e poiché $L \not\equiv 0$ avremo $\ker L \neq X$, dunque non potrà essere chiuso. □

Lezioni 18-19-20 (19/03/2021)

Lemma.
Sia X uno spazio normato, $K \subset X$ un aperto convesso e $x_0 \in X \setminus K$.
Allora, K e $\{x_0\}$ sono separati.

Dimostrazione.
A meno di traslazioni, possiamo supporre $0 \in K$; essendo K aperto, conterrà un intorno di 0, cosicché il funzionale di Minkowski $p = p_K$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Hahn-Banach, che applicheremo con $E = \mathrm{Span}\{x_0\}$ e $L : tx_0 \mapsto t$.
Verifichiamo innanzi tutto che $L \le p$ su E: poiché $x_0 \notin K$, allora $p(x_0) \ge 1$ e dunque se $t \ge 0$ avremo

$$L(tx_0) = t \le tp(x_0) = p(tx_0),$$

mentre per $t < 0$ abbiamo $L(tx_0) < 0 \le p(tx_0)$. Dunque, dal Teorema di Hahn-Banach otteniamo $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ lineare, e continuo perché dalle proprietà di p otteniamo $\widetilde{L}x \le p(x) \le C\|x\|$; inoltre, se $x \in K$ allora $\widetilde{L}x \le p(x) < 1$, mentre $\widetilde{L}x_0 = Lx_0 = 1$, dunque $\left\{\widetilde{L} = 1\right\}$ separa K e $\{x_0\}$. $\square$

Osservazione.
I due insiemi potrebbero non essere separati in senso stretto, ad esempio se $K = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ e $\|x_0\| = 1$.

Teorema (I forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach)**.**
Sia X uno spazio normato, $A, B \subset X$ convessi disgiunti tali che A è aperto.
Allora A e B sono separati.

Dimostrazione.
Applichiamo il lemma precedente all'insieme

$$K = A - B := \{a - b : \ a \in A, \ b \in B\} :$$

è aperto, perché $K = \bigcup_{x \in B} (A - x)$ è unione di aperti; è anche convesso perché se $k_1 = a_1 - b_1, k_2 = a_2 - b_2 \in K$, con $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, e $t \in [0, 1]$, allora

$$(1 - t)k_1 + tk_2 = (1 - t)a_1 + ta_2 - ((1 - t)b_1 + tb_2) \in A - B = K.$$

Inoltre poiché $A \cap B = \emptyset$, allora $0 \notin K$ e dunque le ipotesi del lemma sono soddisfatte: troviamo quindi $L \in X^*$ tali che $Lx \le L(0) = 0$ per ogni $x \in K$, ovvero $L(a - b) \le 0$ per ogni $a \in A, b \in B$, cioè $La \le Lb$ e pertanto A, B sono separati. $\square$

Teorema (II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach)**.**
Sia X uno spazio normato, $A, B \subset X$ chiusi convessi disgiunti tali che B è compatto.
Allora A e B sono separati strettamente.

Dimostrazione.
Come nella I forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach, $K := A - B$ è un convesso che non contiene l'origine, e in questo caso è anche chiuso: infatti, prendendo $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tali che $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$, per la compattezza di B avremo $b_n \underset{n\to+\infty}{\to} b \in B$ a meno di estratte, dunque $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} x + b \in X$, ma essendo A chiuso, allora $x + b \in A$ e dunque $x = x + b - b \in A - B = K$.
Essendo dunque K chiuso, $B_\delta(0) \notin K$ per qualche $\delta > 0$.
Dunque, per la I forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach, K e $B_\delta(0)$ sono separati e cioè esiste $L \in X^*$ tale che $L(a - b) \le L(\delta x)$ per ogni $a \in A, b \in B, x \in B_1(0)$; facendo l'estremo inferiore in x otteniamo che $L(a - b) \le -\delta\|L\|$, cioè $La + \frac{\delta}{2}\|L\| \le Lb - \frac{\delta}{2}\|L\|$ per ogni $a \in A, b \in B$, e quindi sono separati strettamente. $\square$

Esempio.
Prendendo $X = \mathbb{R}^2$, gli insiemi

$$A := \{(x_1, x_2) \in X : x_2 \leq 0\}, \qquad B := \left\{(x_1, x_2) \in X : \ x_1 > 0, \ x_2 \geq \frac{1}{x_1}\right\},$$

sono chiusi convessi disgiunti, separati dall'iperpiano $H = \{x_2 = 0\}$, ma non sono separati in senso stretto. Tuttavia, nessuno dei due è compatto, e infatti non sono separati in senso stretto.

Corollario.
Sia X uno spazio normato e $E \subset X$ un sottospazio lineare.
Allora, E è denso se e solo se l'unico funzionale $L \in X^*$ che verifica $Lx = 0$ per ogni $x \in E$ è quello nullo.

Dimostrazione.
Supponiamo che E sia denso. Allora per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{x_n\}$ in E tale che $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, dunque se $L|_E \equiv 0$ allora $Lx = \lim\limits_{n\to+\infty} Lx_n = 0$, quindi L è identicamente nullo.
Viceversa supponiamo che E non sia denso, cioè che esista $x_0 \in X \setminus \overline{E}$. Allora, possiamo applicare la II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach con $A = \overline{E}$ e $B = \{x_0\}$ e trovare $L \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $Lx < \alpha < Lx_0$ per ogni $x \in A$. Essendo però A un sottospazio lineare, questo è possibile solo se $Lx = 0$ per ogni $x \in A$, e in particolare per $x \in E$; dunque $Lx_0 > 0$ e quindi $L|_E \equiv 0$ ma $L \not\equiv 0$. $\square$

Come ultima applicazione del Teorema di Hahn-Banach, possiamo definire gli spazi ortogonali su qualsiasi spazio di Banach usando la dualità. Sugli spazi di Hilbert questa ortogonalità coincide con quella già vista attraverso il prodotto scalare, grazie al Teorema di Riesz-Fréchet, ma solo alcune proprietà continuano a valere nel caso generale.

Definizione.
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $E \subset X, F \subset X^*$.
*Definiamo gli **ortogonali** di E, F come, rispettivamente,*

$$E^\perp := \{L \in X^* : \ Lx = 0 \quad \forall\, x \in E\} \qquad F^\perp := \{x \in X : \ Lx = 0 \quad \forall\, L \in F\}$$

Osservazione.
Se X è uno spazio di Hilbert, allora questa definizione coincide con quella data in precedenza, dopo aver identificato X^* con X con l'isometria data dal Teorema di Riesz-Fréchet.

Proposizione.
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $E \subset X, F \subset X^*$. Allora:

1. $E^\perp \lhd X^*$, $F^\perp \lhd X$;
2. *Se* $E \subset E', F \subset F'$ *allora* $E'^\perp \subset E^\perp, F'^\perp \subset F^\perp$;
3. $E^\perp = \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp, F^\perp = \left(\overline{\mathrm{Span}(F)}\right)^\perp$;
4. $\overline{\mathrm{Span}(E)} = E^{\perp\perp}$.
5. $\overline{\mathrm{Span}(F)} \subset F^{\perp\perp}$.

Dimostrazione.
Si dimostra tutto allo stesso modo che negli Hilbert, tranne il fatto che nella *4* l'inclusione non è stretta.
Supponiamo per assurdo che esiste $x_0 \in E^{\perp\perp} \setminus \overline{\mathrm{Span}(E)}$. Per la II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach esiste $L \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $Lx < \alpha < Lx_0$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$; come nella dimostrazione del corollario precedente, per linearità avremo $Lx = 0$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$ e $Lx_0 > 0$, e in particolare $L|_E \equiv 0$ cioè $L \in E^\perp$, ma essendo $x_0 \in E^{\perp\perp}$ dovrà valere $Lx_0 = 0$, in contraddizione con quanto appena visto. $\square$

Osservazione.

1. *Se X è riflessivo, con il ragionamento precedente si dimostra che* $\overline{\mathrm{Span}(F)} = F^{\perp\perp}$.

2. *In generale, se X non è riflessivo, l'inclusione* $\overline{\mathrm{Span}(F)} \subset F^{\perp\perp}$ *può essere stretta.*
Prendiamo infatti $X = \ell_1$ *e* $F = c_0 \subset \ell_\infty = X^*$. *Allora,*
$$F^{\perp} := \left\{ x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k) = 0 \quad \forall\, y \in c_0 \right\} = 0,$$
perché scegliendo $y = e_n$ *otteniamo che ogni* $x \in F^{\perp}$ *verifica* $x(n) = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*; dunque,* $F^{\perp\perp} = 0^{\perp} = X^*$.

I prossimi argomenti del corso sono basati su un importante teorema di topologia generale, che ha grandi applicazioni nell'analisi funzionali perché permette di dimostrare alcuni teoremi fondamentali. Introduciamo gli insiemi di prima categoria, un concetto di "magrezza" in topologia analogo a quello di misura nulla.

Definizione.
Un sottospazio $A \subset X$ *di uno spazio metrico si dice* ***di prima categoria*** *in* X *se è unione numerabile* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *di insiemi la cui chiusura ha interno* $\mathring{\overline{A}}_n = \emptyset$ *vuoto.*
Se A non è di prima categoria in X, A si dice ***di seconda categoria*** *in X.*
Uno spazio metrico di prima (o seconda) categoria in sé si dice semplicemente di prima (o seconda) categoria.

Osservazione.
La definizione di prima e seconda categoria può essere data, più in generale, per spazi topologici, dal momento che utilizza concetti esclusivamente topologici. Tuttavia, poiché considereremo solo spazi metrici, diamo la definizione solo per spazi metrici.

Esempio.

1. $\mathbb{Q}$ *è di prima categoria in sé e dunque è anche di prima categoria in* $\mathbb{R}$, *perché i punti sono chiusi con interno vuoto.*

2. $\mathbb{Z}$ *è di seconda categoria in sé, così come tutti gli spazi discreti, ma è di prima categoria in* $\mathbb{Q}$ *e dunque anche in* $\mathbb{R}$.

3. $L^2((0,1))$ *è di prima categoria in* $L^1((0,1))$. *Infatti,* $L^2((0,1)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *con*
$$A_n := \left\{ f \in L^1((0,1)) : \int_0^1 f^2 \leq n \right\},$$
è unione numerabile di chiusi (gli A_n lo sono per Fatou); inoltre, $\mathring{\overline{A_n}} = \mathring{A}_n = \emptyset$ *perché se* $f \in A_n$ *e* $g \in L^1((0,1)) \setminus L^2((0,1))$ *allora* $f_m := f + \frac{g}{m} \underset{m\to+\infty}{\to} f$ *in* $L^1((0,1))$ *ma* $f_m \notin A_n$.
Per lo stesso motivo, $L^q((0,1))$ *è di prima categoria in* $L^p((0,1))$ *per ogni* $p, q \in [1, +\infty]$ *con* $p < q$.

Il seguente teorema dimostra che gli spazi completi non sono "magri" in topologia.

Teorema (di Baire)**.**
Sia X uno spazio metrico completo.
Allora, per ogni successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di aperti densi, cioè tali che* $\overline{A_n} = X$, *anche l'intersezione è densa, cioè* $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = X$. *Equivalentemente, per ogni successione di chiusi* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di chiusi con interno* $\mathring{C}_n = \emptyset$ *vuoto, anche l'unione ha interno* $\mathring{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n}} = \emptyset$ *vuoto.*
In particolare, ogni spazio metrico completo è di seconda categoria in sé.

Dimostrazione.
Siano $\{A_n\}$ aperti densi e $B \subset X$ un aperto qualsiasi. Per la densità di A_1, $B \cap A_1 \neq \emptyset$ e inoltre, essendo aperto, $\overline{B_{\delta_1}(x_1)} \subset B \cap A_1$ per qualche $x_1 \in B$, $\delta_1 \leq 1$; analogamente, per la densità di A_2, $B_{\delta_1}(x_1) \cap A_2 \neq \emptyset$ e, poiché è aperto, $\overline{B_{\delta_2}(x_2)} \subset B_{\delta_1}(x_1) \cap A_2$ per qualche $x_2 \in B_{\delta_1}(x_1)$ e $\delta_2 \leq \dfrac{1}{2}$. Iterando, trovo $\delta_n \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$ e $x_n \in B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1})$ tali che $\overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_n$. Per costruzione, avremo $\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \delta_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per $m \geq n$, dunque $\{x_n\}$ è di Cauchy e, per completezza, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$; infine,

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

e dunque $B \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, quindi per l'arbitrarietà di B otteniamo che $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ interseca qualsiasi aperto e cioè è denso. $\square$

Osservazione.
Il Teorema di Baire è falso se si toglie l'ipotesi di completezza, come visto nell'esempio precedente con $X = \mathbb{Q}$.

Lezioni 21-22 (23/03/2021)

Il Teorema di Baire ci permette di dimostrare uno dei teoremi più importanti di questo corso. Si tratta di un criterio di uniforme limitatezza per operatori lineari, che permetterà di dedurre la limitatezza (in norma) di una famiglia di operatori a partire dall'ipotesi, apparentemente molto più debole, di limitatezza puntuale.

Teorema (di Banach-Steinhaus)**.**
Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una famiglia di operatori lineari tali che $\sup\limits_{\alpha\in I} \|A_\alpha x\|_Y < +\infty$ per ogni $x \in X$.
Allora, $\sup\limits_{\alpha\in I} \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$.
La stessa conclusione segue assumendo semplicemente che esista $B \subset X$ di seconda categoria tale che $\sup\limits_{\alpha} \|A_\alpha x\|_Y < +\infty$ per $x \in B$.

Dimostrazione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$C_n := \{x \in X : \|A_\alpha x\| \leq n \,\forall\, \alpha \in I\} = \bigcap_{\alpha\in I} \{x \in X : \|A_\alpha x\| \leq n\} :$$

è chiuso, perché intersezione di chiusi, e inoltre per ipotesi

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in X : \sup_{\alpha} \|A_\alpha x\| \leq n\right\} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Dunque, dal Teorema di Baire, non tutti i C_n possono avere aperto vuoto, cioè $B_\delta(x_0) \subset C_{n_0}$ per qualche $x_0 \in X$, $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Dalla definizione di C_n, questo equivale a dire che $\|A_\alpha y\| \leq n_0$ per $y \in B_\delta(x_0)$, ovvero $\|A_\alpha(x_0 + \delta x)\| \leq n_0$ per $x \in B_1(0)$; di conseguenza, avremo $\|A_\alpha x\| \leq \dfrac{n_0 + \|A_\alpha x_0\|}{\delta}$, e cioè

$$\sup_{\alpha} \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{n_0 + \sup_\alpha \|A_\alpha x_0\|}{\delta} < +\infty.$$

Il secondo enunciato segue semplicemente considerando Y al posto di X. □

Osservazione.
Nel Teorema di Banach-Steinhaus la completezza di X è essenziale. Prendiamo infatti $X = c_{00}$ lo spazio delle successioni definitivamente nulle con la norma $\|\cdot\|_\infty$ e, per $n \in \mathbb{N}$, $L_n : X \to \mathbb{R}$ data da $L_n(c_1e_1 + \cdots + c_Ne_N) = nc_n$: è chiaramente lineare e continuo e inoltre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |L_n x| < +\infty$ per ogni $x \in c_{00}$, ma $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{X^*} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n = +\infty$.

Corollario.

1. *Se X è uno spazio di Banach e $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X^*$ sono tali che $\sup\limits_{\alpha} |L_\alpha x| < +\infty$ per ogni $x \in X$, allora $\sup\limits_{\alpha} \|L_\alpha\|_{X^*} < +\infty$.*
2. *Se X è uno spazio normato e $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ sono tali che $\sup\limits_{\alpha} |Lx_\alpha| < +\infty$ per ogni $L \in X^*$, allora $\sup\limits_{\alpha} \|x_\alpha\|_X < +\infty$; in questo caso non è necessario che X sia un Banach perché consideriamo l'immersione isometrica di X in X^{**}, che è un Banach.*

Esempio.

1. *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset H$ è una famiglia di elementi di uno spazio di Hilbert tale che $\sup\limits_{\alpha} |(x_\alpha, y)| < +\infty$ per ogni $y \in H$, allora $\sup\limits_{\alpha} \|x_\alpha\| < +\infty$: basta applicare il Teorema di Banach-Steinhaus alla famiglia $\{L_\alpha\} \subset H^*$ data da $L_\alpha : y \mapsto (x_\alpha, y)$, che verifica $\|L_\alpha\|_{H^*} = \|x_\alpha\|$.*

2. *Se una successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ verifica* $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)\right| < +\infty$ *per ogni $y \in \ell_p$, per $p \in [1, +\infty]$, allora $x \in \ell_{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Consideriamo infatti, per $n \in \mathbb{N}$, il funzionale $L_n \in {\ell_p}^*$ dato da $L_n : y \mapsto \sum_{k=1}^{n} x(k)y(k)$: poiché $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)\right| < +\infty$ per ogni $y \in \ell_p$, allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n y| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} x(k)y(k)\right| < +\infty$. Dunque, dal Teorema di Banach-Steinhaus,*

$$\|x\|_{p'} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{{\ell_p}^*} < +\infty.$$

Osservazione.
Il Teorema di Banach-Steinhaus fornisce un'altra dimostrazione del fatto che $Y := \bigcup_{p>1} L^p((0,1))$ è di prima categoria in $X = L^1((0,1))$. Infatti, la successione $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* data da $L_n f = (\log n) \int_0^{\frac{1}{n}} f$ verifica, grazie alla disuguaglianza di Hölder, $|L_n f| \le \frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{p}}} \|f\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $f \in Y$, e dunque è limitata puntualmente su Y. Tuttavia, $\{L_n\}$ non è limitata in norma perché $\|L_n\|_{X^*} = \log n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$; dunque, $Y \subset X$ non può essere di II categoria perché altrimenti contraddirebbe il Teorema di Banach-Steinhaus.

Proposizione.
Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$ di operatori lineari tra uno spazio di Banach X e uno spazio normato Y tale che $A_n x \underset{n\to+\infty}{\to} A(x)$ per ogni $x \in X$.
Allora, $\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$ e inoltre la mappa limite $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ è lineare e continua con $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Dimostrazione.
Poiché $\{A_n x\}$ converge, è puntualmente limitata per ogni $x \in X$, dunque dal Teorema di Banach-Steinhaus otteniamo che $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è limitato in norma. Quanto alla mappa limite, è lineare perché per ogni $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha x + \beta y) \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Infine, la continuità e l'ultima disuguaglianza seguono da:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1} \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\| = \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|.$$

□

Osservazione.
Nella proposizione precedente può valere la disuguaglianza stretta $\|A\| < \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|$. Infatti, $L_n : \ell_2 \to \mathbb{R}$ definita da $L_n x = x(n)$ verifica $\|L_n\|_{\ell_2^*} = 1$ ma $L_n x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $x \in \ell_2$ e dunque $\|L\| = \|0\| = 0$.

Il Teorema di Banach-Steinhaus permette anche di dedurre un interessante risultato sulla convergenza delle serie di Fourier.

Proposizione.
Siano $C(\mathbb{S}^1)$ lo spazio delle funzioni continue e periodiche su $(-\pi, \pi)$:

$$C(\mathbb{S}^1) := \{f \in C((-\pi,\pi)) : \ f(\pi) = f(-\pi)\}$$

e, per $f \in C(\mathbb{S}^1)$, $S_N f$ la somma parziale della serie di Fourier di f:

$$S_N f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \qquad \begin{cases} a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t, \\ b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t. \end{cases}$$

Allora esiste $f \in C(\mathbb{S}^1)$ per cui $S_N f(0) \underset{N\to+\infty}{\not\to} f(0)$, cioè la serie di Fourier di f non converge.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, utilizzando le proprietà dell'esponenziale complesso, possiamo scrivere

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath nt} \mathrm{d}t \right) e^{\imath nx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{\imath n(x-t)}}_{=:D_N(x-t)} \right) \mathrm{d}t.$$

In particolare, per $x = 0$, avremo $S_N f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(-t)$, dunque $L_N : f \mapsto S_N f(0)$ è un funzionale lineare continuo su $C(\mathbb{S}^1)$.
Supponiamo per assurdo che $S_N f(0)$ converga per ogni $f \in C(\mathbb{S}^1)$; in particolare, $\sup_N \{S_N f(0)\} = \sup_N \{L_N f\} < +\infty$ per ogni f, e dunque per il Teorema di Banach-Steinhaus si avrà $\sup_N \|L_N\|_{C(\mathbb{S}^1)^*} = \sup_N \|D_N\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} < +\infty$. Questo tuttavia è assurdo: utilizzando infatti le proprietà della serie geometrica e dell'esponenziale complesso, possiamo scrivere $D_N(t) = D_N(-t) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$, da cui:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(-t)| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)\right|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} \mathrm{d}t \overset{\left(\left|\sin \frac{t}{2}\right| \leq \frac{|t|}{2}\right)}{\geq} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)\right|}{|t|} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin s|}{|s|} \mathrm{d}s \underset{N\to+\infty}{\to} +$$

□

Osservazione.
Parlando dei sistemi ortonormali sugli spazi di Hilbert, abbiamo visto che $S_N f \underset{N\to+\infty}{\to} f$ in $L^2((-\pi, \pi))$. Questo risultato non è in contraddizione con quanto abbiamo appena visto, perché la convergenza in L^2 non implica quella puntuale, se non a meno di estratte e di insiemi di misura nulla.

Definizione.
*Sia $f \in C(X)$ una funzione continua su uno spazio normato a valori reali. f si dice **Hölderiana** di esponente $\alpha \in (0, 1]$ se esiste $C > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha, \qquad \forall x, y \in X.$$

Lo spazio delle funzioni Hölderiane su X si indica con $C^{0,\alpha}(X)$

Corollario.
Lo spazio delle funzioni Hölderiane

$$\bigcup_{0<\alpha\leq 1} C^{0,\alpha}(\mathbb{S}^1) := \bigcup_{0<\alpha\leq 1} \{f \in C^{0,\alpha}([-\pi, \pi]) : f(\pi) = f(-\pi)\}$$

è di prima categoria in quello delle funzioni continue $C(\mathbb{S}^1)$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, se $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{S}^1)$ per qualche $\alpha > 0$, allora $S_N f(0) \underset{N\to+\infty}{\to} f(0)$, per il Test del Dini,

perché $\frac{|f(t) - f(0)|}{|t|} \leq \frac{C}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$.

Dunque, se lo spazio delle funzioni Hölderiane fosse di seconda categoria, avremmo trovato un insieme $C \subset C\left(\mathbb{S}^1\right)$ di seconda categoria per cui $L_N : f \mapsto S_N f(0)$ verifica $\sup_N |L_N f| < +\infty$ per ogni $f \in B$, e dunque per il Teorema di Baire dovrei avere $\sup_N \|L_N\| < +\infty$ che, come abbiamo visto in precedenza, è falso. $\square$

Lezioni 23-24-25 (26/03/2021)

Utilizzando il Teorema di Baire si può dimostrare anche un altro teorema, che da agli operatori lineari una proprietà importante e con molte applicazioni.

Teorema (della mappa aperta)**.**
Siano X, Y spazi di Banach e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ suriettivo.
Allora, A è aperto, cioè $A(Z) \subset Y$ è aperto per ogni $Z \subset X$ aperto.

Dimostrazione.

Passo 1 Per qualche $\delta > 0$ vale $B_{2\delta}(0) \subset \overline{A(B_1(0))}$. Infatti, per la suriettività di A, possiamo scrivere $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A(B_n(0))}$, che è un'unione numerabile di chiusi; dunque, dal Teorema di Baire, almeno uno avrà interno non vuoto, cioè $B_{4n_0\delta}(ny_0) \subset \overline{A(B_{n_0}(0))}$ per qualche $\delta > 0$, $y_0 \in Y$, ovvero $B_{2\delta}(y_0) \subset \overline{A(B_1(0))}$. Per simmetria avremo anche $B_{2\delta}(-y_0) \subset \overline{A(B_1(0))}$, ma essendo $\overline{A(B_1(0))}$ convesso, conterrà l'inviluppo convesso di $B_{2\delta}(y_0) \cup B_{2\delta}(-y_0)$, e in particolare $B_{2\delta}(0)$.

Passo 2 Vale anche $B_\delta(0) \subset A(B_1(0))$. Fissato $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$, cerco $x \in X$ con $\|x\| < 1$ e $Ax = y$: dal passo precedente, $B_\delta(0) \subset \overline{A\left(B_{\frac{1}{2}}(0)\right)}$, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X$ tale che $\|x_\varepsilon\| < \frac{1}{2}$ e $\|y - Ax_\varepsilon\| < \varepsilon$, e in particolare, trovo x_1 con $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ e $\|y - Ax_1\| < \frac{\delta}{2}$. Inoltre, poiché $y - Ax_1 \in B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset \overline{A\left(B_{\frac{1}{4}}(0)\right)}$, allora come prima posso trovare x_2 con $\|x_2\| < \frac{1}{4}$ e $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\delta}{4}$; iterando, per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo x_n con

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n} \qquad\qquad \|y - A(x_1 + \cdots + x_n)\| \leq \frac{\delta}{2^n}.$$

La successione $\widetilde{x}_n = x_1 + \cdots + x_n$ è di Cauchy, in quanto

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \underset{n,m \to +\infty}{\to} 0$$

e dunque, essendo X completo, convergerà a $x \in X$, mentre per continuità di A abbiamo

$$\|y - Ax\| = \lim_{n \to +\infty} \|y - A\widetilde{x}_n\| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{\delta}{2^n} = 0.$$

Passo 3 Conclusione: per ogni aperto $Z \subset X$, prendo $y_0 = Ax_0 \in A(Z)$ e $r > 0$ tale che $x_0 + B_r(0) \subset Z$; per linearità avremo $y_0 + A(B_r(0)) = A(B_r(x_0)) \subset A(Z)$, ma dal passo precedente sappiamo che, per omogeneità, $B_{\delta r}(0) \subset A(B_r(0))$, e dunque

$$B_{\delta r}(y_0) = y_0 + B_{\delta r}(0) \subset y_0 + A(B_r(0)) \subset A(Z).$$

Pertanto, y_0 è interno a $A(Z)$ e quindi $A(Z)$ è aperto.

□

Osservazione.

1. *Il Teorema della mappa aperta è falso per mappe non lineari: ad esempio $f(x) = x^3 - x$ è continua e suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ma non è aperta perché ad esempio $f((0, +\infty)) = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ non è aperto in $\mathbb{R}$.*

2. *Il Teorema della mappa aperta è falso per qualsiasi mappa lineare non suriettiva, perché $A(X) = \operatorname{ran} A$ non è aperto, ma anzi ha interno vuoto: se per assurdo $B_\delta(y_0) \subset A(X)$ per qualche $\delta > 0, y_0 \in Y$, allora per linearità avrei $B_R(y_0) \subset A(X)$ per ogni $R > 0$, cioè $A(X) = Y$.*

Corollario.

1. *Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ è una mappa* <u>*invertibile*</u> *tra due spazi di Banach X, Y, allora $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ è continua.*

2. *Siano $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ due norme su uno spazio vettoriale X tali che X è completo rispetto a* <u>*entrambe*</u> *le norme. Se esiste $C > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ per ogni $x \in X$, allora esiste $\widetilde{C} > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$ per ogni $x \in X$, ovvero le due norme si equivalgono.*

Dimostrazione.

1. La linearità di A^{-1} è ovvia, dunque basta dimostrare la continuità. Dal Teorema della mappa aperta sappiamo che $B_\delta(0) \subset A(B_1(0))$ per qualche $\delta > 0$, ma essendo A invertibile questo vuol dire $A^{-1}(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$; in altri termini, $\sup_{\|y\| \leq \delta} \left\|A^{-1}y\right\| \leq 1$, ovvero $\left\|A^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{\delta} < +\infty$.

2. Considero la mappa identità su X con le due norme distinte
$$\begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_1) & \xrightarrow{A} & (X, \|\cdot\|_2) \\ x & \rightarrow & x. \end{array}$$
Per ipotesi abbiamo $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$, dunque A è continua; quindi, per il corollario precedente, sarà continua anche la sua inversa
$$\begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_2) & \xrightarrow{A^{-1}} & (X, \|\cdot\|_1) \\ x & \rightarrow & x, \end{array}$$
cioè esisterà $C > 0$ tale che $\|x\|_1 = \left\|A^{-1}x\right\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$.

□

Osservazione.
Nella prima parte del corso abbiamo già visto delle mappe lineari continue con inversa discontinua e anche delle norme per cui valeva una sola delle due disuguaglianze che danno l'equivalenza. Tuttavia, in tutti questi casi, gli spazi non sono completi.

Dal Teorema della mappa aperta si deduce un importante criterio di continuità per mappe lineari.

Teorema (del grafico chiuso)**.**
Sia $A : X \to Y$ una mappa lineare tra due spazi di Banach X, Y tale che il suo grafico
$$G_A := \{(x, y) \in X \times Y : \ y = Ax\}$$
è chiuso in $X \times Y$.
Allora, A è continua.

Dimostrazione.
Per ipotesi, $G_A \lhd X \times Y$ e dunque è uno spazio di Banach con la norma indotta $\|(x, Ax)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$. La proiezione
$$\begin{array}{ccc} G_A & \xrightarrow{\Pi} & X \\ (x, Ax) & \rightarrow & x. \end{array}$$
è una mappa lineare, continua e invertibile; quindi, dal corollario precedente, anche Π^{-1} è continua, cioè esiste $C > 0$ tale che, per ogni $x \in X$,
$$\|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\|_{X \times Y} = \left\|\Pi^{-1}x\right\|_{G_A} \leq C\|x\|_X.$$
Pertanto, $\|Ax\| \leq (C - 1)\|x\|$ e cioè A è continua. □

Osservazione.

1. *L'enunciato del Teorema del grafico chiuso equivale a dire che, se per ogni* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ *che verifica* $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ *vale* $y = Ax$*, allora* A *è continua. In generale, per verificare la continuità di una mappa, bisogna verificare che per ogni successione* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ *valga* $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} Ax$*, non solo per le successioni per cui* Ax_n *converge.*

2. *L'implicazione inversa del Teorema del grafico chiuso è sempre vera, perché se* $F : X \to Y$ *è continua, allora*
$$G_F := \{(x, y) \in X \times Y : \ y - F(x) = 0\}$$
è chiuso in quanto $(x, y) \mapsto y - F(x)$ *è continua.*

3. *Il Teorema del grafico chiuso è falso per mappe non lineari: la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *data da* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *è discontinua ma* G_f *è chiuso.*

4. *Una mappa lineare continua con grafico chiuso può <u>non</u> essere una mappa chiusa, cioè che manda insiemi chiusi in insiemi chiusi, come vedremo spesso in seguito: ad esempio, la mappa* $A : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ *data da* $Af(x) = \int_0^x f$ *non è chiusa, perché* $\operatorname{ran} A = \{f \in C^1([0, 1]) : f(0) = 0\}$ *<u>non</u> è chiuso.*

Corollario.
Se $A : X \to X^*$ *è una mappa lineare tra uno spazio di Banach* X *e il suo duale* X^* *verifica una delle seguenti:*

$$\begin{aligned} (Ax)y = (Ay)x \quad & \forall\, x, y \in X \quad \textit{(Simmetria)} \\ (Ax)x \geq 0 \quad & \forall\, x \in X \quad \textit{(Non negatività)}; \end{aligned}$$

allora A *è continua.*

Dimostrazione.
Supponiamo che A sia simmetrico, e mostriamo la continuità utilizzando il Teorema del grafico chiuso: prendiamo $x_n \in X$ tale che $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \in X$ e $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} L_0 \in X^*$. Allora, per ogni $x \in X$,
$$L_0 x \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} (Ax_n)x = (Ax)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} (Ax)x_0 = (Ax_0)x;$$
dunque $L_0 = Ax_0 \in G_A$ e quindi A è continua.
Supponiamo invece che A sia non-negativo e facciamo vedere che è continuo applicando nuovamente il Teorema del grafico chiuso: se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$ e $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} L_0$, allora per ogni $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq (A(x_n - x_0 - \lambda x))(x_n - x_0 - \lambda x) \underset{n\to+\infty}{\to} (L_0 - Ax_0 - \lambda Ax)(-\lambda x) = -\lambda(L_0 - Ax_0)x + \lambda^2(Ax)x;$$

ovvero $\lambda(L_0 - Ax_0)x \leq \lambda^2(Ax)x$. Dividendo per λ otteniamo

$$\begin{cases} (L_0 - Ax_0)x \leq \lambda(Ax)x \underset{\lambda\to 0^+}{\to} 0 & \text{se } \lambda > 0 \\ (L_0 - Ax_0)x \geq \lambda(Ax)x \underset{\lambda\to 0^-}{\to} 0 & \text{se } \lambda < 0, \end{cases}$$

quindi $L_0 x = (Ax_0)x$ per ogni $x \in X$ e cioè $L_0 = Ax_0$. □

Osservazione.
Alla luce del Teorema di Riesz-Fréchet, il precedente corollario permette di dimostrare la continuità per una mappa lineare $A : H \to H$ *da uno spazio di Hilbert* H *in sé che verifichi*

$$(Ax, y) = (Ay, x) \quad \forall\, x, y \in X \qquad \textit{oppure} \qquad (Ax, x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Applichiamo ora questi risultati per parlare di complementare di un sottospazio lineare chiuso, operazione che abbiamo già visto su spazi di Hilbert e che proveremo a estendere più in generale.

Definizione.
Sia X uno spazio di Banach e $E \lhd X$ un suo sottospazio lineare chiuso.
Un sottospazio lineare chiuso $F \lhd X$ si dice ***complementare*** *di E in X se:*

$$E + F = X \qquad\qquad E \cap F = \{0\}.$$

Se F è un complementare di E, scriveremo $E \oplus F = X$.

Osservazione.

1. *La relazione di complementarietà è simmetrica: E è un complementare di F se e solo se F è un complementare di E.*
2. *Il fatto che E e F siano complementari equivale a richiedere che ogni elemento $x \in X$ si scriva in modo unico come somma $x = y + z$ di un elemento $y \in E$ e di un $z \in F$.*

Esempio.

1. *Se H è uno spazio di Hilbert e $E \lhd H$, allora $E^{\perp}$ è un complementare di E.*
2. *Nello spazio prodotto $X \times Y$ di due spazi di Banach X, Y, un complementare di $X \times \{0\} \lhd X \times Y$ è dato da $\{0\} \times Y$.*
3. *Se c è lo spazio delle successioni $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che hanno limite $\lim_{k \to +\infty} x(k)$ finito, munito della norma $\| \cdot \|_{\ell_\infty}$, e $c_0 \lhd c$ è lo spazio delle successioni infinitesime, allora un complementare di c_0 in c è dato dalle successioni costanti*

$$F := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ x(k) \equiv x_0, \ \forall\, k \in \mathbb{N}\}.$$

Proposizione.
Un sottospazio lineare chiuso $E \lhd X$ di uno spazio di Banach X ha un complementare se e solo se esiste una proiezione suriettiva $P \in \mathcal{L}(X, E)$ tale che $Px = x$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione.
Supponiamo che E abbia un complementare F. Allora, potremo scrivere ogni $x \in X$ in modo unico come $x = x_E + x_F$ con $x_E \in E$, $x_F \in F$; dunque possiamo definire $Px = x_E$. P è lineare perché

$$(\alpha x + \beta y)_E + (\alpha x + \beta y)_F = \alpha x + \beta y = \alpha(x_E + x_F) + \beta(y_E + y_F) = (\alpha x_E + \beta y_E) + (\alpha x_F + \beta y_F),$$

per ogni $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dunque poiché $E \cap F = \{0\}$ avremo

$$(\alpha x + \beta y)_E = \alpha x_E + \beta y_E \qquad\qquad (\alpha x + \beta y)_F = \alpha x_F + \beta y_F.$$

Per dimostrare la continuità usiamo il Teorema del grafico chiuso: se $(x_n, Px_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (x, y) \in X \times E$, allora $F \ni x_n - Px_n \underset{n\to+\infty}{\to} x - y$, ma essendo F chiuso avremo $x - y \in F$; dunque potremo scrivere $x = y + (x - y) = Px + (x - Px) \in E \oplus F$, ma poiché la scrittura è unica dovremo avere $y = Px$, dunque G_P è chiuso e P è continua. Infine, dalla costruzione di P segue che $Px = x$ per $x \in E$ e in particolare P è suriettiva.
Viceversa, supponiamo che esista una proiezione $P \in \mathcal{L}(X, E)$ tale che $P^2 = P$. Allora, pongo

$$F := \operatorname{ran}\,(\mathbb{I} - P) = \{x - Px : \ x \in X\}.$$

Innanzi tutto, F è un sottospazio lineare perché P è lineare; inoltre, $E + F = X$ perché posso scrivere ogni $x \in X$ come $x = Px + x - Px \in E + F$. Mostriamo ora che $E \cap F = \{0\}$: se $z = Px = y - Py \in E \cap F$, allora $P(x + y) = y \in \operatorname{ran} P = E$, dunque $Py = y$ e cioè $z = y - Py = 0$.
Infine, facciamo vedere che F è chiuso: se $y_n = x_n - Px_n \underset{n\to+\infty}{\to} y_0 \in F$, allora

$$y_0 \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} x_n - Px_n = x_n - Px_n + Px_n - P^2 x_n = y_n - Py_n \underset{n\to+\infty}{\to} y_0 - Py_0,$$

dunque $y_0 \in \operatorname{ran}\,(\mathbb{I} - P) = F$ e quindi F è chiuso. $\square$

Osservazione.
Se $E \lhd X$ ha F per complementare e $P \in \mathcal{L}(X, E)$ è la proiezione su E, la proiezione su F (che esiste perché E è un complementare per F) è data da $x \mapsto x - Px$.

Esempio.

1. *Se X è uno spazio di Hilbert, abbiamo già visto che tutti i suoi sottospazi $E \lhd X$ hanno come complementare l'ortogonale ed esiste anche una proiezione.*
2. *Sullo spazio prodotto $X \times Y$ le proiezione su $X \times \{0\}$ e $\{0\} \times Y$ sono date rispettivamente da $P(x, y) = (x, 0)$ e $P(x, y) = (0, y)$.*
3. *Prendendo c, c_0 come prima, la proiezione $P : c \to c_0$ è data da $Px(k) = x(k) - \lim_{j \to +\infty} x(j)$, mentre la proiezione $P : c \to F$ sullo spazio delle successioni costanti è dato da $Px(k) = \lim_{j \to +\infty} x(j)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach e $E \lhd X$ un suo sottospazio finito dimensionale. Allora, E ha un complementare in X.

Dimostrazione.
Sia $\{e_1, \dots, e_N\}$ una base di E e $\{L_1, \dots, L_N\} \subset E^*$ la sua base duale, cioè tale che $L_i e_j = \delta_{ij}$, e siano $\widetilde{L}_1, \dots, \widetilde{L}_N \in X^*$ le rispettive estensioni ottenute con il Teorema di Hahn-Banach; allora, $Px := \left(\widetilde{L}_1 x\right) e_1 + \cdots + \left(\widetilde{L}_N x\right) e_N$ è una proiezione su E: è lineare e continua perché lo sono le $\widetilde{L}_i$, e inoltre se $x = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N$ allora

$$Px = x_1 P e_1 + \cdots + x_N P e_N = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N = x.$$

Dunque, applicando la proposizione precedente, concludiamo che E ha un complementare.

□

Osservazione.
Come abbiamo visto negli spazi di Hilbert, questa condizione non è necessaria per l'esistenza di un complementare.

Esempio.
Nell'esempio precedente con $F \lhd c$ è verificata la seconda condizione, perché $\dim F = 1$.

Lezioni 26-27 (30/03/2021)

Teorema (Continuità degli inversi destro e sinistro)**.**
Siano X, Y spazi di Banach.

1. *Una mappa lineare continua <u>suriettiva</u> $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ha un inverso destro continuo se e solo se $\ker A$ ha un complementare in X.*

2. *Una mappa lineare continua <u>iniettiva</u> $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ha un inverso sinistro continuo se e solo se $\operatorname{ran} A$ è chiuso e ha un complementare in Y.*

Dimostrazione.

1. Supponiamo che esista un inverso destro $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ di A tale che $A \circ B = \mathbb{I}_Y$. Allora, $\operatorname{ran} B$ è un complementare di $\ker A$: ovviamente è un sottospazio lineare, inoltre è chiuso perché se $By_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$, allora
$$x \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} By_n = B(ABy_n) \underset{n\to+\infty}{\to} B(Ax),$$
dunque $x = B(Ax) \in \operatorname{ran} B$. Per mostrare $\ker A + \operatorname{ran} B = X$, per ogni $x \in X$ scriviamo $x = (x - B(Ax)) + B(Ax) \in \ker A + \operatorname{ran} B$, in quanto
$$A(x - B(Ax)) = Ax - (AB)(Ax) = Ax - Ax = 0.$$
Infine, $\ker A \cap \operatorname{ran} B = \{0\}$ perché se $x \in \ker A \cap \operatorname{ran} B$, allora $Ax = 0$, $x = By$, e dunque
$$x = By = B(ABy) = B(Ax) = B0 = 0.$$
Viceversa, supponiamo $X = \ker A \oplus F$ per qualche $F \lhd X$. Dalla proposizione precedente so che esiste una proiezione $P \in \mathcal{L}(X, F)$, e definisco $By := P\left(A^{-1}\{y\}\right)$, dove $A^{-1}\{y\}$ è un qualsiasi $x \in X$ tale che $Ax = y$: B non dipende dalla scelta di x perché se $Ax = Ax' = y$ allora $x - x' \in \ker A$ e cioè $Px - Px' = P(x - x') = 0$. Mostro ora che B è un inverso destro di A: dato $y \in Y$, per la suriettività di A esisterà $x \in X$ tale che $Ax = y$; scrivendo $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \ker A$, $x_2 \in F$, avremo $Px = x_2$ e cioè
$$ABy = A(Px) = Ax_2 = Ax = y.$$
Infine, B è continua per il Teorema del grafico chiuso: se $(y_n, By_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (y, x) \in Y \times F$, allora $y = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} ABy_n = Ax$ e dunque
$$By = B(Ax) = P\left(A^{-1}(Ax)\right) = Px = x.$$

2. Supponiamo che esista $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tale che $B \circ A = \mathbb{I}_X$. Innanzi tutto, $\operatorname{ran} A$ è chiuso, perché se $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ allora
$$y \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} Ax_n = A(BAx_n) \underset{n\to+\infty}{\to} ABy \in \operatorname{ran} A.$$
Mostriamo che $\ker B$ è un complementare di $\operatorname{ran} A$: ovviamente $\ker B \lhd Y$; inoltre, $Y = \operatorname{ran} A + \ker B$ perché possiamo scrivere $y = (AB)y + (y - (AB)y) \in \operatorname{ran} A + \ker B$, essendo
$$B(y - (AB)y) = By - (BA)By = By - By = 0.$$
Infine, se $y \in \operatorname{ran} A \cap \ker B$, allora $y = Ax$, $By = 0$ e dunque
$$y = Ax = A(BAx) = A(By) = A0 = 0.$$
Viceversa, supponiamo $Y = \operatorname{ran} A \oplus F$. Detta $P : Y \to \operatorname{ran} A$ la proiezione, pongo $By := A^{-1}(Py)$: è ben definito per l'iniettività di A; inoltre, $B \circ A = \mathbb{I}_X$ perché dalle proprietà di P abbiamo $P(Ax) = Ax$ e dunque
$$BAx = A^{-1}(PAx) = A^{-1}(Ax) = x.$$
Infine, B è continua perché P è continua e lo è anche A^{-1}, in quanto inversa di una mappa invertibile tra gli spazi di Banach X e $\operatorname{ran} A$.

$\square$

Osservazione.
Mettendo insieme i due risultati del teorema, otteniamo che una mappa lineare continua invertibile ha inverso destro continuo se e solo se $\ker A = \{0\}$ *e* $\operatorname{ran} A = Y$ *hanno complementare. Questo è banalmente vero perché* X *è un complementare di* $\{0\}$ *e* $\{0\}$ *è un complementare di* Y*; dunque otteniamo che ogni mappa lineare continua invertibile ha inversa continua, cosa che già sapevamo dal Teorema della mappa aperta.*

Esempio.
La mappa $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *definita da* $(Ax)(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ *è iniettiva, ma non ha un inverso sinistro continuo: infatti, se esistesse* $B : \operatorname{ran} A \to \ell_2$ *tale che* $B \circ A = \mathbb{I}_{\ell_2}$*, dovrebbe essere tale che* $(By)(k) = ky(k)$ *per ogni* $y \in \operatorname{ran} A$*, dunque prendendo* $y = e_n = A(ne_n) \in \operatorname{ran} A$ *otteniamo*

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_2)} \geq \|Be_n\| = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Infatti, $\operatorname{ran} A$ *non è chiuso in* ℓ_2*, ma anzi ne è un sottospazio denso proprio.* $\operatorname{ran} A \subsetneq \ell_2$ *perché* $y = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\right) \in \ell_2 \setminus \operatorname{ran} A$ *perché se* $Ax = y$ *allora* $x(k) = 1$ *per ogni* k *e quindi* $x \notin \ell_2$*. Del resto,* $\operatorname{ran} A$ *è denso perché contiene lo spazio delle successioni definitivamente nulle* c_{00}*: se* $y \in c_{00}$*, allora* $y = Ax$ *per* $x \in c_{00} \subset \ell_2$ *dato da* $x(k) = ky(k)$*.*

Per concludere il capitolo sui complementari, mostriamo un esempio di sottospazio che non ammette complementare. Per illustrare l'esempio avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma.
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* ℓ_1 *tale che* $Lx_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *per ogni* $L \in (\ell_1)^*$ *o, equivalentemente,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *per ogni* $y \in \ell_\infty$*.*
Allora, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *in* ℓ_1*.*

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $\|x_n\| \geq \delta > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, poiché $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |x_1(k)| < +\infty$, esiste $K_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\displaystyle\sum_{k=K_1+1}^{+\infty} |x_1(k)| \leq \frac{\delta}{5}$; inoltre, scegliendo $y = e_k \in \ell_\infty$ otteniamo che $x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni k e quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{K_1} |x_n(k)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, e per $n = n_2$ sufficientemente grande sarà più piccolo di $\dfrac{\delta}{5}$. Fissato n_2, trovo K_2 per cui $\displaystyle\sum_{k=K_2+1}^{+\infty} |x_{n_2}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$ e itero il procedimento: esisteranno $n_1 = 1 < n_2 < \dots n_j < \dots$ e $K_1 < K_2 < \dots < K_j < \dots$ tali che

$$\sum_{k=1}^{K_{j-1}} \left|x_{n_j}(k)\right| \leq \frac{\delta}{5}, \qquad \sum_{k=K_j+1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| \leq \frac{\delta}{5}.$$

A questo punto considero $y \in \ell_\infty$ data da $y(k) = \operatorname{segno}\big(x_{n_j}(k)\big)$ se $K_{j-1} + 1 \leq k \leq K_j$ e otterrò:

$$\begin{aligned} 0 \underset{j\to+\infty}{\leftarrow} & \left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_j}(k)y(k)\right| \\ \geq & \left|\sum_{k=K_{j-1}+1}^{K_j} x_{n_j}(k)y(k)\right| - \left|\sum_{k=1}^{K_{j-1}} x_{n_j}(k)y(k)\right| - \left|\sum_{k=K_j+1}^{+\infty} x_{n_j}(k)y(k)\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=K_{j-1}+1}^{K_j} \left|x_{n_j}(k)\right| - \sum_{k=1}^{K_{j-1}} \left|x_{n_j}(k)\right| - \sum_{k=K_j+1}^{+\infty} |x_{n_j}(k)| \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| - 2\sum_{k=1}^{K_{j-1}} \left|x_{n_j}(k)\right| - 2\sum_{k=K_j+1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| \\
&\geq \frac{\delta}{5};
\end{aligned}
$$

che è assurdo. $\square$

Esempio.
Si possono costruire delle mappe suriettive che non hanno inverso destro continuo, e dunque il cui nucleo non avrà complementare: consideriamo, dato un sottoinsieme denso e numerabile $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nella palla unità di ℓ_2, la mappa

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &\xrightarrow{A} \ell_2 \\
x &\to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x(n) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1)x(n), \dots, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)x(n), \dots\right).
\end{aligned}
$$

A è ben definita e continua perché

$$
\|Ax\|_2 = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x(n)\right\|_2 \leq \|a_n\|_2 \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)| \leq \|x\|;
$$

inoltre, la linearità si verifica immediatamente.
La suriettività può essere dimostrata considerando equivalentemente, per omogeneità, solo la palla unità di ℓ_2: dato $y \in \ell_2$ con $\|y\| \leq 1$, per densità esiste a_{n_1} tale che $\|y - a_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$; analogamente, essendo $\left\{\frac{a_n}{2}\right\}$ densa in $B_{\frac{1}{2}}(0)$, esisterà a_{n_2} tale che $\left\|y - a_{n_1} - \frac{a_{n_2}}{2}\right\| \leq \frac{1}{4}$, e iterando troverò a_{n_j} per cui $\left\|y - a_{n_1} - \dots - \frac{a_{n_j}}{2^j}\right\| \leq \frac{1}{2^{j+1}}$. Dunque, passando al limite, avrò $y = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{n_j}}{2^j}$, ma poiché $a_n = Ae_n$, allora $y = A\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e_{n_j}}{2^j}\right)$, e quindi essendo y arbitrario A sarà suriettiva.
Supponiamo ora che esista $B \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_1)$ tale che $A \circ B = \mathbb{I}_{\ell_2}$. Preso comunque $y \in \ell_\infty$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty}(Bx)(k)y(k)$ è un funzionale lineare continuo su ℓ_2, dunque $\sum_{k=1}^{+\infty}(Bx)(k)y(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)z(k)$ per ogni $x \in \ell_2$, per qualche $z \in \ell_2 \subset c_0$; scegliendo $x = e_n$ avremo

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}(Be_n)(k)y(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_n(k)z(k) = z(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.
$$

Dal lemma precedente, ciò equivale a dire che $Be_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ in ℓ_1, ma questo porta alla contraddizione:

$$
\|e_n\| = \|ABe_n\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\ell_1,\ell_2)}\|Be_n\|_{\ell_1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.
$$

Lezioni 28-29-30 (09/04/2021)

Introduciamo ora un nuovo concetto di convergenza per successioni, più debole e flessibile rispetto alla convergenza in norma, chiamato appunto convergenza debole.
L'importanza di questo concetto, che è essenziale per lo studio degli spazi funzionali e delle equazioni differenziali, è dovuto al fatto che in dimensione infinita le palle chiuse non sono compatte.

Lemma.
Sia X uno spazio normato e $E \subset X$ un suo sottospazio lineare non denso.
Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 \in X$ tale che $\|x_0\| = 1$ e $\mathrm{d}(x_0, E) \geq 1 - \varepsilon$.

Dimostrazione.
Se $x \in X \setminus \overline{E}$, allora $\mathrm{d}(x, E) > 0$, dunque per definizione di distanza esiste $z \in E$ tale che $0 < \|x - z\| \leq \dfrac{\mathrm{d}(x, E)}{1 - \varepsilon}$. Quindi $x_0 := \dfrac{x - z}{\|x - z\|}$ ha norma pari a $\|x_0\| = 1$; inoltre, essendo E un sottospazio lineare, per ogni $y \in E$ abbiamo $z + y\|x - z\| \in E$, pertanto

$$\|x_0 - y\| = \left\| \frac{x - z - y\|x - z\|}{\|x - z\|} \right\| \geq \frac{\mathrm{d}(x, E)}{\|x - z\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

Passando all'estremo inferiore otteniamo $\mathrm{d}(x_0, E) \geq 1 - \varepsilon$. □

Osservazione.

1. *In generale, se $\|x_0\| = 1$, varrà sempre $\mathrm{d}(x_0, E) \leq 1$ perché $\mathrm{d}(x_0, E) \leq \mathrm{d}(x_0, 0) = \|x_0\|$.*

2. *Se X è uno spazio di Hilbert, è possibile prendere $\varepsilon = 0$ nel lemma precedente, cioè trovare x_0 con $\|x_0\| = 1 = \mathrm{d}(x_0, E)$: basta prendere $x_0 \in E^\perp$ per avere*

$$\mathrm{d}(x_0, E)^2 = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|^2 = \inf_{y \in E} \left(\|x_0\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x_0\|^2.$$

Corollario.
Sia X uno spazio normato con $\dim X = +\infty$.
Allora, la palla unità chiusa $\overline{B_1(0)} := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ non è compatta.

Dimostrazione.
Se $\dim X = +\infty$, allora esiste una successione crescente di sottospazi lineari chiusi $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Applicando il lemma precedente a ciascuno di questi sottospazi troviamo $x_n \in E_n$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\mathrm{d}(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. La successione $\{x_n\}$ in $\overline{B_1(0)}$ quindi verifica $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n \neq m$, dunque non è di Cauchy e non può convergere. □

Definizione.
Sia X uno spazio normato, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X e $x \in X$.
*Se $Lx_n \underset{n \to +\infty}{\to} Lx$ per ogni $L \in X^*$ si dice che x_n **converge debolmente** a x e si indica con la notazione $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$.*

Proposizione.
Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in uno spazio normato X e $x \in X$. Allora:

1. *Se $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x$ allora $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$.*

2. *Se $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$ allora $\{x_n\}$ è limitata.*

3. *Se $\dim X < +\infty$ allora $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x \iff x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$.*

4. *Se $X = \ell_1$ allora $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x \iff x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$.*

Dimostrazione.

1. Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, allora per ogni $L \in X^*$ abbiamo
$$|Lx_n - Lx| \le \|L\|_{X^*}\|x_n - x\|_X \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
cioè $Lx_n \underset{n\to+\infty}{\to} Lx$.
2. Poiché $Lx_n \underset{n\to+\infty}{\to} Lx$ per ogni $L \in X^*$, allora $\{Lx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque, per un corollario del Teorema di Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$.
3. Considero una base $\{e_1, \dots, e_N\} \subset X$ di X e i funzionali della base duale $\{L_1, \dots, L_N\} \subset X^*$ tali che $L_i e_j = \delta_{ij}$ per ogni i, j; allora, avremo
$$x_n = c_{1,n}e_1 + \dots + c_{N,n}e_N = (L_1x_n)e_1 + \dots + (L_Nx_n)e_N \underset{n\to+\infty}{\to} (L_1x)e_1 + \dots + (L_Nx)e_N = x.$$
4. Abbiamo già visto in un lemma precedente che se converge debolmente allora converge anche fortemente; il lemma è stato enunciato solo nel caso di convergenza a 0, ma vale più in generale applicandolo a $x_n - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

$\square$

Esempio.

1. *Un sistema ortonormale numerabile $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio di Hilbert H di dimensione infinita converge a 0 debolmente: come abbiamo già visto, $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ e dunque la successione non converge in norma; tuttavia, dalla Disuguaglianza di Bessel sappiamo che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x, e_n)^2 < +\infty$ per ogni $x \in H$, dunque in particolare $(x, e_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e cioè, visto il Teorema di Riesz-Fréchet sul duale degli spazi di Hilbert, $e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$.*
2. *La successione data dagli elementi della base standard infinito-dimensionale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in ℓ_p a 0 per ogni $p \in (1, +\infty)$. Infatti, per ogni $y \in \ell_{p'}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, abbiamo*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} y(k)e_n(k) = y(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
perché tutte le successioni in $\ell_{p'}$ sono infinitesime; dunque, data l'isometria tra $\ell_{p'}$ e $(\ell_p)^*$, abbiamo che $Le_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $L \in (\ell_p)^*$. Nel caso $p = 2$ otteniamo quanto già avevamo osservato, essendo $\{e_n\}$ un sistema ortonormale.
La stessa successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ invece non converge debolmente in ℓ_1: infatti, scegliendo dei funzionali $L \in (\ell_1)^*$ come nel caso precedente ℓ_p con $p > 1$, come ad esempio $Lx = x(k)$, otteniamo $Le_n = e_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque se $e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ allora $x(k) = 0$ per ogni k e quindi $x \equiv 0$; tuttavia, e_n non può convergere debolmente a 0 perché $\|x_n\| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

La convergenza debole equivale alla convergenza rispetto a una certa topologia, chiamata appunto topologia debole. Gli intorni di questa topologia sono essenzialmente delle regioni limitate solo in un numero finito di direzioni.

Definizione.
Sia X uno spazio normato.
*La **topologia debole** su X è quella che ha per intorni gli insiemi del tipo*
$$\mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(x_0) := \{x \in X : \ |L_1(x - x_0)| < \varepsilon, \dots, |L_N(x - x_0)| < \varepsilon\},$$
per $x_0 \in X$ e un numero finito di $L_1, \dots, L_N \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.
La topologia debole su X si indica con il simbolo $\sigma(X, X^*)$.
*Gli insieme aperti (rispettivamente, gli insiemi chiusi) rispetto a $\sigma(X, X^*)$ si dicono **debolmente aperti** (rispettivamente, **debolmente chiusi**).*

Osservazione.

1. *Se* $\dim X < +\infty$ *la topologia debole coincide con quella indotta dalla norma.*

2. *In generale, una successione in* X *converge debolmente se e solo se converge rispetto alla topologia debole* $\sigma(X, X^*)$.

Teorema (Proprietà della topologia debole)**.**
Sia X *uno spazio normato e* $\sigma(X, X^*)$ *la topologia debole su* X*. Allora:*

1. *Ogni funzionale lineare continuo* $L \in X^*$ *su* X *è continuo anche rispetto a* $\sigma(X, X^*)$*, inoltre, tra tutte le topologie per cui tutti gli* $L \in X^*$ *sono continue,* $\sigma(X, X^*)$ *è la meno fine;*

2. *La topologia* $\sigma(X, X^*)$ *è di Hausdorff;*

3. *Se* $\dim X = +\infty$*,* $\sigma(X, X^*)$ *non è metrizzabile su* X*;*

4. *Se* X^* *è separabile,* $\sigma(X, X^*)$ *è localmente metrizzabile.*

Dimostrazione.

1. Per dimostrare la continuità di un generico $L \in X^*$ faccio vedere che $L^{-1}\{(a, b)\}$ è aperto rispetto a $\sigma(X, X^*)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$: se $L \equiv 0$, allora $L^{-1}((a, b)) = \begin{cases} X & \text{se } a < 0 < b \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$ è sempre aperto; altrimenti esiste $x_0 \in X$ tale che $Lx_0 = \dfrac{a+b}{2}$, e avremo

   $$L^{-1}\{(a, b)\} = \{x \in X : \, a < Lx < b\} = \left\{x \in X : \, \frac{a-b}{2} < L(x - x_0) < \frac{b-a}{2}\right\} = \mathcal{U}_{L; \frac{b-a}{2}}(x_0).$$

   Se poi τ è un'altra topologia per cui tutti i funzionali sono continui, allora dovrà contenere tutti gli aperti del tipo $L^{-1}\{(Lx_0 - \varepsilon, Lx_0 + \varepsilon)\} = \mathcal{U}_{L;\varepsilon}(x_0)$ e le loro intersezioni finite

   $$\mathcal{U}_{L_1;\varepsilon}(x_0) \cap \dots \cap \mathcal{U}_{L_N,\varepsilon}(x_0) = \mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(x_0);$$

   dunque, τ conterrà tutti gli aperti di $\sigma(X, X^*)$ e cioè sarà più fine.

2. Dalla II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach, per ogni $x_1 \neq x_2 \in X$ esiste un iperpiano che separa strettamente $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$, cioè $Lx_1 < \alpha < Lx_2$ per qualche $L \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque, $U_1 := \{x \in X : \; Lx < \alpha\}$ e $U_2 := \{x \in X : \; Lx > \alpha\}$ sono due intorni disgiunti rispettivamente di x_1 e x_2; quindi $\sigma(X, X^*)$ è di Hausdorff.

3. Se $\sigma(X, X^*)$ fosse indotta da una metrica $\widetilde{\mathrm{d}}$, allora la palla $\widetilde{B}_{\frac{1}{n}}(0) := \left\{x \in X : \, \widetilde{\mathrm{d}}(x, 0) < \dfrac{1}{n}\right\}$ sarebbe aperta per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque conterrebbe un intorno del tipo $U_n := \mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(0)$. Se $\dim X = +\infty$, esiste $x_n \in \ker L_1 \cap \dots \cap \ker L_N \setminus \{0\}$, perché altrimenti la mappa $x \mapsto (L_1 x, \dots, L_N x)$ sarebbe una mappa lineare iniettiva tra X e $\mathbb{R}^N$ e cioè X avrebbe dimensione finita; inoltre, poiché l'intersezione dei nuclei è un sottospazio lineare, possiamo supporre $\|x_n\| \geq n$. Dunque x_n è una successione illimitata che però verifica

   $$x_n \in \ker L_1 \cap \dots \cap \ker L_N \subset U_n \subset \widetilde{B}_{\frac{1}{n}}(0),$$

   cioè $\widetilde{\mathrm{d}}(x_n, 0) \leq \dfrac{1}{n}$ e quindi $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} 0$, in contraddizione con la limitatezza delle successioni debolmente convergenti che abbiamo dimostrato in precedenza.

4. Se $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sottoinsieme denso e numerabile della palla unità chiusa $\{L \in X^* : \; \|L\|_{X^*} \leq 1\}$ di X^*, definiamo $\widetilde{\mathrm{d}}(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|L_n(x - y)|}{2^n}$: è chiaramente ben definita e soddisfa le proprietà delle distanza. Bisognerà far vedere che, restringendosi sui limitati, ogni palla rispetto a $\widetilde{\mathrm{d}}$ contiene intorni deboli e viceversa; per omogeneità, sarà sufficiente considerare

solo elementi $x \in X$ che verificano $\|x\| \leq 1$. Dato un intorno debole $U = \mathcal{U}_{M_1,\dots,M_N;\varepsilon}(x_0)$ di x_0, cerco $r > 0$ tale che $U \supset \widetilde{B}_r(x_0) := \left\{x \in B_1(0) : \widetilde{\mathrm{d}}(x, x_0) < r\right\}$: innanzi tutto, possiamo supporre $\|M_i\|_{X^*} \leq 1$ per ogni $i = 1, \dots, N$ (a meno di ri-scalare ε), dunque esisteranno $L_{n_1}, \dots, L_{n_N}$ tali che $\|M_i - L_{n_i}\|_{X^*} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ per $i = 1, \dots, N$; quindi, scegliendo $r < \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}}$ per $i = 1, \dots, N$, ogni $x \in \widetilde{B}_r(x_0)$ verifica

$$
\begin{aligned}
|M_i(x - x_0)| &\leq |M_i(x - x_0) - L_{n_i}(x - x_0)| + |L_{n_i}(x - x_0)| \\
&\leq \|M_i - L_{n_i}\| \|x - x_0\| + 2^{n_i} \widetilde{\mathrm{d}}(x, x_0) \\
&< \frac{\varepsilon}{4}(\|x\| + \|x_0\|) + 2^{n_i} r \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

cioè $x \in U$. Viceversa, data $\widetilde{B}_r(x_0)$, cerco un intorno debole $U = \mathcal{U}_{M_1,\dots,M_N;\varepsilon}(x_0)$ tale che $U \subset \widetilde{B}_r(x_0)$: scelgo $N > \frac{\log \frac{4}{r}}{\log 2}$ in modo che $\frac{1}{2^{N-1}} < \frac{r}{2}$ e poi $M_i = L_i$ e $\varepsilon = \frac{r}{2}$ per ogni $i = 1, \dots, N$; dunque, se $x \in U \cap B_1(0)$, allora

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{d}}(x, x_0) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{|L_n(x - x_0)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|L_n(x - x_0)|}{2^n} \\
&\leq \frac{r}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + (\|x\| + \|x_0\|) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\|L_n\|}{2^n} \\
&\leq \frac{r}{2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
&= r,
\end{aligned}
$$

quindi $x \in \widetilde{B}_r(x_0)$.

$\square$

Osservazione.
Nel caso $X = \ell_1$, abbiamo visto che la convergenza debole equivale a quella in norma. Tuttavia, la topologia debole e quella della norma rimangono distinte, perché la prima non è metrizzabile mentre la seconda sì.

Lezioni 31-32 (13/04/2021)

Teorema (Caratterizzazione dei convessi chiusi)**.**
Sia X uno spazio normato e $K \subset X$ un insieme convesso.
Allora, K è chiuso se e solo se è debolmente chiuso.

Dimostrazione.
Se K è debolmente chiuso, allora è chiuso perché la topologia della norma è più fine di quella debole. Viceversa, mostriamo che se K è convesso e chiuso allora $X \setminus K$ è debolmente aperto: preso $x_0 \in X \setminus K$, dalla II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach esiste un iperpiano chiuso che separa $\{x_0\}$ e K, cioè $Lx_0 < \alpha < Lx$ per ogni $x \in K$ e $L \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ opportuni. Dunque, $U := \{x \in X : \ Lx < \alpha\}$ è un intorno debole di x_0 contenuto in $X \setminus K$, e quindi $X \setminus K$ è debolmente aperto. $\square$

Corollario.
Se $f : X \to \mathbb{R}$ è convessa, allora è inferiormente semi-continua rispetto alla norma se e solo se lo è rispetto alla topologia debole.
In particolare, la norma è inferiormente semi-continua rispetto alla topologia debole e quindi se $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ allora $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

Dimostrazione.
Se f è convessa, ogni suo sotto-livello $f^{-1}((-\infty, c])$ è convesso per ogni $c \in \mathbb{R}$; dunque, dal teorema precedente, questi sotto-livelli saranno chiusi se e solo se sono debolmente chiusi. Poiché la chiusura dei sotto-livelli equivale alla semi-continuità inferiore, concludiamo che f è inferiormente semi-continua se e solo se lo è rispetto alla topologia debole.
Il secondo enunciato segue dalla convessità della norma (che può essere facilmente dedotta dalle proprietà che definiscono le norme). $\square$

Osservazione.

1. *Applicando il corollario precedente alle funzioni concave, otteniamo che per queste ultime la semi-continuità superiore equivale a quella rispetto alla topologia debole. Mettendo insieme questi due risultati otteniamo nuovamente che le mappe lineari, che sono convesse e concave, sono continue rispetto alla topologia debole: in qualche senso, il corollario precedente equivale a "metà" della continuità delle mappe lineari.*

2. *Negli esempi precedenti di successioni convergenti debolmente ma non in norma avevamo $\|x_n\| = 1$ mentre il limite debole verificava $\|x\| = 0$, dunque la disuguaglianza di questo corollario è stretta e in generale la norma non è continua rispetto alla topologia debole. Deduciamo inoltre che le sfere non sono debolmente chiuse.*

Sugli spazi duali è possibile definire un'altra topologia, con proprietà simili a quelle della topologia debole ma ancor più "debole".

Definizione.
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X^* e $L \in X^*$.
Se $L_n x \underset{n\to+\infty}{\to} Lx$ per ogni $x \in X$ si dice che L_n ***converge debolmente**** *a L e si indica con la notazione $L_n \overset{*}{\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}} L$.*

Osservazione.

1. *Se $L_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} L$ allora $L_n \overset{*}{\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}} L$;*

2. *Se $L_n \overset{*}{\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}} L$ allora $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata;*

3. *Se X è riflessivo, allora $L_n \overset{*}{\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}} L$ se e solo se $L_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} L$.*

Esempio.

1. *La successione* $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in* ${c_0}^*$ *data da* $L_n : x \mapsto x(n)$ *converge debolmente** *a* 0 *ma non debolmente. Infatti, poiché* ${c_0}^*$ *è una copia di* ℓ_1*, allora possiamo considerare l'elemento* $\Lambda \in {c_0}^{**}$ *dato da* $\Lambda : L \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} Le_n$*: avremo* $\Lambda L_n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
   La stessa successione, vista in ${\ell_p}^*$*, converge debolmente** *a* 0 *per* $p < +\infty$.

2. *Sia* $f \in C_0([0,1])$ *fissata con* $\displaystyle\int_0^1 f_0 = 1$ *e* $f_n(x) := f_0(x-n)$*.* $\{f_n\}$ *è limitata in* $L^1(\mathbb{R})$ *ma non converge debolmente perché, prendendo* $g \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *otteniamo* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n g = \int_0^1 f_0 = 1$*, mentre se* g *ha supporto compatto allora per* n *tale che* $g(x) \equiv 0$ *per* $x \geq n$ *abbiamo* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n g = \int_n^{n+1} f_n g = 0$*; dunque, se esistesse* f *tale che* $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *in* $L^1(\mathbb{R})$*, avremmo* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$ *ma* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fg = 0$ *per ogni* g *a supporto compatto, che è assurdo. Del resto,* f_n *converge debolmente a zero in* $L^p(\mathbb{R})$ *perché se* $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$*, con* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$*, allora* $\displaystyle\int_n^{n+1} |g|^{p'} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *e dunque*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f_0(x-n)g(x)\mathrm{d}x \leq \|f_0\|_\infty \left(\int_n^{n+1} |g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

   analogamente, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} 0$ *in* $L^\infty(\mathbb{R})$.

Come per la convergenza debole, anche la convergenza debole* proviene da una topologia, che ha proprietà analoghe:

Definizione.
Sia X *uno spazio normato e* X^* *il suo duale.*
La ***topologia debole**** *su* X^* *è quella che ha per intorni gli insiemi del tipo*

$$\mathcal{U}_{x_1,\ldots,x_N;\varepsilon}(L_0) := \{L \in X^* : \ |Lx_1 - L_0x_1| < \varepsilon, \ldots, |Lx_N - L_0x_N| < \varepsilon\},$$

per $L_0 \in X^*$ *e un numero finito di* $x_1, \ldots, x_N \in X$ *e* $\varepsilon > 0$.
La topologia debole su X^* *si indica con il simbolo* $\sigma(X^*, X)$.
Gli insieme aperti (rispettivamente, gli insiemi chiusi) rispetto a $\sigma(X^*, X)$ *si dicono* ***debolmente**** ***aperti*** *(rispettivamente,* ***debolmente**** ***chiusi****).*

Osservazione.

1. *Se* X *è riflessivo, la topologia debole* coincide con quella debole* $\sigma(X^*, X^{**})$.

2. *In generale, una successione in* X^* *converge debolmente* se e solo se converge rispetto alla topologia debole* $\sigma(X^*, X)$.

Proposizione.
Sia X *uno spazio normato,* X^* *il suo duale e* $\sigma(X^*, X)$ *la topologia debole* su* X^**. Allora:*

1. *Ogni funzionale lineare continuo* $\Lambda \in X^{**}$ *su* X^* *dato da* $\Lambda L = Lx$ *è continuo anche rispetto a* $\sigma(X^*, X)$*, inoltre, tra tutte le topologie per cui tutti i* $\Lambda \in X^{**}$ *di questo tipo sono continui,* $\sigma(X^*, X)$ *è la meno fine;*

2. *La topologia* $\sigma(X^*, X)$ *è di Hausdorff, non è metrizzabile se* $\dim X = +\infty$ *ed è localmente metrizzabile se* X *è separabile;*

3. *La norma è debolmente** *sequenzialmente inferiormente semi-continua, cioè se* $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$ *allora* $\|L\|_{X^*} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|L_n\|$.

Dimostrazione.
Le prime due affermazioni si dimostrano come per i risultati corrispondenti per le topologie deboli. Per la terza, se $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$ allora per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ abbiamo

$$Lx \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} L_n x \leq \|L_n\|\|x\| \leq \|L_n\|,$$

dunque $Lx \leq \liminf_{n\to+\infty} \|L_n\|$ e, passando all'estremo inferiore su x, otteniamo la tesi. □

Proposizione.
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $\Lambda \in X^{**}$.
Allora, Λ è continuo in $\sigma(X^*, X)$ se e solo se Λ è della forma $\Lambda L = Lx$ per qualche $x \in X$.

Dimostrazione.
Se $\Lambda : L \mapsto Lx$ per qualche $x \in X$, allora è ovviamente continuo $\sigma(X^*, X)$.
Viceversa, se Λ è continuo in $\sigma(X^*, X)$ allora l'insieme $A = \{L \in X^* : |\Lambda L| < 1\}$ conterrà un intorno di 0, che sarà della forma $U = \mathcal{U}_{x_1,\ldots,x_N;\varepsilon}(0)$ per qualche $x_1, \ldots, x_N \in X$, $\varepsilon > 0$. Per omogeneità, $tA = \{L \in X^* : |\Lambda L| < t\}$ conterrà $tU = \mathcal{U}_{x_1,\ldots,x_N;t\varepsilon}(0)$ e dunque, passando al limite per t che va a zero,

$$Lx_1 = \cdots = Lx_N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda L = 0.$$

Dunque la mappa $A : X^* \to \mathbb{R}^{N+1}$ data da $A : L \mapsto (\Lambda L, Lx_1, \ldots, Lx_N)$ non è suriettiva, perché $(1, 0, \ldots, 0) \notin \operatorname{ran} A$, e quindi $\operatorname{ran} A \subset \left\{y \in \mathbb{R}^{N+1} : c_0 y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_N y_N\right\}$ per qualche $c_0 \neq 0, c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, e cioè, per ogni $L \in X^*$,

$$\Lambda L = -\frac{1}{c_0}(c_1 L x_1 + \cdots + c_N L x_n) = L\left(-\frac{c_1}{c_0}x_1 - \cdots - \frac{c_N}{c_0}x_N\right).$$

□

Corollario.
Un iperpiano su X^* della forma $H := \{\Lambda = \alpha\}$ per qualche $\Lambda \in X^{**}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è chiuso in $\sigma(X^*, X)$ se e solo se Λ è della forma $\Lambda L = Lx$ per qualche $x \in X$.
In particolare, se uno spazio X non è riflessivo, non tutti i chiusi convessi in X^* sono debolmente* chiusi e la topologia $\sigma(X, X^*)$ è strettamente meno fine di $\sigma(X^*, X)$.

Dimostrazione.
Se $\Lambda : L \mapsto Lx$, allora H è chiaramente chiuso in $\sigma(X^*, X)$.
Viceversa, se H è chiuso in $\sigma(X^*, X)$, allora per ogni $L_0 \in H$ avremo che $X \setminus H$ conterrà un intorno del tipo $U = \mathcal{U}_{x_1,\ldots,x_N;\varepsilon}(L_0)$. Essendo U connesso, a meno di cambiare L_0 con $-L_0$, avremo $\Lambda L < \alpha$ per ogni $L \in U$; scrivendo poi $L' = L - L_0$ deduciamo che se $|L' x_i| < \varepsilon$ per $i = 1, \ldots, N$ allora $\Lambda L' < \alpha - \Lambda L_0$. Cambiando segno a L' otteniamo anche $|\Lambda L'| < \alpha - \Lambda L_0$ e quindi, ragionando per omogeneità, Λ è debolmente* continua in 0 e, grazie all'invarianza per traslazioni, lo è in qualsiasi punto. Dunque la conclusione segue dal lemma precedente. □

Lezioni 33-34-35 (23/04/2021)

L'importanza delle topologia debole* è legata al fondamentale teorema di compattezza di Banach-Alaoglu. Per dimostrare questo teorema utilizzeremo un importante risultato di topologia generale.

Teorema (di Tychonoff)**.**
Sia X uno insieme qualsiasi e

$$\prod_{x\in X} \mathbb{R}_x = \mathbb{R}^X := \{f : X \to \mathbb{R}\},$$

con la topologia prodotto avente per intorni gli insiemi del tipo

$$\mathcal{U}_{x_1,\dots,x_n;\varepsilon}(f_0) := \left\{ f \in \mathbb{R}^X : \ |f(x_1) - f_0(x_1)| < \varepsilon, \dots, |f(x_N) - f_0(x_N)| < \varepsilon \right\}.$$

Se $F \subset \mathbb{R}^X$ è tale che $\sup\limits_{f\in F} |f(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X$, allora F è relativamente compatto.

Teorema (di Banach-Alaoglu)**.**
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $\overline{B_1(0)} := \{L \in X^* : \ \|L\| \leq 1\}$ la palla unità chiusa in X^*. Allora, $\overline{B_1(0)}$ è compatta in $\sigma(X^*, X)$.

Dimostrazione.
Notiamo innanzi tutto che la topologia debole* su $X^* \subset \mathbb{R}^X$ coincide con quella indotta dalla topologia prodotto. Dunque, $B := \overline{B_1(0)}$ è relativamente compatta in X^* per il Teorema di Tychonoff, perché $|Lx| \leq \|x\|_X < +\infty$ per ogni $x \in X$. Per mostrare che B è chiusa, e dunque compatta, scriviamo:

$$\begin{aligned} B &= \left\{ f \in \mathbb{R}^X : \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall\, x, y \in X \right\} \cap \left\{ f \in \mathbb{R}^X : \ -\|x\| \leq f(x) \leq \|x\|, \ \forall\, x \in X \right\} \\ &= \bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x,y\in X} \left\{ f \in \mathbb{R}^X ; \ f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) = 0 \right\} \cap \bigcap_{x\in X} \left\{ f \in \mathbb{R}^X : \ -\|x\| \leq f(x) \leq \|x\| \right\}. \end{aligned}$$

B è quindi chiusa in quanto intersezione di chiusi: lo sono gli insiemi della prima intersezione perché ogni mappa del tipo $f \mapsto f(x)$ è continua in $\mathbb{R}^X$ e dunque lo è anche $f \mapsto f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)$; lo sono anche gli altri insiemi perché preimmagini di un chiuso rispetto a una mappa continua. $\square$

Corollario.
Se X è riflessivo, allora $\overline{B_1(0)} \subset X^*$ è compatta in $\sigma(X^*, X^{**})$.

Il seguente Lemma sugli spazi riflessivi ha delle interessanti conseguenze, soprattutto alla luce del Teorema di Banach-Alaoglu.

Lemma.
Sia X uno spazio di Banach.
Allora, X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.

Dimostrazione.
Supponiamo che X sia riflessivo, cioè che ogni $\Lambda \in X^{**}$ sia del tipo $\Lambda = J(x)$. Allora, per ogni $\alpha \in X^{***}$, il funzionale $L_\alpha := \alpha \circ J$ è un elemento di X^* e dunque

$$\alpha\Lambda = \alpha J(x) = L_\alpha x = \Lambda L_\alpha,$$

dunque X^* è riflessivo.
Viceversa, supponiamo per assurdo che X^* sia riflessivo ma esista $\Lambda_0 \in X^{**} \setminus J(X)$, dove $J : X \to X^{**}$ è l'isometria canonica che manda x nel funzionale $J(x) : L \mapsto Lx$. Allora, per un corollario del Teorema di Hahn-Banach, esisterà $\alpha \in X^{***}$ tale che $\alpha|_{J(X)} \equiv 0$ ma $\alpha\Lambda_0 \neq 0$; tuttavia, essendo X^* riflessivo, α sarà del tipo $\alpha : \Lambda \mapsto \Lambda L$ per qualche $L \in X^*$, dunque per ogni $x \in X$ avremo

$$Lx = J(x)L = \alpha J(x) = 0,$$

quindi $L = 0$, che è assurdo perché $\Lambda_0 L = \alpha\Lambda_0 \neq 0$. $\square$

Corollario.

1. *Gli spazi* $L^\infty((0,1))$ *e* ℓ_∞ *non sono riflessivi.*
2. *Se* X *è riflessivo, allora* $\overline{B_1(0)} \subset X$ *è compatta in* $\sigma(X, X^*)$.

Vale in realtà un risultato più forte del precedente, che caratterizza gli spazi riflessivi e attraverso la debole compattezza della palla unità chiusa. Per dimostrarlo utilizzeremo il seguente lemma.

Lemma (di Goldstine).
Sia X *uno spazio normato,* $J : X \mapsto X^{**}$ *l'isometria canonica e* $\overline{B_1(0)} \subset X$ *la palla unità chiusa. Allora,* $J\left(\overline{B_1(0)}\right)$ *è denso rispetto alla topologia debole** $\sigma(X^{**}, X^*)$ *nella palla unità chiusa*

$$\overline{B_1(0)} := \{\Lambda \in X^{**} :\ \|\Lambda\|_{X^{**}} \leq 1\}\,.$$

Corollario.
L'immagine $J(X)$ *di* J *è debolmente* densa in* X^{**}.

Osservazione.
Il Lemma di Goldstine è falso se si considera la densità in norma su X^{**}. *Infatti, essendo* J *un'isometria, se* X *è un Banach lo sarà anche* $J(X)$ *sarà un Banach e dunque sarà chiuso in* X^{**}*; pertanto, sarà denso se e solo se* J *è suriettiva, cioè se e solo se* X *è riflessivo. Per omogeneità, lo stesso vale se si considera solo la palla unità.*

Dimostrazione.
Fissato $\Lambda_0 \in X^{**}$ con $\|\Lambda_0\| \leq 1$ e un suo intorno debole* U cerchiamo $x \in X$ tale che $J(x) \in U$; scegliendo U della forma

$$U = \mathcal{U}_{L_1,\ldots,L_N;\varepsilon}(\Lambda_0) := \{\Lambda \in X^{**} :\ |\Lambda L_1 - \Lambda_0 L_1| < \varepsilon, \ldots, |\Lambda L_1 - \Lambda_0 L_N| < \varepsilon\},$$

x dovrà verificare $|L_i x - \Lambda_0 L_i| < \varepsilon$ per $i = 1, \ldots, N$.
Se non esistesse nessun x siffatto, allora la mappa $A : X \to \mathbb{R}^N$ data da $A : x \mapsto (L_1 x, \ldots, L_N x)$ verificherebbe $y_0 := (\Lambda_0 L_1, \ldots, \Lambda_0 L_N) \notin \overline{A\left(\overline{B_1(0)}\right)}$. Potremmo allora separare strettamente $\overline{A\left(\overline{B_1(0)}\right)}$ e $\{y_0\}$, cioè trovare $(c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{R}^N, \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$c_1(Ax)_1 + \cdots + c_N(Ax)_N < \alpha < c_1 y_{01} + \cdots + c_N y_{0N}$$

per ogni $x \in \overline{B_1(0)}$, cioè $\displaystyle\sum_{i=1}^N c_i L_i x < \alpha < \sum_{i=1}^N c_i \Lambda_0 L_i$; passando all'estremo superiore, otterremo la seguente contraddizione:

$$\left\| \sum_{i=1}^N c_i L_i \right\|_{X^*} \leq \alpha < \sum_{i=1}^N c_i \Lambda_0 L_i \leq \|\Lambda_0\|_{X^{**}} \left\| \sum_{i=1}^N c_i L_i \right\|_{X^*} \leq \left\| \sum_{i=1}^N c_i L_i \right\|_{X^*}.$$

□

Teorema (Teorema di Kakutani).
Sia X *uno spazio di Banach.* X *è riflessivo se e solo se la palla unità* $\overline{B_1(0)} \subset X$ *è compatta in* $\sigma(X, X^*)$.

Dimostrazione.
Se X è riflessivo, è stato già visto che la palla unità è debolmente compatta.
Supponiamo ora che $\overline{B_1(0)}$ sia compatta in $\sigma(X, X^*)$; innanzitutto, osserviamo che $J : X \mapsto X^{**}$ è continua rispetto alle topologie $\sigma(X, X^*)$ in partenza e $\sigma(X^{**}, X^*)$ in arrivo, perché la preimmagine di un aperto fondamentale in $\sigma(X^{**}, X^*)$

$$J^{-1}\left(\mathcal{U}_{L_1,\ldots,L_N;\varepsilon}(J(x_0))\right) = \mathcal{U}_{L_1,\ldots,L_N;\varepsilon}(x_0)$$

è un aperto fondamentale in $\sigma(X, X^*)$. Dunque, anche l'immagine attraverso J di $\overline{B_1(0)}$ è compatta in $\sigma(X^{**}, X^*)$ e in particolare chiusa. Dal Lemma di Goldstine otteniamo che $J\left(\overline{B_1(0)}\right)$ è anche densa in $\overline{B_1(0)}$, e dunque non potrà che essere $J\left(\overline{B_1(0)}\right) = \overline{B_1(0)}$; ragionando per omogeneità concludiamo che $J(X) = X^{**}$, cioè X è riflessivo. $\square$

Mostriamo ora alcuni risultati che mettono in relazione riflessività e separabilità.

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach tale che X^* è separabile.
Allora, X è separabile.

Dimostrazione.
Sia $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione densa in X^*; allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ e $L_n x_n \geq \frac{\|L_n\|}{2}$. Mostriamo che un sottospazio numerabile e denso è dato dalle combinazioni lineari razionali

$$D := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{x_n\} = \{c_1x_1 + \cdots + c_Nx_N;\ c_i \in \mathbb{Q}\} :$$

D è chiaramente numerabile ed è denso in $Y = \mathrm{Span}\{x_n\}$, dunque basterà far vedere che Y è denso in X; a questo scopo, grazie a un corollario delle forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach, sarà sufficiente mostrare che l'unico funzionale in X^* che si annulla sull'intero Y è quello identicamente nullo. Se $L|_Y \equiv 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ trovo L_N tale che $\|L - L_N\| \leq \varepsilon$ e dunque

$$\|L\| \leq \|L - L_N\| + \|L_N\| \leq \varepsilon + 2L_Nx_N = \varepsilon + 2(L_Nx_N - Lx_N) \leq \varepsilon + 2\|L_N - L\| \leq 3\varepsilon,$$

quindi $L \equiv 0$. $\square$

Corollario.
Se X^* è separabile, la topologia debole* su X^* è localmente metrizzabile.

Osservazione.
Se X è uno spazio separabile, il suo duale X^* potrebbe non esserlo. Infatti, $L^1((0,1))$ e ℓ_1 sono entrambi separabili ma i rispettivi duali non lo sono, essendo copie isomorfe rispettivamente di $L^\infty((0,1))$ e ℓ_∞.

Corollario.
Sia X uno spazio di Banach.
Allora, X è riflessivo e separabile se e solo se X^* è riflessivo e separabile.

Dimostrazione.
Se X^* è riflessivo e separabile, allora dal lemma precedente otteniamo che X è riflessivo mentre dalla proposizione deduciamo che X è separabile.
Viceversa, se X è riflessivo e separabile, allora anche X^{**}, essendo una copia isomorfa di X, è riflessivo e separabile e quindi, come abbiamo appena dimostrato, anche X^* è riflessivo e separabile. $\square$

Esempio.
Gli spazi $L^p((0,1))$ sono riflessivi e separabili per ogni $p \in (1, +\infty)$. Lo spazio $L^1((0,1))$ è separabile ma non riflessivo, e il suo duale è isomorfo a $L^\infty((0,1))$ e dunque non è né separabile né riflessivo. Infine, $L^\infty((0,1))$ non è né separabile né riflessivo e anche il suo duale non é riflessivo (altrimenti anche $L^\infty((0,1))$ sarebbe riflessivo) né separabile (altrimenti lo sarebbe anche $L^\infty((0,1))$).
Un discorso analogo vale per gli spazi ℓ_p.

Concludiamo il capitolo sulle topologie deboli introducendo una classe di spazi di Banach: quelli uniformemente convessi. Questi spazi sono definiti attraverso una condizione puramente geometrica di uniforme stretta convessità delle palle; tuttavia, da questa definizione discendono sorprendentemente delle importanti proprietà topologiche.

Definizione.
Uno spazio di Banach X si dice ***uniformemente convesso*** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Osservazione.

1. *La definizione può essere data equivalentemente assumendo $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$: se ad esempio $\|x\| \leq 1 - \gamma$ allora abbiamo sempre $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \frac{\|x\| + \|y\|}{2} \leq 1 - \frac{\gamma}{2}$, e analogamente se $\|y\| \leq 1 - \gamma$; se invece $1 - \gamma \leq \|x\|, \|y\| \leq 1$ allora avremo*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \|x - y\| - \left\| \frac{x}{\|x\|} - x \right\| - \left\| y - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \varepsilon - (1 - \|x\|) - (1 - \|y\|) \geq \varepsilon - 2\gamma =: \varepsilon',$$

dunque $\left\| \frac{\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}}{2} \right\| \leq 1 - \delta'$, *per qualche $\delta' > 0$, e quindi*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left\| \frac{\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}}{2} \right\| + \frac{\left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} - y \right\|}{2} \leq 1 - \delta' + \gamma =: 1 - \delta$$

2. *In uno spazio uniformemente convesso le palle sono sempre strettamente convesse; la condizione di convessità uniforme è tuttavia più forte perché richiede una uniformità rispetto alla scelta dei punti sulla sfera, che potrebbe non essere verificata perché le sfere in generale non sono compatte.*

3. *Negli spazi uniformemente convessi è possibile definire la proiezione su un chiuso convesso come l'unico punto di distanza minima, analogamente agli spazi di Hilbert, perché la proprietà di uniforme convessità permette di dimostrare l'esistenza e l'unicità del punto di minima distanza.*

Esempio.

1. *Gli spazi di Hilbert sono uniformemente convessi, perché dalla regola del parallelogramma abbiamo, se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$,*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \sqrt{\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4}} \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} =: 1 - \delta.$$

2. *Lo spazio $L^1(\mu)$ <u>non</u> è uniformemente convesso: prendiamo infatti A, B misurabili disgiunti di misura positiva (se non esistono, $L^1(\mu)$ è uni-dimensionale), e definiamo $f = \frac{\chi_A}{\mu(A)}, g = \frac{\chi_B}{\mu(B)}$; otterremo*

$$\|f\| = \|g\| = 1, \|f - g\| = 2, \qquad \left\| \frac{f+g}{2} \right\| = 1.$$

3. *Neanche $L^\infty(\mu)$ è uniformemente convesso, perché prendendo $f = \chi_A + \chi_B, g = \chi_A - \chi_B$ si ottiene, come prima,*

$$\|f\| = \|g\| = 1, \|f - g\| = 2, \qquad \left\| \frac{f+g}{2} \right\| = 1;$$

analogamente, non sono uniformemente convessi neanche i sottospazi chiusi $c_0 \lhd \ell_\infty$ e $C(K) \lhd L^\infty(K)$ per $K \Subset \mathbb{R}^N$.

Lezioni 36-37 (26/04/2021)

Il seguente risultato ci mostra che gli spazi uniformemente convessi verificano una proprietà apparentemente di natura assai diversa: sono spazi riflessivi.

Teorema (di Milman-Pettis).
Gli spazi uniformemente convessi sono riflessivi.

Dimostrazione.
Per omogeneità sarà sufficiente mostrare che se X è uniformemente convesso e $\Lambda_0 \in X^{**}$ con $\|\Lambda_0\| = 1$ allora $\Lambda_0 \in J(X)$; inoltre, poiché $J(X)$ è chiuso in X^{**} (rispetto alla topologia della norma), basterà far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ tale che $\|J(x) - \Lambda_0\| \le \varepsilon$.
Prendiamo $L \in X^*$ tale che $\|L\| = 1$ e $\Lambda_0 L \ge 1 - \dfrac{\delta}{2}$, con δ come nella definizione di convessità uniforme, e consideriamo l'intorno debole* di Λ_0 dato da

$$U = \mathcal{U}_{L;\frac{\delta}{2}}(\Lambda_0) := \left\{\Lambda \in X^{**} : \, |\Lambda L - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Poiché, per il Lemma di Goldstine, $J(X)$ è denso in $\sigma(X^{**}, X^*)$, avremo $J(x) \in U$ per qualche $x \in X$ con $\|x\| \le 1$; per concludere ci basterà mostrare che proprio questo x verifica $\|J(x) - \Lambda_0\| \le \varepsilon$. Se così non fosse, allora $\Lambda_0 \in X^{**} \setminus \overline{B_\varepsilon(J(x))}$, ed essendo $\overline{B_\varepsilon(J(x))}$ chiuso anche in $\sigma(X^{**}, X^*)$ e $J(X)$ denso in $\sigma(X^{**}, X^*)$ avremo $J(y) \in U \setminus \overline{B_\varepsilon(J(x))}$ per qualche $y \in \overline{B_1(0)} \subset X$. y dunque verificherà

$$|Ly - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}, \qquad\qquad \|x - y\| > \varepsilon.$$

Essendo però anche $x \in U$, avremo $|Lx - \Lambda_0 L| < \dfrac{\delta}{2}$, da cui

$$\|x + y\| \ge Lx + Ly \ge 2\Lambda_0 L - \delta \ge 2 - 2\delta,$$

cioè $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \ge 1 - \delta$, in contraddizione con $\|x - y\| > \varepsilon$. □

Osservazione.
Gli spazi finito-dimensionali $\left(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1\right), \left(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty\right)$ *non sono uniformemente convessi, essendo un caso particolare di spazi* L^1 *e* L^∞ *rispettivamente, ma poiché hanno dimensione finita sono riflessivi.*

Un'altra utile proprietà degli spazi riflessivi è la relazione tra convergenza debole e convergenza in norma.

Proposizione.
Sia X *uno spazio uniformemente convesso e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* X *e* $x \in X$. *Allora,* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ *se e solo se*

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x, \qquad\qquad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x\|.$$

Dimostrazione.
Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ allora abbiamo già visto che $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ e inoltre $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} x$ perché la norma è una funzione continua.
Dimostriamo ora che negli spazi uniformemente convessi la convergenza debole e la convergenza della norma implicano la convergenza in norma. Questo è ovvio nel caso in cui il limite sia $x = 0$. Altrimenti, $y_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|}, y := \dfrac{x}{\|x\|}$ verificano $\|y_n\| = \|y\| = 1$ e $y_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} y$; per linearità avremo anche $\dfrac{y_n + y}{2} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} y$, dunque dall'inferiore semicontinuità debole della norma si ottiene

$\liminf_{n\to+\infty}\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \geq \|y\| = 1$. Se avessimo $\|y_n - y\| \geq \varepsilon > 0$ allora, per uniforme convessità, avremmo anche $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$, in contraddizione con quanto appena visto, pertanto $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. Dunque possiamo concludere che

$$\|x_n - x\| \leq \left\|x_n - \frac{\|x\|}{\|x_n\|}x_n\right\| + \left\|\frac{\|x\|}{\|x_n\|}x_n - x\right\| = |\|x_n\| - \|x\|| + \|x\|\|y_n - y\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

$\square$

Osservazione.
Nel caso degli spazi di Hilbert il risultato segue facilmente dalle proprietà del prodotto scalare: se $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ *e* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x\|$ *allora*

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\to} 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$$

Esempio.

1. *Il risultato può non essere vero negli spazi non uniformemente convessi, come ad esempio* c_0*: la successione definita da* $x_n = e_1 + e_n = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ *converge debolmente a* $x = e_1$*, perché come abbiamo già visto* $x_n - x = e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ *e inoltre* $\|x_n\| = \|x\| = 1$*, ma* $\|x_n - x\| = 1$*.*

2. *Il precedente risultato è vero anche in* ℓ_1*, nonostante questo spazio non sia uniformemente convesso, perché come abbiamo già visto la convergenza debole in* ℓ_1 *equivale alla convergenza in norma.*

Per concludere, mostriamo che tutti gli spazi di L^p sono uniformemente convessi. Questo seguirà abbastanza facilmente dalla seguente disuguaglianza:

Proposizione (Disuguaglianza di Hanner)**.**
Sia (X, Σ, μ) *uno spazio misura e* $f, g \in L^p(\mu)$ *per qualche* $p \in [1, +\infty)$*. Se* $p \leq 2$*, allora*

$$\|f+g\|^p_{L^p(\mu)} + \|f-g\|^p_{L^p(\mu)} \geq (\|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)})^p + |\|f\|_{L^p(\mu)} - \|g\|_{L^p(\mu)}|^p.$$

Se invece $p \geq 2$*, allora*

$$\|f+g\|^p_{L^p(\mu)} + \|f-g\|^p_{L^p(\mu)} \leq (\|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)})^p + |\|f\|_{L^p(\mu)} - \|g\|_{L^p(\mu)}|^p.$$

Dimostrazione.
Partiamo dal caso $p \leq 2$. La disuguaglianza è simmetrica in f, g ed è banale nel caso in cui una delle due sia nulla, dunque possiamo supporre $\|f\| \geq \|g\| > 0$ e la disuguaglianza equivarrà a

$$\begin{aligned}
& \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \\
\geq\; & (\|f\|+\|g\|)^p + (\|f\|-\|g\|)^p \\
=\; & \left((\|f\|+\|g\|)^{p-1} + (\|f\|-\|g\|)^{p-1}\right)\|f\| + \left((\|f\|+\|g\|)^{p-1} - (\|f\|-\|g\|)^{p-1}\right)\|g\| \\
=\; & \underbrace{\left(\left(1+\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1} + \left(1-\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1}\right)}_{=:a\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)}\|f\|^p + \underbrace{\frac{\|f\|^{p-1}}{\|g\|^{p-1}}\left(\left(1+\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1} - \left(1-\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1}\right)}_{=:b\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)}\|g\|^p,
\end{aligned}$$

con

$$a(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \qquad\qquad b(r) = \frac{(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}}{r^{p-1}};$$

questa disuguaglianza chiaramente seguirà dalla stima puntuale

$$|f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p \geq a\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)|f(x)|^p + b\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)|g(x)|^p$$

per μ-q.o. x, cioè

$$|A+B|^p + |A-B|^p \geq a(r)|A|^p + b(r)|B|^p, \qquad \forall r \in (0,1], A, B \in \mathbb{R}.$$

Notiamo ora che è sufficiente dimostrare la disuguaglianza nel caso $|A| \geq |B|$: infatti, la mappa $F : r \mapsto a(r) - b(r)$ è decrescente in quanto

$$(a(r) - b(r))' = (p-1)\left(\frac{r^p + 1}{r^p}\right)\left(\frac{1}{(1+r)^{2-p}} - \frac{1}{(1-r)^{2-p}}\right) \leq 0,$$

dunque essendo $F(1) = 0$ avremo $F \geq 0$; perciò, quando $|A| \leq |B|$ otterremo

$$0 \leq F(r)(|B|^p - |A|^p) = a(r)|B|^p + b(r)|A|^p - (a(r)|A|^p + b(r)|B|^p)$$

e cioè $a(r)|A|^p + b(r)|B|^p \leq a(r)|B|^p + b(r)|A|^p$. Consideriamo ora, per $|A| \geq |B|$ la funzione $G : r \mapsto a(r)|A|^p + b(r)|B|^p$; la sua derivata è

$$G'(r) = (p-1)\left(\frac{1}{(1+r)^{2-p}} - \frac{1}{(1-r)^{2-p}}\right)\left(|A|^p - \frac{|B|^p}{r^p}\right),$$

dunque $G(r)$ ha un ha un massimo assoluto in $r = \dfrac{|B|}{|A|}$, quindi

$$G(r) \leq G\left(\frac{|B|}{|A|}\right) = ||A| + |B||^p + (|A| - |B|)^p = |A+B|^p + |A-B|^p$$

e la disuguaglianza è provata.
Nel caso $p \geq 2$ si ragiona in modo analogo ma con le disuguaglianze opposte: ci si restringe al caso $|A| \geq |B|$, in cui si vede che G ha un minimo assoluto in $\dfrac{|B|}{|A|}$ e dunque

$$|A+B|^p + |A-B|^p \leq a(r)|A|^p + b(r)|B|^p, \qquad \forall r \in (0,1], A, B \in \mathbb{R},$$

da cui seguirà la disuguaglianza originariamente cercata con le stesse manipolazioni del caso $p \leq 2$. □

Osservazione.

1. *Se $p = 2$ valgono entrambe le disuguaglianze, che dunque dovranno essere uguaglianze, cioè*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 + |\|f\| - \|g\||^2;$$

   sviluppando i quadrati a destra si ottiene la ben nota identità del parallelogramma.

2. *Se $p = 1$ si la disuguaglianza di Hanner da come risultato*

$$\|f+g\| + \|f-g\| \geq \max\{2\|f\|, 2\|g\|\};$$

   a meno di scambiare f e g, possiamo supporre di avere $\|f\| \geq \|g\|$, dunque scrivendo $2f = (f+g) + (f-g)$ la disuguaglianza equivale alla ben nota disuguaglianza triangolare.

Corollario.
Gli spazi $L^p(\mu)$ sono uniformemente convessi per $p \in (1, +\infty)$.

Dimostrazione.
Prendiamo $f, g \in L^p(\mu)$ con $\|f\| = \|g\|_{L^p(\mu)} = 1, \|f-g\|_{L^p(\mu)} \geq \varepsilon$. Nel caso $p \geq 2$ dalla disuguaglianza di Hanner si ottiene

$$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p \leq 2^p,$$

da cui

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leq \left(1 - \frac{\|f-g\|^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} =: 1 - \delta.$$

Se invece $p \leq 2$, applichiamo la disuguaglianza di Hanner a $\dfrac{f+g}{2}, \dfrac{f-g}{2}$ e otteniamo:

$$\|f\|^p + \|g\|^p \geq \left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\| + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\| - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|\right|^p;$$

dunque, se $L^p(\mu)$ non fosse uniformemente convesso, esisterebbero f_n, g_n tali che $\|f_n\| = \|g_n\| = 1, \|f_n - g_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \varepsilon > 0, \left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, e dunque la disuguaglianza precedente darebbe la seguente contraddizione:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & \|f_n\|^p + \|g_n\|^p \\ & \geq & \left(\left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| + \left\|\dfrac{f_n-g_n}{2}\right\|\right)^p + \left(\left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| - \left\|\dfrac{f_n-g_n}{2}\right\|\right)^p \\ & \underset{n\to+\infty}{\to} & \left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p \\ & > & 2. \end{array}$$

$\square$

Lezioni 38-39-40 (30/04/2021)

Introduciamo ora una nuova classe di spazi funzionali in cui si riesca a definire a generalizzare il concetto di derivata, chiamato ora derivata debole. L'idea di base è di estendere la nozione di derivata a tutte le funzioni per cui vale la formula di integrazione per parti.
L'utilità di questi spazi, noti come spazi di Sobolev, segue dal fatto che sono particolarmente convenienti per lo studio delle equazioni differenziali.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$ e sia $u \in L^1_{\text{loc}}((a, b))$.
*Si dice che u **ha una derivata debole** su (a, b) se esiste $g \in L^1_{\text{loc}}((a, b))$ tale che*

$$\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi \qquad\qquad \forall\, \varphi \in C^1_0((a, b)).$$

*g si dice la **derivata debole** di u e si indica con il simbolo usuale di derivazione $u' = g$.*

Esempio.

1. *Ogni funzione u derivabile su (a, b) ha una derivata debole su (a, b) e la sua derivata debole coincide con quella ben nota; questo segue dalla formula di integrazione per parti.*

2. *La funzione $u(x) = |x|$, pur non essendo derivabile in senso classico su $\mathbb{R}$, lo è in senso debole perché per $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u\varphi' &= -\int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= [-x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi g, \end{aligned}$$

con $g(x) = \mathrm{segno}(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$. Analogamente, hanno derivate deboli le funzioni non derivabili:

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \qquad\qquad x^- = \max\{-x, 0\} = x - x^+ = \frac{|x| - x}{2};$$

e vale

$$\left(x^+\right)' = \chi_{\{x>0\}}, \qquad\qquad \left(x^-\right)' = \chi_{\{x<0\}}.$$

3. *La funzione $u(x) = \mathrm{segno}(x)$ non ha una derivata debole su nessun (a, b) con $a < 0 < b$. Infatti, se lo fosse avremmo, per ogni $\varphi \in C^1_0((a, b))$,*

$$-\int_a^b u'\varphi = \int_a^b u\varphi' = -\int_a^0 \varphi' + \int_0^b \varphi' = -\varphi(0) + \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(0) = -2\varphi(0),$$

che è impossibile.

Osservazione.

1. *La derivata debole è unica, a meno di insiemi di misura nulla, perché se $\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g_1\varphi = -\int_a^b g_2\varphi$ per ogni $\varphi \in C^1_0([a, b])$, allora $\int_a^b \varphi(g_1 - g_2) \equiv 0$ e dunque, per densità, scegliendo una successione $\{\varphi_n\}$ che approssima $\mathrm{segno}(g_1 - g_2)$ si ottiene $g_1 \equiv g_2$.*

2. *Se $u \equiv v$ q.o. su (a, b), allora u ha una derivata debole se solo se ce l'ha v, e in caso affermativo $u' = v'$.*

3. *Valgono le ben note regole di derivazione: se f, g hanno derivate deboli, allora lo sono anche la loro somma e il prodotto con $(u+v)' = u' + v'$ e, se una delle due è di classe C^1, $(uv)' = u'v + uv'$; inoltre, se $H \in C^1(\mathbb{R})$, allora $H(f)$ ha una derivata debole con $H(u)' = H'(u)u'$; se poi u ha una derivata debole su (a,b), allora lo è anche su (c,d) se $(c,d) \subset (a,b)$.*

4. *La definizione di derivata debole può essere data equivalentemente considerando, per densità, solo $\varphi \in C_0^\infty((a,b))$.*

Vediamo ora una caratterizzazione equivalente delle funzioni che hanno derivata debole. Sono essenzialmente le stesse funzioni per cui vale il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$ e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.
u si dice ***assolutamente continua*** *su $[a,b]$ se è derivabile q.o. in $[a,b]$ e la sua derivata $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ verifica $u(y) = u(x) + \int_x^y u'$ per ogni $x, y \in [a,b]$; si indica con il simbolo $u \in AC([a,b])$.*

Esempio.
La funzione di Cantor u su $[0,1]$ è continua e derivabile q.o., con $u' \equiv 0$, ma non è assolutamente continua perché $u(1) - u(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 u'$.

Lemma.
Sia $h \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ tale che $\int_a^b h\varphi' = 0$ per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$.
Allora $h \equiv c$ q.o. in (a,b), per qualche $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.
Fisso $\eta_0 \in C_0^1((a,b))$ tale che $\int_a^b \eta_0 = 1$ e pongo, per $\psi \in C_0^1((a,b))$, $\varphi(x) := \int_a^x \psi - \left(\int_a^b \psi\right) \int_a^x \eta_0$.
Poiché $\varphi \in C_0^1((a,b))$, allora

$$0 = \int_a^b h\varphi' = \int_a^b \left(h\psi - h\eta_0 \int_a^b \psi\right) = \int_a^b \psi \left(h - \int_a^b h\eta_0\right).$$

Essendo ψ arbitraria, per densità dovrà essere $h \equiv \int_a^b h\eta_0$ q.o. in (a,b). □

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$ e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.
Allora, u ha una derivata debole in (a,b) se e solo se esiste $v \in AC([a,b])$ tale che $u \equiv v$ q.o. su (a,b) e, in caso affermativo, la derivata debole di u coincide con quella di v.

Dimostrazione.
Supponiamo che $u \in AC([a,b])$, a meno di insiemi di misura nulla. Allora, se $\varphi \in C_0^1((a,b))$ e $\varphi|_{[a,x_0]} \equiv 0$, allora

$$\begin{aligned}
\int_a^b u\varphi' &= \int_a^b \left(u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t)\mathrm{d}t\right) \varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x u'(t)\mathrm{d}t\right) \varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^b \left(\int_t^b \varphi'(x)\mathrm{d}x\right) u'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_{x_0}^b \varphi(t)u'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b u'\varphi;
\end{aligned}$$

dunque, u ha una derivata debole e la sua derivata debole coincide con quella q.o.. Se poi $v \equiv u$ q.o., sappiamo che anche v ha una derivata debole che coincide con quella di u.
Supponiamo viceversa che u abbia derivata debole u'e, fissato $x_0 \in (a,b)$, poniamo $v(x) := u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'$: è assolutamente continua per costruzione e verifica $v' = u'$. Inoltre, abbiamo appena visto che $\int_a^b v\varphi' = -\int_a^b u'\varphi$ per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$; del resto, dalla definizione di derivata debole sappiamo anche che $\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b u'\varphi$, quindi $\int_a^b (u-v)\varphi'$ e cioè, dal Lemma precedente, $u-v \equiv c$ q.o. in (a,b). Infine, poiché per costruzione $v(x_0) = u(x_0)$, allora $c = 0$ e quindi $u \equiv v$ q.o.. $\square$

Consideriamo ora gli spazi di funzioni le cui derivate deboli appartengono a qualche spazio L^p. Questi spazi si riveleranno essere quelli giusti per lo studio delle equazioni differenziali.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$ e $p \in [1, +\infty]$.
*Lo **spazio di Sobolev** $W^{1,p}((a,b))$ è il sottospazio di $L^p((a,b))$ dato dalle funzioni che hanno derivate deboli appartenenti anch'esse a $L^p((a,b))$, ovvero:*

$$W^{1,p}((a,b)) : \{u \in L^p((a,b)) : \ u \text{ ha una derivata debole } u' \in L^p((a,b))\}.$$

Per u in $W^{1,p}((a,b))$ definiamo la norma $\|u\|_{W^{1,p}((a,b))} := \|u\|_{L^p((a,b))} + \|u'\|_{L^p((a,b))}$.
Analogamente definiamo $W^{1,p}_{\text{loc}}((a,b)) := \big\{u \in L^p_{\text{loc}}((a,b)) : \ u \in W^{1,p}((c,d)) \ \forall \ (c,d) \Subset (a,b)\big\}$.

Esempio.
$u(x) = |x|^\alpha$ ha una derivata debole, se $0 < \alpha < 1$, data da $u'(x) = \dfrac{\text{segno}(x)}{|x|^{1-\alpha}}$; se $a < 0 < b$, allora $u' \in L^p((a,b))$ se e solo se $p < \dfrac{1}{1-\alpha}$, dunque $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ solo per questi valori. La dimostrazione di questo è analoga al caso già visto $\alpha = 1$, per cui otteniamo $u' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Osservazione.

1. *Se $p < +\infty$, una norma equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$ è data da $\|u\| := \Big(\|u\|^p_{L^p((a,b))} + \|u'\|^p_{L^p((a,b))}\Big)^{\frac{1}{p}}$.*

2. *Nel caso $p = 2$, la norma $\|u\| = \sqrt{\|u\|^2_{L^2((a,b))} + \|u'\|^2_{L^2((a,b))}}$ è data dal prodotto scalare*

$$(u,v)_{W^{1,2}((a,b))} := (u,v)_{L^2((a,b))} + (u',v')_{L^2((a,b))} = \int_a^b (uv + u'v').$$

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$ e $p \in [1, +\infty]$.
Allora lo spazio di Sobolev $W^{1,p}((a,b))$ è <u>completo</u> rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$.
In particolare, per $p = 2$, $W^{1,2}((a,b))$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(u,v)_{W^{1,2}((a,b))}$.

Dimostrazione.
Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$. Allora, u_n e u'_n sono entrambe di Cauchy in $L^p((a,b))$ e dunque, per la completezza degli spazi L^p, avremo $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ e $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} g$ in $L^p((a,b))$ per qualche $u, g \in L^p((a,b))$. Dunque, data $\varphi \in C_0^1((a,b))$ avremo

$$-\int_a^b g\varphi \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} -\int_a^b u'_n\varphi = \int_a^b u_n\varphi' \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b u\varphi',$$

cioè $u' = g$ e $\|u_n - u\|_{W^{1,p}((a,b))} = \|u_n - u\|_{L^p((a,b))} + \|u'_n - g\|_{L^p((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$ $\square$

Anche per gli spazi di Sobolev c'è una caratterizzazione equivalente data dal seguente risultato.

Teorema (Caratterizzazione degli spazi di Sobolev).
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$, $p \in (1, +\infty]$ *e* $u \in L^p((a,b))$.
Allora, le seguenti condizioni si equivalgono:

a. $u \in W^{1,p}((a,b))$.

b. Esiste $C > 0$ *tale che* $\left|\int_a^b u\varphi'\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}((a,b))}$ *per ogni* $\varphi \in C_0^1((a,b))$, *con* $p' \in [1, +\infty)$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

c. Esiste $C > 0$ *tale che* $\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p((c,d))} \le C|h|$ *per ogni* c, d, h *tale che* $[c,d] \subset (a + |h|, b - |h|)$.

Se $p = 1$, *allora a implica b e c, che sono tra loro equivalenti.*
In tutti i casi, se $u \in W^{1,p}((a,b))$, *allora in b e c si può scegliere* $C = \|u'\|_{L^p((a,b))}$.

Dimostrazione.

$a \Rightarrow b$ Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ allora per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$ vale

$$\left|\int_a^b u\varphi'\right| = \left|-\int_a^b u'\varphi\right| \le \|u'\|_{L^p((a,b))}\|\varphi'\|_{L^{p'}((a,b))}.$$

$b \Rightarrow a$ Per ipotesi, il funzionale lineare $L : \varphi \mapsto -\int_a^b u\varphi'$ è continuo su $C_0^1((a,b))$ rispetto a $\|\cdot\|_{L^{p'}((a,b))}$, dunque può essere esteso per densità a un funzionale $\widetilde{L} \in \left(L^{p'}((a,b))\right)^*$, che quindi sarà del tipo $\widetilde{L}f = \int_a^b fg$ per qualche $g \in L^p((a,b))$. Avremo dunque, per $\varphi \in C_0^1((a,b))$,

$$-\int_a^b u\varphi' = L\varphi = \widetilde{L}\varphi = \int_a^b \varphi g,$$

cioè $u \in W^{1,p}((a,b))$.

$b \Rightarrow c$ Prendendo $\varphi \in C_0^1((a,b))$ e h tale che $\varphi \equiv 0$ all'infuori di $(a + |h|, b - |h|)$: avremo

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{u(x+h) - u(x)}{h}\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{u(x+h)\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x - \int_a^b \frac{u\varphi}{h} \\
&= \int_a^b \frac{u(y)\varphi(y-h)}{h}\mathrm{d}y - \int_a^b \frac{u\varphi}{h} \\
&= -\int_a^b u(y)\frac{\varphi(y) - \varphi(y-h)}{h}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Poiché, nell'ultima formula, $\left|\frac{\varphi(y) - \varphi(y-h)}{h}\right| \le C$ e $u \in L^1((a,b))$, allora possiamo applicare il teorema di convergenza dominata e il limite per $h \to 0$ sarà $-\int_a^b u\varphi'$, e dunque per ipotesi avremo

$$\left|\int_a^b \frac{u(x+h) - u(x)}{h}\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}((a,b))},$$

con C indipendente da h. Consideriamo ora la disuguaglianza precedente con $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_0^1((a,b))$ tale che $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} |u(\cdot + h) - u|^{p-2}(u(\cdot + h) - u)$ in $L^{p'}((a,b))$: otterremo

$$\int_a^b \frac{|u(\cdot + h) - u|^p}{h} \le C\|u(\cdot + h) - u\|^{p-1}_{L^p((a,b))},$$

cioè $\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p((a,b))} \le C|h|$.

$c \Rightarrow b$ Per ipotesi, se $\varphi \in C_0^1((a,b))$ e $\varphi \equiv 0$ all'infuori di $(a+|h|, b-|h|)$, allora

$$\left|\int_a^b \frac{u(\cdot+h)-u}{h}\varphi\right| \leq \left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{h}\right\|_{L^p((a,b))} \|\varphi\|_{L^{p'}((a,b))} \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}((a,b))}.$$

Inoltre, ragionando come nel punto precedente, otteniamo $\displaystyle\int_a^b \frac{u(\cdot+h)-u}{h}\varphi \underset{h\to 0}{\to} -\int_a^b u\varphi'$ e dunque $\displaystyle\left|\int_a^b u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}((a,b))}$.

□

Corollario.
Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ per qualche $p > 1$ e $H \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ verifica una tra: $H(0) = 0$; $p = \infty$; $a, b \in \mathbb{R}$; allora $H(u) \in W^{1,p}((a,b))$ e $H(u)' = H'(u)u'$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, $H(u) \in L^p((a,b))$: infatti, se $H(0) = 0$ allora $\displaystyle\int_a^b |H(u)|^p \leq \|H\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})}^p \int_a^b |u|^p < +\infty$, e analogamente negli altri casi; dunque possiamo applicare il Teorema di caratterizzazione degli spazi di Sobolev. Se $u \in W^{1,p}((a,b))$, allora $\|u(\cdot+h)-u\|_{L^p((c,d))} \leq C|h|$ per c, d, h come nel teorema precedente. Dunque, $\|H(u(\cdot+h)) - H(u)\|_{L^p((c,d))} \leq \|H\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})}\|u(\cdot+h)-u\|_{L^p((c,d))} \leq C|h|$ e quindi anche $H(u)$ verifica la stessa condizione, per cui il teorema e ottenere $H(u) \in W^{1,p}((a,b))$. Per quanto visto in precedenza, $H(u)$ sarà derivabile quasi ovunque e la derivata debole coincide con quella usuale, cioè $H'(u)u'$. □

Osservazione.

1. *Se $p = 1$ allora b e c non implicano a: ad esempio, $u(x) = \mathrm{segno}(x)$ verifica, per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$,*

$$\left|\int_a^b u\varphi'\right| \leq 2|\varphi(0)| \leq 2\|\varphi\|_{L^\infty((a,b))} \qquad \int_a^b |u(\cdot+h)-u| \leq 2|h|,$$

   nonostante u non abbia derivata debole e quindi $u \notin W^{1,1}((a,b))$ se $a < 0 < b$. In qualche senso, si potrebbe dire che u ha come derivata debole non una funzione in L^1_{loc} ma piuttosto una misura, data da $2\delta_0$.

2. *Se $p = +\infty$, la condizione c equivale a essere una funzione Lipschitz, dunque dal teorema deduciamo $W^{1,\infty}((a,b)) = \mathrm{Lip}((a,b))$; questo è coerente con quanto visto per $u(x) = |x|$.*

Lezioni 41-42 (04/05/2021)

Per studiare le prossime proprietà degli spazi di Sobolev è necessario introdurre alcune nozioni, che sono fondamentali in analisi funzionale e lo saranno anche nell'ultima parte del corso.

Definizione.
Siano X, Y spazi normati e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.
*A si dice operatore **compatto** se per ogni successione limitata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X la sua immagine $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha estratte convergenti in Y; in altre parole, A è compatto se $A(K) \subset Y$ è relativamente compatto in Y per ogni insieme limitato $K \subset X$.*
L'insieme degli operatori compatti si indica con $\mathcal{K}(X, Y)$ e, se $X = Y$, con $\mathcal{K}(X)$.

Proposizione.
Sia X uno spazio normati e Y uno spazio di un Banach e $\mathcal{K}(X, Y)$ l'insieme degli operatori compatti da X a Y.
Allora $\mathcal{K}(X, Y) \lhd \mathcal{L}(X, Y)$:

Dimostrazione.
Si verifica facilmente che gli operatori compatti formano un sottospazio lineare. Inoltre, se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{K}(X, Y)$ tale che $A_n \underset{n\to+\infty}{\to} A$, allora per ogni successione limitata $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in X $\{A_n x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ avrà, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un'estratta convergente che è in particolare di Cauchy; dunque, se $\|x_m\| \leq C$ allora per N, N' sufficientemente grandi avremo $\|A - A_N\| \leq \varepsilon$ e $\|A_N x_n - A_N x_m\| \leq \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N'$, da cui

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - Ax_m\| &\leq \|Ax_n - A_N x_n\| + \|A_N x_n - A_N x_m\| + \|A_N x_m - Ax_m\| \\
&\leq \|A - A_N\|(\|x_n\| + \|x_m\|) + \varepsilon \\
&\leq (2C + 1)\varepsilon,
\end{aligned}$$

dunque $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi converge, e quindi A è compatto. □

Osservazione.

1. *In generale, ogni $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ manda limitati in limitati e relativamente compatti in relativamente compatti, ma non limitati in relativamente compatti.*

2. *Se uno tra $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ è compatto, allora $B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z)$ è compatto.*

Esempio.

1. *Se $\dim Y < +\infty$, allora ogni operatore lineare è compatto perché tutti gli insiemi limitati in Y sono relativamente compatti, e allo stesso modo se* ran (A) *ha dimensione finita; grazie alla proposizione precedente, sono operatori compatti anche i limiti, in norma operatoriale, degli operatori di rango finito.*

2. *La mappa $A : \ell_2 \to \ell_2$ data da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ è compatta, perché è il limite della successione di operatori di rango finito A_n dati da $A_n x(k) = \begin{cases} \dfrac{x(k)}{k} & se\ k \leq n \\ 0 & se\ k > n \end{cases}$: infatti,*

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x(k)^2}{k^2}} \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{\|x\|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

   Un risultato analogo si ottiene prendendo, al posto di $\dfrac{x(k)}{k}$, $x(k)a_k$ per una qualsiasi successione infinitesima a_k.

3. *Se $Y = X$ e $\dim X = +\infty$ allora l'identità $\mathbb{I}_X : X \to X$ non è un operatore compatto perché la palla unità è limitata ma la sua immagine, che è la stessa palla unità, non è relativamente compatta.*

Definizione.
Siano $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *spazi normati tali che* $X \subset Y$.
Si dice che X ***si immerge in modo continuo*** *in* Y *se l'inclusione* $i : X \to Y$ *data da* $i(x) = x$ *è* *continua, cioè* $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ *per ogni* $x \in X$ *e qualche* $C > 0$. *L'immersione continua si denota con il simbolo* $X \hookrightarrow Y$.
Si dice che X ***si immerge in modo compatto*** *in* Y *se l'inclusione* $i : X \to Y$ *è* *compatta, cioè se per ogni successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *limitata in* X *allora, a meno di estratte,* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ *rispetto a* $\|\cdot\|_Y$ *per qualche* $y \in X$.

Esempio.

1. *Ogni sottospazio lineare* $E \subset X$ *di uno spazio normato* X *si immerge in modo continuo in* X; *l'immersione è compatta se e solo se* $\dim E < +\infty$.

2. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora* $L^p((a, b))$ *si immerge in modo continuo in* $L^q((a, b))$ *se* $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ *e analogamente* $W^{1,p}((a, b))$ *si immerge in modo continuo in* $W^{1,q}((a, b))$; *inoltre* $C^{0,\alpha}([a, b]) \hookrightarrow C^{0,\beta}([a, b])$ *se* $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ *e* $C^{0,\alpha}([a, b]) \hookrightarrow L^p((a, b))$ *per ogni* $p \in [1, +\infty]$, $\alpha \in [0, 1]$.

3. *Negli spazi di successioni l'immersione continua* $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ *vale per* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Mostreremo ora che gli spazi di Sobolev si immergono nei ben noti spazi di funzioni Hölderiane oppure L^p. Per dimostrare questo risultato utilizzeremo un fondamentale teorema di compattezza.

Teorema (di Ascoli-Arzelà)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione limitata in* $C([a, b])$ *ed* *equicontinua, cioè tale che*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad |x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Allora, u_n *ha estratte convergenti in* $C([a, b])$.

Corollario.
$C^{0,\alpha}([a, b])$ *si immerge in modo compatto in* $C^{0,\beta}([a, b])$ *se* $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$.

Dimostrazione.
Prendiamo una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in $C^{0,\alpha}([a, b])$: se $|x - y| \leq \delta$, allora $|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x - y|^\alpha \leq C\delta^\alpha$ e dunque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua e quindi, se $a, b \in \mathbb{R}$, dal Teorema di Ascoli-Arzelà $\{u_n\}$ avrà un estratta convergente a u in $C([a, b])$; pertanto, a meno di estratte, per $\beta < \alpha$ avremo

$$\begin{aligned}
&\frac{|u_n(x) - u(x) - (u_n(y) - u(x))|}{|x - y|^\beta} \\
= \;& \left|\frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x - y|^\beta} + \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^\beta}\right|^{\frac{\alpha}{\beta}} (|u_n(x) - u(x) + u(y) - u_n(y)|)^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \\
\leq \;& \left(\frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x - y|^\beta} + \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} (|u_n(x) - u(x)| + |u(y) - u_n(y)|)^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \\
\leq \;& C(2\|u_n - u\|_{L^\infty((a,b))})^{1-\frac{\alpha}{\beta}},
\end{aligned}$$

e quindi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ anche in $C^{0,\alpha}([a, b])$. □

Teorema (di immersione di Sobolev)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$, $p \in [1, +\infty]$ *e* $u \in W^{1,p}((a, b))$. *Allora,* $u \in C^{0,1-\frac{1}{p}}([a, b])$ *e in particolare* u *è continua e limitata su* (a, b).
Inoltre, $W^{1,p}((a, b))$ *si immerge in modo continuo in* $C^{0,1-\frac{1}{p}}([a, b])$.
Infine, se $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $p > 1$, *allora* $W^{1,p}((a, b))$ *si immerge in modo compatto in* $C^{0,\alpha}([a, b])$ *per ogni* $\alpha < 1 - \dfrac{1}{p}$.

Esempio.
$u(x) = |x|^\alpha$, se $0 < \alpha \leq 1$, appartiene a $C^{0,\alpha}([-1,1])$ e, come abbiamo visto, anche a $W^{1,p}((-1,1))$ per $p < \dfrac{1}{1-\alpha}$, cioè $\alpha < 1 - \dfrac{1}{p}$.

Osservazione.

1. *Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $C^{0,\alpha}([a,b]) \hookrightarrow L^q((a,b))$ per ogni $q \in [1,+\infty]$ e $\alpha \in [0,1]$; dunque, dal Teorema di immersione di Sobolev deduciamo che $W^{1,p}((a,b))$ si immerge in modo compatto in ogni $L^q((a,b))$.*

2. *Se $a = -\infty$ oppure $b = +\infty$, nessuna delle precedenti immersioni è compatta: fissata $u_0 \in C_0^1((a,b)) \setminus \{0\}$, la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da $u_n(x) = u_0(x \pm n)$ è limitata in ogni $W^{1,p}((a,b))$, perché $\|u_n\|_{W^{1,p}((a,b))} = \|u_0\|_{W^{1,p}((a,b))}$; tuttavia, u_n non converge in nessun $C^{0,\alpha}([a,b])$ né in $L^q((a,b))$, perché il limite puntuale è $u \equiv 0$, ma u_n non può convergere a zero perché $\|u_n\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} = \|u_0\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}$ e $\|u_n\|_{L^q((a,b))} = \|u_0\|_{L^q((a,b))}$.*

3. *Le immersioni $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}([a,b])$ e $W^{1,1}((a,b)) \hookrightarrow C([a,b])$ non sono mai compatte: infatti, supponendo a meno di traslazioni $0 \in (a,b)$, fissiamo $u_0 \in C_0^1((a,b)) \setminus \{0\}$ e definiamo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come $u_n(x) := \dfrac{u(nx)}{n^{1-\frac{1}{p}}}$; poiché*

$$\|u_n\|_{L^p((a,b))} = \frac{\|u_0\|_{L^p((a,b))}}{n} \qquad\qquad \|u_n'\|_{L^p((a,b))} = \|u_0'\|_{L^p((a,b))},$$

la successione è limitata in $W^{1,p}((a,b))$, converge puntualmente a zero, ma la convergenza non in norma perché

$$\sup_{x,y\in(a,b),x\neq y} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \sup_{x',y'\in(a,b),x'\neq y'} \frac{|u(x') - u(y')|}{|x'-y'|^{1-\frac{1}{p}}} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Analogamente, definendo $u_n(x) = u(nx)$ si ottiene una successione limitata in $W^{1,1}((a,b))$ che non ha estratte convergenti in $L^\infty((a,b))$.

Lezioni 43-44-45 (07/05/2021)

Dimostrazione del Teorema di immersione di Sobolev.
Prendiamo $u \in W^{1,p}((a,b))$ e mostriamo che $u \in L^\infty((a,b))$. Nel caso $p = \infty$ è ovvio, viceversa se $u \in L^p((a,b))$ per $p \in [1,+\infty)$, allora esisterà $x_0 \in (a,b)$ tale che $|u(x_0)| \leq \delta \|u\|_{L^p((a,b))}$, con $\delta = \dfrac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}$ se $a,b \in \mathbb{R}$, mentre se $b-a = +\infty$ è possibile scegliere qualsiasi $\delta > 0$. Inoltre, poiché $H(t) = |t|^{p-1}t$ è di classe C^1, $H(u)$ è derivabile in senso debole e quindi si può applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &= |H(u(x))| \\
&\leq |H(u(x_0))| + \int_{x_0}^{x} |H'(u)|u' \\
&\leq |u(x_0)|^p + \int_a^b p|u|^{p-1}u' \\
&\leq \delta \|u\|^p_{L^p((a,b))} + p\|u\|^{p-1}_{L^p((a,b))}\|u'\|_{L^p((a,b))} \\
&\leq C\left(\|u\|^p_{L^p((a,b))} + \|u'\|^p_{L^p((a,b))}\right)
\end{aligned}$$

e dunque, passando all'estremo superiore, $u \in L^\infty((a,b))$.
Applicando poi a u il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'\right| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_y^x |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}((a,b))},$$

e analogamente nel caso $p = +\infty$; questo dimostra anche l'immersione continua in $C^{0,1-\frac{1}{p}}([a,b])$, da cui segue l'immersione compatta negli altri $C^{0,\alpha}([a,b])$ grazie al corollario precedente. $\square$

Consideriamo ora un sottospazio particolarmente interessante degli spazi di Sobolev.

Definizione.
Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $p \in [1,+\infty]$.
Definiamo lo spazio delle funzioni di Sobolev nulle al bordo

$$W^{1,p}_0((a,b)) := \{u \in W^{1,p}((a,b)),\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Osservazione.

1. *La definizione è ben posta perché, dal Teorema di immersione di Sobolev, $W^{1,p}((a,b)) \subset C^{0,1-\frac{1}{p}}([a,b])$ e dunque è continua fino ai punti di bordo.*

2. *$W^{1,p}_0((a,b)) \lhd W^{1,p}((a,b))$: che sia un sottospazio lineare è immediato, e inoltre se $u_n \in W^{1,p}_0((a,b))$ e $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ in $W^{1,p}((a,b))$, allora*

$$|u(a)| = |u_n(a) - u(a)| \leq \|u_n - u\|_\infty \leq \|u_n - u\|_{W^{1,p}((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

   e allo stesso modo $u(b) = 0$.

3. *$W^{1,p}_0((a,b)) \underset{\neq}{\lhd} W^{1,p}((a,b))$ perché ad esempio le costanti appartengono a $W^{1,p}((a,b))$ ma non a $W^{1,p}_0((a,b))$.*

4. *Nel caso in cui $a = -\infty$ oppure $b = +\infty$ è possibile definire $W^{1,p}_0((a,b))$ imponendo come condizioni $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ oppure $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$; tuttavia, se $p < +\infty$ i limiti all'infinito sono sempre nulli negli spazi di Sobolev e quindi in particolare $W^{1,p}_0(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$. Per*

vederlo, notiamo innanzi tutto che per ogni $u \in L^p(\mathbb{R})$ esiste una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ per cui $u(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$; se poi $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, allora applicando il teorema fondamentale del calcolo a $|u|^{p-1}u$ si ottiene:

$$\begin{aligned}|u(y_n)|^p &= \left||u(x_n)|^{p-1}u(x_n) + \int_{x_n}^{y_n} p|u|^{p-1}u'\right| \\ &\leq |u(x_n)|^p + \int_{x_n}^{y_n} p|u|^{p-1}|u'| \\ &\leq |u(x_n)|^p + \int_{x_n}^{y_n} (|u|^p + (p-1)|u'|^p) \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 0,\end{aligned}$$

con l'ultimo passaggio al limite giustificato dal Teorema di convergenza dominata con maggiorante integrabile data da $|u|^p + (p-1)|u'|^p$.

Teorema (Disuguaglianza di Poincaré)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W_0^{1,p}((a,b))$.
Allora esiste $C > 0$, indipendente da u, tale che $\|u\|_{W^{1,p}((a,b))} \leq C\|u'\|_{L^p((a,b))}$.
In particolare, una norma equivalente su $W_0^{1,p}((a,b))$ è data da $\|u'\|_{L^p((a,b))}$.

Dimostrazione.
Sarà sufficiente dimostrare che $\|u\|_{L^p((a,b))} \leq C\|u'\|_{L^p((a,b))}$ per qualche $C > 0$; questo seguirà applicando a u il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza di Hölder:

$$\int_a^b |u(x)|^p \mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x u'\right|^p \mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\int_a^x |u'|^p\right)(x-a)^{p-1}\mathrm{d}x \leq (b-a)^p \int_a^b |u'|^p;$$

nel caso $p = +\infty$ similmente si ottiene

$$|u(x)| \leq \left|\int_a^x u'\right| \leq \int_a^b |u'| \leq (b-a)\|u'\|_\infty,$$

dunque per ogni p si ha $\|u\|_{L^p((a,b))} \leq (b-a)\|u'\|_{L^p((a,b))}$. □

Osservazione.

1. *Come segue dalla dimostrazione, la disuguaglianza di Poincaré vale anche per le funzioni che verificano solo $u(a) = 0$ oppure solo $u(b) = 0$.*
2. *La disuguaglianza di Poincaré non vale su $W^{1,p}((a,b))$ perché ad esempio le funzioni costanti $u \equiv C$ verificano $\|u'\|_{L^p((a,b))} = 0$ ma $\|u\|_{L^p((a,b))} \neq 0$.*
3. *Nel caso $p = 2$, un prodotto scalare equivalente su $W_0^{1,2}((a,b))$ è dato da $(u,v) = \int_a^b u'v'$; più in generale, è possibile scegliere $(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)$ per qualsiasi $p \in L^\infty((a,b)), q \in L^1((a,b))$ con $p \geq \delta > 0$ e $q \geq 0$.*

Grazie alla disuguaglianza di Poincaré deduciamo che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense anche in questi spazi $W_0^{1,p}$.

Lemma.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $p \in [1, +\infty)$.
Allora, lo spazio delle funzioni lisce a supporto compatto $C_0^\infty((a,b))$ è denso in $W_0^{1,p}((a,b))$.

Dimostrazione.
Fissata $u \in W_0^{1,p}((a,b))$, per la densità di $C_0^\infty((a,b))$ esisterà $\psi_n \in C_0^\infty((a,b))$ tale che $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\to} u'$ in $L^p((a,b))$; presa $\eta_0 \in C^\infty((a,b))$ che valga costantemente 0 in un intorno di a e costantemente 1 in un intorno di b, definiamo $\varphi_n(x) := \int_a^x \psi_n - \left(\int_a^b \psi_n\right)\eta_0(x)$. La successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in $C_0^\infty((a,b))$ perché per x vicino ad a abbiamo $\int_a^x \psi_n = 0 = \eta_0(x)$ mentre per x vicino a b vale $\int_a^x \psi_n = \int_a^b \psi_n$ e $\eta_0(x) = 1$, e inoltre approssima u_n in $W^{1,p}((a,b))$: essendo $\int_a^b u' = u(b) - u(a) = 0$, avremo

$$\varphi_n'(x) = \psi_n'(x) - \left(\int_a^b (\psi_n - u')\right)\eta_0(x),$$

dunque applicando la Disuguaglianza di Poincaré si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - u\|_{W^{1,p}((a,b))} &\leq C\|\varphi_n' - u'\|_{L^p((a,b))} \\
&\leq C\left(\left|\int_a^b (\psi_n - u')\right| \|\eta_0'\|_{L^p((a,b))} + \|\psi_n - u'\|_{L^p((a,b))}\right) \\
&\leq C\|\psi_n - u'\|_{L^p((a,b))} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

□

Corollario.

1. *Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ allora $\int_a^b uv' = -\int_a^b u'v$ per ogni $v \in W_0^{1,1}((a,b))$*
2. *Se $u, v \in W^{1,p}((a,b))$, allora $uv \in W^{1,p}((a,b))$ e $(uv)' = uv' + u'v$.*
   Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ e $|u| \geq \delta > 0$ allora $\frac{1}{u} \in W^{1,p}((a,b))$ e $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Dimostrazione.

1. Se $v \in W_0^{1,1}((a,b))$, allora per il lemma precedente esiste $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $W_0^{1,1}((a,b))$, dunque applicando il Teorema di immersione di Sobolev si ottiene:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b u(\varphi_n' - v')\right| &\leq \|u\|_{L^\infty((a,b))}\|\varphi_n' - v'\|_{L^1((a,b))} \leq C\|u\|_{W^{1,p}((a,b))}\|\varphi_n - v\|_{W^{1,1}((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \\
\left|\int_a^b u'(\varphi_n - v)\right| &\leq \|u'\|_{L^p((a,b))}\|\varphi_n - v\|_{L^{p'}((a,b))} \leq C\|u\|_{W^{1,p}((a,b))}\|\varphi_n - v\|_{W^{1,1}((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

   e dunque, usando φ_n nella definizione di derivata debole di u,

$$\int_a^b uv' \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int_a^b u\varphi_n' = -\int_a^b u'\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\int_a^b u'v.$$

2. Fissata $\varphi \in C_0^1((a,b))$, considero $\eta_0 \in C_0^\infty((a,b))$ che valga 1 sul supporto di φ, in modo che $\eta_0\varphi = \varphi$; dunque $\eta_0 u \in W_0^{1,p}((a,b))$ e, se $p < +\infty$, esiste una successione $\{\psi_n\}$ in $C_0^\infty((a,b))$ tale che $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\to} \eta_0 u$ in $W^{1,p}((a,b))$, quindi

$$\int_a^b |\psi_n'\varphi - u'\varphi|^p = \int_a^b |\psi_n' - \eta_0 u'|^p|\varphi|^p \leq C\int_a^b |\psi_n' - \eta_0 u'|^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   e analogamente, grazie al Teorema di immersione di Sobolev,

$$\psi_n\varphi' \underset{n\to+\infty}{\to} u\varphi' \qquad \psi_n\varphi \underset{n\to+\infty}{\to} u\varphi \qquad \text{in} \quad L^\infty((a,b)).$$

Pertanto, utilizzando la formula di derivazione del prodotto e poi ragionando come nella dimostrazione del punto precedente,

$$\int_a^b uv\varphi' \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int_a^b \psi_n v\varphi' = -\int_a^b (\psi_n v' + \psi_n' v)\varphi \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -\int_a^b (uv' + u'v)\varphi;$$

infine, poiché dai teoremi di immersione di Sobolev si ottiene $u, v \in L^\infty((a,b))$, allora $(uv)' \in L^p((a,b))$.
Se $p = +\infty$, allora $u, v \in W^{1,\infty}((a,b))$ apparterranno anche a $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}((a,b))$ per ogni $p < \infty$; applicando il ragionamento precedente sul supporto di φ, che è limitato, si ottiene $(uv)' = uv' + u'v$, ma essendo $u, v, u', v' \in L^\infty((a,b))$ deduciamo $uv \in W^{1,\infty}((a,b))$.
L'ultima affermazione si dimostra in maniera analoga.

□

Osservazione.

1. *Lo spazio $C_0^\infty((a,b))$ non può essere denso in $W^{1,p}((a,b))$; infatti, se lo fosse, dal Teorema di immersione di Sobolev potremmo approssimare in norma $\|\cdot\|_\infty$ una funzione che non si annulla sul bordo con funzioni a supporto compatto, che è impossibile. In particolare, $W_0^{1,p}((a,b))$ si può caratterizzare come la chiusura di $C_0^\infty((a,b))$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$.*

2. *$C_0^\infty((a,b))$ non può essere denso neanche in $W^{1,\infty}((a,b))$, perché se $u' \in L^\infty((a,b)) \setminus C([a,b])$ non può essere approssimata in norma $\|\cdot\|_{L^\infty((a,b))}$ con funzioni in $C_0^\infty((a,b))$.*

Possiamo finalmente applicare queste proprietà degli spazi di Sobolev per studiare alcune equazioni differenziali chiamate <u>problemi ai valori al bordo</u>.

Definizione.
*Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty((a,b))$, $q, f \in L^1((a,b))$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$ e $f \in L^2((a,b))$.
Si dice che $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ è una **soluzione debole** del problema*

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

se $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ e $(-pu')$ ha una derivata debole su (a,b) che verifica $(-pu')' + qu = f$ q.o. su (a,b); in altre parole, se per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$,

$$\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi) = \int_a^b f\varphi.$$

Osservazione.

1. *Le soluzioni deboli verificano $\displaystyle\int_a^b (pu'v' + quv) = \int_a^b fv$ anche per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$; infatti, prendendo una successione $\{\varphi_n\}$ che approssima v in $W^{1,2}((a,b))$, essendo $pu', qu, f \in L^2((a,b))$, avremo*

$$\int_a^b (pu'v' + quv) \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int_a^b (pu'\varphi_n' + qu\varphi_n) = \int_a^b f\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \int_a^b fv.$$

2. *Se $p \in C^1([a,b])$, $q, f \in C([a,b])$ e $u \in C^2([a,b])$ è una soluzione in senso classica dell'equazione differenziale allora è anche una soluzione debole, come si può vedere integrando per parti.*

3. *In generale, se f, p, q non sono regolari, una soluzione debole u non sarà di classe C^2: ad esempio, $u(x) = \dfrac{x(1-|x|)}{2}$ risolve $\begin{cases} -u''(x) = \mathrm{segno}(x) & x \in (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$.*

4. *Se il problema ha condizioni al bordo non omogenee del tipo* $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$ *ci si può ricondurre al caso* $\alpha = \beta = 0$, *purché* $p \in W^{1,1}((a,b))$, *scrivendo* $u(x) = v(x) + \dfrac{(\alpha-\beta)x + \beta a - \alpha b}{b-a}$, *con* v *soluzione di* $\begin{cases} (-pv')' + qv = \widetilde{f} & su\ (a,b) \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}$ *per* $\widetilde{f}(x) := f(x) + \dfrac{\alpha-\beta}{b-a}p'(x) - \dfrac{(\alpha-\beta)x + \beta a - \alpha b}{b-a}q(x)$. *Anche se la nozione di soluzione debole coincide con quella classica, sotto le opportune ipotesi di regolarità per* p, q, f *che abbiamo fatto in precedenza, le soluzioni non possono essere trovate con i metodi visti per i problemi di Cauchy del tipo* $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u'(a) = 0 \end{cases}$, *perché nel nostro caso le condizioni al bordo sono su due punti diversi.*

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $p \in L^\infty((a,b)), q, f \in L^1((a,b))$ *con* $q \geq 0$ *e* $p \geq \delta > 0$ *e* $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ *è una soluzione debole del problema* $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$. *Allora,* $u \in W_0^{1,\infty}((a,b))$.
Se poi $p \in W^{1,p}((a,b))$ *e* $q, f \in L^p((a,b))$ *per qualche* $p \in [1, +\infty]$, *allora* $u' \in W^{1,p}((a,b)) \subset C^{0,1-\frac{1}{p}}([a,b])$ *e in particolare* $u \in C^1([a,b])$.
Se $p \in C^{k+1}([a,b])$ *e* $q, f \in C^k([a,b])$ *per qualche* $k \in \mathbb{N}$, *allora con* $u \in C^{k+2}([a,b])$ *e in particolare è una soluzione classica.*

Lezioni 46-47 (11/05/2021)

Dimostrazione della proposizione precedente.
Per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$ abbiamo $\int_a^b pu'\varphi' = -\int_a^b \varphi(qu-f)$, ma dal Teorema di immersione di Sobolev sappiamo che $u \in L^\infty((a,b))$ e dunque $qu - f \in L^1((a,b))$; quindi abbiamo $pu' \in W^{1,1}((a,b))$ e in particolare $pu' \in L^\infty((a,b))$, ma essendo anche $\frac{1}{p} \in L^\infty((a,b))$ alora $u' = \frac{1}{p}pu' \in L^\infty((a,b))$, cioè $u \in W^{1,\infty}((a,b))$. Assumendo poi $q, f \in L^p((a,b))$, ragionando come prima otteniamo $(pu')' = qu - f \in L^p((a,b))$; essendo $p \in W^{1,p}((a,b)$, dal corollario precedente avremo anche $\frac{1}{p} \in W^{1,p}((a,b))$ e $u' = \frac{1}{p}pu' \in W^{1,p}((a,b))$.
Dimostriamo l'ultima affermazione ragionando per induzione: essendo $u \in C([a,b])$ per il Teorema di immersione di Sobolev, se $q, f \in C([a,b])$ allora $(pu')' = qu - f \in C([a,b])$ e, supponendo anche $p' \in C([a,b])$, si ottiene $u' = \frac{1}{p}pu' \in C^1([a,b])$, dunque abbiamo dimostrato il caso $k = 0$. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per $k-1$ e dimostriamola per k: $p \in C^{k+1}([a,b])$ e $q, f \in C^k([a,b])$, allora in particolare $p \in C^k([a,b])$ e $q, f \in C^{k-1}([a,b])$ e dunque per ipotesi induttiva $u \in C^{k+1}([a,b])$; allora, ragionando come prima, $(pu')' = qu - f \in C^k([a,b])$ e dunque $u \in C^{k+2}([a,b])$. $\square$

L'utilità della nuova nozione di soluzioni deboli segue dal fatto che possono essere trovate variazionalmente, cioè come punti critici di un opportuno funzionale definito su $W_0^{1,2}((a,b))$.

Lemma.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty((a,b)), q, f \in L^1((a,b))$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$, e $F : W_0^{1,2}((a,b)) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) := \int_a^b \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right).$$

Se $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ è un punto di minimo per F, cioè $F(u) \leq F(v)$ per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$, allora u è soluzione debole di $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, dalle assunzioni su p, q, f segue che F è ben definito. Inoltre, se u è un punto di minimo per F, allora per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$ fissato la mappa $g : t \mapsto g(t) = F(u + t\varphi)$ ha un punto di minimo in $t = 0$; scrivendo

$$g(t) = \int_a^b \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right) + t\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi) + t^2\int_a^b \left(\frac{p}{2}\varphi'^2 + \frac{q}{2}\varphi^2\right),$$

allora otteniamo $0 = g'(0) = \int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi)$. $\square$

Esempio.
Nel caso $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, la soluzione di $\begin{cases} -u'' = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ è data da una doppia primitiva di $-f$ con l'aggiunta di una funzione affine che annulli le condizioni al bordo, cioè

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^y f\right) dy - \int_a^x \left(\int_a^y f\right) dy.$$

Lemma.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in $W_0^{1,2}((a,b))$.
Allora u_n ha un'estratta che converge debolmente a u in $W_0^{1,2}((a,b))$ e converge a u anche in $L^\infty((a,b))$.

Dimostrazione.
Se $\{u_n\}$ è limitata in $W_0^{1,2}((a,b))$, essendo $W_0^{1,2}((a,b))$ riflessivo in quanto spazio di Hilbert, dal Teorema di Banach-Alaoglu avrà un'estratta debolmente convergente a $u \in W_0^{1,2}((a,b))$. Applicando il Teorema di immersione di Sobolev, dalla limitatezza in $W_0^{1,2}((a,b))$ di $\{u_n\}$ otteniamo anche un'estratta convergente a qualche v in $L^\infty((a,b))$. Per concludere rimane da verificare che $u = v$: per vederlo, osserviamo che per ogni $f \in L^1((a,b))$ il funzionale $u \mapsto \int_a^b uf$ è lineare e continuo su $W_0^{1,2}((a,b))$, e dunque dalla convergenza debole seguirà che

$$\int_a^b u_n f \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b uf,$$

cioè che $u \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} u$ in $L^\infty((a,b))$; del resto, poiché $u \underset{n\to+\infty}{\to} v$ in $L^\infty((a,b))$ allora

$$\left|\int_a^b u_n f - \int_a^b vf\right| \le \int_a^b |u_n - v||f| \le \|u_n - v\|_{L^\infty((a,b))}\|f\|_{L^1((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

dunque $\int_a^b uf = \int_a^b vf$ e quindi dovrà essere $u = v$. □

Teorema (Esistenza e unicità di soluzioni deboli)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty((a,b)), q, f \in L^1((a,b))$ con $q \ge 0$ e $p \ge \delta > 0$ e F come nel Lemma precedente.
Allora, F ammette un punto di minimo, che è l'unica soluzione debole di $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, F è limitato dal basso perché, considerando su $W_0^{1,2}((a,b))$ la norma data da $\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))} := \int_a^b \left(pu'^2 + qu^2\right)$, si ottiene:

$$F(u) \ge \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))}}{2} - \|f\|_{L^1((a,b))}\|u\|_{L^\infty((a,b))} \ge \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))}}{2} - \|f\|_{L^1((a,b))}\|u\|_{W_0^{1,2}((a,b))} \ge -C.$$

Sia ora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante, cioè tale che $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf_{W_0^{1,2}((a,b))} F$; dovrà essere limitata, perché ragionando come prima si otterrebbe che $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ se $\|u_n\|_{W_0^{1,2}((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
Essendo $\{u_n\}$ limitata, dal lemma precedente avrà un estratta convergente a u debolmente e in $L^\infty((a,b))$, dunque $\int_a^b fu_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b fu$, e poiché la norma è inferiormente semi-continua rispetto alla convergenza debole avremo $\int_a^b \left(pu'^2 + qu^2\right) \le \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b \left(pu_n'^2 + qu_n^2\right)$; dunque, poiché u_n minimizza F,

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{W_0^{1,2}((a,b))} F \le F(u),$$

cioè u è un punto di minimo per F e quindi, per il lemma precedente, è soluzione debole dell'equazione differenziale.
Mostriamo infine l'unicità della soluzione: se esistessero due soluzioni $u, v \in W_0^{1,2}((a,b))$, allora dall'osservazione precedente avremmo $\int_a^b (p(u' - v')w' + q(u - v)w) = 0$ per ogni $w \in W_0^{1,2}((a,b))$; pertanto, scegliendo $w = u - v$ otteniamo $\int_a^b \left(p(u' - v')^2 + q(u - v)^2\right) = 0$, cioè $u = v$. □

Osservazione.

1. *L'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli può essere dimostrata equivalentemente utilizzando il teorema di Riesz-Fréchet su* $W_0^{1,2}((a,b))$ *con il prodotto scalare* $(u,v)_{W_0^{1,2}((a,b))} = \int_a^b (pu'v' + quv)$*: infatti, grazie al Teorema di immersione di Sobolev il funzionale lineare* $v \mapsto \int_a^b fv$ *è lineare e continuo su* $W_0^{1,2}((a,b))$ *per ogni* $f \in L^1((a,b))$*, dunque esisterà un unico* $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ *tale che, per ogni* $v \in W_0^{1,2}((a,b))$*,*

$$\int_a^b fv = (u,v)_{W_0^{1,2}((a,b))} = \int_a^b (pu'v' + quv).$$

2. *La precedente dimostrazione del lemma esistenza di soluzioni deboli si può tuttavia utilizzare per una classe molto più ampia di funzionali, del tipo*

$$F(u) = \int_a^b (A(x,u'(x)) + V(x,u(x)))\mathrm{d}x,$$

con $A, V \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$ *che verifichino*

$$\frac{t^2}{C} \leq A(x,t) \leq Ct^2 \qquad\qquad V(x,t) \geq -C\,(1+|t|^q) \quad q<2.$$

Infatti, la limitatezza dal basso di F *e la limitatezza delle soluzioni minimizzanti seguono da* $q < 2$*, mentre la semicontinuità inferiore segue dalla regolarità di* A, V*; la soluzione sarà unica assumendo inoltre* A, V *convesse in* t *per ogni* x *fissato. I punti di minimo di* F *saranno soluzioni deboli di*

$$\begin{cases} (-\partial_t A(x,u(x)))' + \partial_t V(x,u(x)) = 0 & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\int_a^b (\partial_t A(x,u'(x))\varphi'(x) + \partial_t V(x,u(x))\varphi(x))\mathrm{d}x = 0, \qquad\qquad \forall\, \varphi \in C_0^1((a,b))$$

Lezioni 48-49-50 (14/05/2021)

Per concludere la parte sugli spazi di Sobolev consideriamo gli operatori lineari associati alla risoluzione in forma debole di queste equazioni differenziali.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty((a,b)), q \in L^1((a,b)), f \in L^2((a,b))$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$.
*L'**operatore risolvente** del problema ai valori al bordo $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ è l'operatore lineare continuo $A \in \mathcal{L}\left(L^2((a,b))\right)$ definito da $A = i \circ \widetilde{A}$, dove $i : W_0^{1,2}((a,b)) \hookrightarrow L^2((a,b))$ è l'inclusione e $\widetilde{A} : L^2((a,b)) \to W_0^{1,2}((a,b))$ è la mappa che manda f nell'unica soluzione del problema ai valori al bordo.*

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty((a,b)), q \in L^1((a,b)), f \in L^2((a,b))$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$ e A il risolvente di $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$.
Allora $A := i \circ \widetilde{A} : L^2((a,b)) \to L^2((a,b))$ è un operatore lineare compatto e iniettivo e verifica

$$
\begin{aligned}
(Af, g)_{L^2((a,b))} &= (Ag, f)_{L^2((a,b))} \qquad && \forall\, f, g \in L^2((a,b)) \\
(Af, f)_{L^2((a,b))} &> 0 && \forall\, f \in L^2((a,b)) \setminus \{0\}.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione.
Innanzi tutto, $\widetilde{A}$ e A sono ben definiti per il Teorema di esistenza e unicità di soluzioni deboli. La linearità e l'iniettività di $\widetilde{A}$ e A seguono anch'esse facilmente dall'unicità delle soluzioni deboli.
Per dimostrare che A è compatto, sarà sufficiente dimostrare che $\widetilde{A}$ è continuo e poi utilizzare la compattezza di i, che segue del Teorema di immersione di Sobolev.
Per mostrare la continuità di $\widetilde{A}$, per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$ abbiamo

$$\int_a^b \left(p \left(\widetilde{A}f\right)' v' + q \left(\widetilde{A}f\right) v \right) = \int_a^b fv,$$

quindi prendendo $v = \widetilde{A}f$ e applicando la Disuguaglianza di Poincaré si ottiene

$$\left\|\widetilde{A}f\right\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))} = \int_a^b f\left(\widetilde{A}f\right) \leq \|f\|_{L^2((a,b))} \left\|\widetilde{A}f\right\|_{L^2((a,b))} \leq C\|f\|_{L^2((a,b))} \left\|\widetilde{A}f\right\|_{W_0^{1,2}((a,b))},$$

dove la norma equivalente considerata è $\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))} := \displaystyle\int_a^b \left(pu'^2 + qu^2\right)$, e cioè $\left\|\widetilde{A}f\right\|_{W^{1,2}((a,b))} \leq C\|f\|_{L^2((a,b))}$.
Per mostrare che A è simmetrico, fissate f e g applichiamo la definizione di soluzione debole per $\widetilde{A}f$ scegliendo $\varphi = \widetilde{A}g$ e poi scambiamo i ruoli di f, g:

$$\int_a^b f\left(\widetilde{A}g\right) = \int_a^b \left(p\left(\widetilde{A}f\right)' \left(\widetilde{A}g\right)' + q\left(\widetilde{A}f\right)\left(\widetilde{A}g\right) \right) = \int_a^b g\left(\widetilde{A}f\right),$$

dunque

$$(Af, g)_{L^2((a,b))} = \int_a^b g\left(\widetilde{A}f\right) = \int_a^b f\left(\widetilde{A}g\right) = (Ag, f)_{L^2((a,b))}.$$

Infine, scegliendo $v = \widetilde{A}f$ per $f \not\equiv 0$,

$$(Af, f)_{L^2((a,b))} = \int_a^b f\left(\widetilde{A}f\right) = \int_a^b \left(p\left(\widetilde{A}f\right)'^2 + q\left(\widetilde{A}f\right)^2 \right) > 0$$

□

Osservazione.
Analogamente si può dimostrare che la restrizione di $\widetilde{A}$ *a* $W_0^{1,2}((a,b))$ *è un operatore compatto: infatti, se* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è limitata in* $W_0^{1,2}((a,b))$*, allora convergerà a* u *in* $L^2((a,b))$ *a meno di estratte e dunque, ragionando come prima,*

$$\left\|\widetilde{A}u_n - \widetilde{A}u\right\|_{W_0^{1,2}((a,b))} \leq C\|u_n - u\|_{L^2((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Inoltre, considerando il prodotto scalare $\displaystyle\int_a^b (pu'v' + quv)$ *su* $W_0^{1,2}((a,b))$*, otteniamo analoghe proprietà di simmetria e positività:*

$$\left(\widetilde{A}u, v\right) = \int_a^b uv = \left(\widetilde{A}v, u\right) \qquad \forall\, u, v \in W_0^{1,2}((a,b))$$
$$\left(\widetilde{A}u, u\right) = \int_a^b u^2 > 0 \qquad \forall\, u \in W_0^{1,2}((a,b)) \setminus \{0\}.$$

Affrontiamo ora l'ultimo grande argomento del corso: la teoria spettrale.
Studieremo infatti alcune proprietà degli operatori lineari tra spazi di Banach, generalizzando i concetti di spettro, autovalori e autovettori.
D'ora in poi considereremo spazi normati sui complessi, piuttosto che sui reali, perché più adatti allo studio della teoria spettrale.

Definizione.
Sia X *uno spazio vettoriale complesso.*
Una ***norma*** *su* X *è una funzione* $\|\cdot\| : X \to [0,+\infty)$ *che verifichi:*

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ *(Disuguaglianza triangolare);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}$ *(Omogeneità);*
3. $\|x\| > 0 \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}$ *(Positività).*

$(X, \|\cdot\|)$ *si dice* ***spazio normato complesso*** *e, se è uno spazio metrico completo rispetto a* $\mathrm{d}(x,y) := \|x-y\|$*, si dice* ***spazio di Banach complesso****.*
Un ***prodotto hermitiano*** *su* X *è una mappa* $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$ *che verifichi:*

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ *per ogni* $x, y \in X$ *(Simmetria);*
2. *Per ogni* $y \in H$ *fissato,* $x \mapsto (x,y)$ *è lineare in* x*, cioè*
$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z), \qquad \forall\, x, y, z \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \textit{(Linearità)};$$
3. $(x,x) \in \mathbb{R}_{>0}$ *per ogni* $x \in X \setminus \{0\}$ *(Positività).*

Se X *è uno spazio di Banach complesso rispetto alla norma* $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ *indotta dal prodotto hermitiano* X *si dice* ***spazio di Hilbert complesso****.*

Osservazione.

1. *Un prodotto hermitiano* (x,y) *non è lineare in* y*, bensì antilineare, cioè* $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$*.*
2. *Sugli spazi di Hilbert complessi continuano a valere, nelle stesse forme degli spazi di Hilbert reali, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la regola del parallelogramma e il Teorema di Pitagora; l'identità di polarizzazione invece assume la forma*
$$(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + \imath\frac{\|x+\imath y\|^2 - \|x-\imath y\|^2}{4}.$$

Esempio.
Gli spazi $L^p(\mu), C^k, W^{1,p}$ *sono degli spazi di Banach complessi se visti come spazi di funzioni a valori complessi piuttosto che reali. Le rispettive norme sono definite allo stesso modo, considerando i moduli di numeri complessi invece che reali.*

Gli spazi $L^2(\mu)$ *sono spazi di Hilbert complessi con il prodotto hermitiano* $(f, g) := \int_a^b f\overline{g}\mathrm{d}\mu$.

Definizione.
Sia X *uno spazio di Banach complesso,* $A \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{I} \in \mathcal{L}(X)$ *l'identità e* $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si dice che λ *appartiene allo* ***spettro*** *di* A *se* $A - \lambda\mathbb{I}$ *<u>non</u> è un operatore invertibile. Inoltre:*

- *Se* $A - \lambda\mathbb{I}$ *<u>non</u> è iniettivo si dice che* λ *appartiene allo spettro* ***puntuale*** *di* A*; in questo caso,* λ *si dice* ***autovalore*** *di* A*, il sottospazio* $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$ *si dice* ***autospazio*** *di* A *e i suoi elementi diversi da zero si dicono* ***autovettori*** *di* A.
- *Se* $A - \lambda\mathbb{I}$ *è iniettivo e* $\operatorname{ran}(A - \lambda\mathbb{I})$ *è un sottoinsieme denso proprio di* X *si dice che* λ *appartiene allo spettro* ***continuo*** *di* A.
- *Se* $A - \lambda\mathbb{I}$ *è iniettivo ma* $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda\mathbb{I})} \subsetneq X$ *si dice che* λ *appartiene allo spettro* ***residuo*** *di* A.

Lo spettro di A *si denota con il simbolo* $\sigma(A)$ *e gli spettri puntuale, continuo, residuo si indicano rispettivamente con i simboli* $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$.

Osservazione.

1. *Come abbiamo già visto, l'inverso di un operatore continuo invertibile è sempre continuo, dunque se* $\lambda \notin \sigma(A)$ *allora* $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
2. *Se* $\dim X < +\infty$*, allora è ben noto che tutti gli elementi dello spettro sono autovalori, perché le mappe lineari da uno spazio finito-dimensionale in sé sono iniettive se e solo se sono suriettive, e inoltre* $\sigma(A)$ *è finito ed ha cardinalità al più pari a* $\dim X$.

Esempio.

1. *Se* $A : \ell_2 \to \ell_2$ *è lo shift sinistro definito da* $A : (x(1), x(2), x(3), \dots) \mapsto (x(2), x(3), x(4), \dots)$*, cioè* $Ax(k) = x(k+1)$*, allora* $0 \in \sigma_p(A)$ *perché* $e_1 \in \ker A$*; pur non essendo iniettivo,* A *è suriettivo.*
2. *Se* $A : \ell_2 \to \ell_2$ *è lo shift destro definito da* $A : (x(1), x(2), x(3), \dots) \mapsto (0, x(1), x(2), \dots)$*, cioè* $Ax(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1 \\ x(k-1) & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$*, allora* $0 \in \sigma_r(A)$ *perché* $\operatorname{ran} A = \{x \in \ell_2 : x(1) = 0\}$.
3. *Se* $A : \ell_2 \to \ell_2$ *è definito da* $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ *allora* $0 \in \sigma_c(A)$ *perché non è invertibile ma iniettivo, come abbiamo già visto, e* $\operatorname{ran} A$ *è un sottoinsieme denso proprio di* ℓ_2.

Proposizione.
Sia X *uno spazio di Banach complesso,* $A, B \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*. Allora:*

1. *Se* $|\lambda| > \|A\|$ *allora* $\lambda \notin \sigma(A)$.
2. *Se* A *è invertibile e* $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ *allora anche* B *è invertibile.*
3. *Se* $\lambda \notin \sigma(A)$ *e* $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\|}$ *allora* $\mu \notin \sigma(A)$.

Dimostrazione.

1. Se $|\lambda| > \|A\|$, definiamo l'inverso di $A-\lambda\mathbb{I}$ come serie geometrica: $(A-\lambda\mathbb{I})^{-1} := -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}$.
   La serie è convergente perché di Cauchy, essendo
   $$\left\|-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{\lambda^n}+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{M}\frac{A^n}{\lambda^n}\right\|\frac{1}{|\lambda|}=\left\|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{A^n}{\lambda^n}\right\|\leq\frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{\|A\|}{\lambda}}_{<1}\Bigg)^n\underset{n\to+\infty}{\to}0;$$
   inoltre, la serie inverte $A-\lambda\mathbb{I}$ perché
   $$(A-\lambda\mathbb{I})\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}\right)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}=\mathbb{I}.$$
2. Se $\|B-A\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$, allora
   $$\left\|A^{-1}B-\mathbb{I}\right\|=\left\|A^{-1}(B-A)\right\|\leq\left\|A^{-1}\right\|\|B-A\|<1=|-1|,$$
   dunque per il punto precedente è invertibile l'operatore $A^{-1}B-\mathbb{I}-(-\mathbb{I})=A^{-1}B$, e quindi lo è anche $B=A\circ A^{-1}B$.
3. Prendendo, nel punto precedente, $A-\lambda\mathbb{I}$ e $A-\mu\mathbb{I}$ al posto rispettivamente di A e B si ottiene
   $$\|A-\lambda\mathbb{I}-(A-\mu\mathbb{I})\|=|\mu-\lambda|<\frac{1}{\|(A-\lambda\mathbb{I})^{-1}\|},$$
   dunque se $A-\lambda\mathbb{I}$ è invertibile lo è anche $A-\mu\mathbb{I}$ e cioè $\mu\notin\sigma(A)$.

$\square$

Corollario.
L'insieme degli operatori invertibili su X è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{L}(X)$.
Inoltre, lo spettro è un sottoinsieme limitato e chiuso di $\mathbb{C}$, dunque è compatto.

Osservazione.
Se $\dim X < +\infty$, il precedente corollario era già ben noto, poiché l'insieme degli operatori invertibili è quello in cui il determinante, funzione continua rispetto alla norma operatoriale, è diverso da zero; la compattezza dello spettro invece segue dalla sua finitezza.

Lezioni 51-52 (18/05/2021)

Esempio.

1. *L'operatore* $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *dato da* $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ *verifica* $\sigma(A) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$*: lo zero appartiene allo spettro continuo, come abbiamo visto, mentre gli altri sono autovalori, dal momento che* $Ae_n = \dfrac{e_n}{n}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*; per tutti gli altri valori di* λ *invece* $A - \lambda\mathbb{I}$ *è invertibile, con* $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}y(k) = \dfrac{k}{1-\lambda k}y(k)$.

2. *L'operatore shift sinistro su* $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *ha per autovalore ogni* $\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $|\lambda| < 1$*, come abbiamo visto nel caso particolare* $\lambda = 0$*, perché* $x(k) = \lambda^k$ *verifica* $Ax = \lambda x$*; se* $|\lambda| > 1 = \|A\|$ *allora per la proposizione precedente* $\lambda \notin \sigma(A)$*, mentre se* $|\lambda| = 1$ *allora* $\lambda \in \sigma(A)$ *perché lo spettro è chiuso; in quest'ultimo caso,* $A - \lambda\mathbb{I}$ *è iniettivo, ma la sua immagine è densa (e dunque* $\lambda \in \sigma_c(A)$*) perché contiene ogni elemento della base standard, essendo* $e_k = (A - \lambda\mathbb{I})x_k$*, dove* $x_k = \left(-\dfrac{1}{\lambda^k}, \dots, -\dfrac{1}{\lambda}, 0, \dots,\right)$.

3. *L'operatore shift destro su* $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *ha nello spettro residuo ogni* λ *con* $|\lambda| < 1$*: infatti,* $A - \lambda\mathbb{I}$ *è iniettivo per questi* λ*, perché se* $Ax = \lambda x$ *allora* $x(1) = 0$ *e* $x(k) = \dfrac{x(k-1)}{\lambda}$ *per ogni* k*, dunque* $x = 0$*; inoltre,* $e_1 \notin \overline{\mathrm{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I})}$ *perché se* $e_1 + y \notin \mathrm{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I})$ *con* $\|y\| \le \varepsilon < 1 - |\lambda|$ *allora* $x(k) = -\dfrac{1}{\lambda^k} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \dfrac{y(j)}{\lambda^{k-j+1}}$ *e dunque*

$$\begin{aligned} |x(k)| &= \left|\frac{-1 - y(1) - \lambda y(2) \dots - \lambda^{k-1}y(k)}{\lambda^k}\right| \\ &\ge \frac{1 - \|y\|_\infty \sum_{j=0}^{k-1} |\lambda|^j}{|\lambda|^k} \\ &\ge \frac{1 - \frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}}{|\lambda|^k} \\ &\underset{k\to+\infty}{\not\to} 0, \end{aligned}$$

quindi $x \notin \ell_2$*. Se invece* $|\lambda| = 1$*, allora* $\lambda \in \sigma_c(A)$*; come prima,* $A - \lambda\mathbb{I}$ *è iniettivo anche in questo caso, e inoltre* $\overline{\mathrm{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I})} = \ell_2$*, perché l'unico funzionale lineare che si annulla su* $\mathrm{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I})$ *è quello nullo, cioè che se* $(y, (A - \lambda\mathbb{I})x)_{\ell_2} = 0$ *per ogni* $x \in \ell_2$ *allora* $y \equiv 0$*: scegliendo* $x = e_k$ *si ottiene* $y(k-1) = \lambda y(k)$*, cioè* $y(k) = \dfrac{c}{\lambda^k}$ *per qualche* $c \in \mathbb{R}$*, ma essendo* $|\lambda| = 1$ *l'unica scelta per cui* $y \in \ell_2$ *dev'essere* $c = 0$*. Infine, poiché* $\|A\| = 1$*, dalla proposizione precedente otteniamo che se* $|\lambda| > 1$ *allora* $\lambda \notin \sigma(A)$.

Possiamo ora definire il raggio spettrale, cioè la massima norma degli elementi dello spettro. Ne studieremo alcune proprietà, tra cui una caratterizzazione che curiosamente ricorda il raggio di convergenza della serie potenze.

Definizione.
Sia X *uno spazio di Banach complesso* $A \in \mathcal{L}(X)$.
Il ***raggio spettrale*** *di* A *il massimo valore della norma degli elementi dello spettro, cioè*

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Osservazione.
Come abbiamo già visto, $\rho(A) \le \|A\|$ *e dunque in particolare* $\rho(A) < +\infty$ *per ogni* A.

Esempio.

1. *Se A è l'operatore di shift destro o sinistro su ℓ_2, come abbiamo visto, $\sigma(A) = \overline{B_1(0)}$ e dunque $\rho(A) = 1 = \|A\|$; lo stesso vale per l'altro esempio precedente $A : \ell_2 \to \ell_2$ dato da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$.*

2. *In generale, potrebbe valere la disuguaglianza stretta: ad esempio, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $A(x_1, x_2) = (x_2, 0)$ verifica $\|A\| = 1$ ma $\sigma(A) = \{0\}$, dunque $\rho(A) = 0$.*

Lemma.
Sia X uno spazio di Banach complesso, $A \in \mathcal{L}(X)$ e $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio complesso.
Allora,

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dimostrazione.
Scrivendo $p(z)-\lambda = a_N(z-\alpha_1(\lambda))^{N_J} \dots (z-\alpha_J(\lambda))^{N_J}$, allora $p(A)-\lambda\mathbb{I} = a_N(A-\alpha_1(\lambda)\mathbb{I})^{N_J} \dots (A-\alpha_J(\lambda)\mathbb{I})^{N_J}$, dunque

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(p(A)) &\iff p(A) - \lambda\mathbb{I} \text{ non è invertibile} \\
&\iff A - \alpha_j(\lambda)\mathbb{I} \text{ non è invertibile per qualche } j \\
&\iff \alpha_j(\lambda) \in \sigma(A) \\
&\iff \lambda = p(\alpha_j(\lambda)) \in p(\sigma(A)).
\end{aligned}$$

□

Teorema (Caratterizzazione del raggio spettrale)**.**
Sia X uno spazio di Banach complesso e $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora:

1. *$\sigma(A) \neq \emptyset$;*

2. *Esiste finito il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ e vale $\rho(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Dimostrazione.

1. La funzione di variabile complessa $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(\lambda) \to \mathcal{L}(X)$ data da $f(\lambda) = (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ è olomorfa sul suo insieme di definizione, perché

$$\begin{aligned}
\frac{f(\lambda+\mu) - f(\lambda)}{\mu} &= \frac{(A - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1} - (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu} \\
&= \frac{(A - \lambda\mathbb{I})(A - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1}(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} - (A - (\lambda+\mu)\mathbb{I})(A - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1}(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu} \\
&= \frac{\mu(A - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^{-1}(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}}{\mu} \\
&\underset{\mu\to0}{\to} (A - \lambda\mathbb{I})^{-2}.
\end{aligned}$$

   Inoltre, $f(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{A}{\lambda} - \mathbb{I}\right)^{-1}$ con $\left(\dfrac{A}{\lambda} - \mathbb{I}\right)^{-1}$ limitata in norma per $|\lambda|$ grande, dunque $f(\lambda) \underset{|\lambda|\to+\infty}{\to} 0$; pertanto, se fosse $\sigma(A) = \emptyset$, f sarebbe una funzione intera limitata, cioè costante, che è assurdo.

2. Sappiamo che la serie di Laurent di f converge sulla più grande corona circolare centrata in 0 su cui f è olomorfa, cioè $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\rho(A)}(0)}$; in questo caso, la serie di Laurent è data dalla serie geometrica $-\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$, dunque per $|\lambda| > \rho(A)$ dovrà avere $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|} < 1$, cioè $\rho(A) \geq \limsup\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Per ottenere l'altra disuguaglianza è sufficiente applicare il lemma precedente con il polinomio $p(z) = z^n$; poiché $\sigma(A^n) = \sigma(A)^n$, allora $\rho(A^n) = \rho(A)^n$, dunque $\rho(A)^n = \rho(A^n) \leq \|A^n\|$, dunque $\rho(A) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

$\square$

Osservazione.
La stima precedente $\rho(A) \leq \|A\|$ è in generale più debole di quella data dal teorema perché $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.

Lezioni 53-54-55 (21/05/2021)

Dopo questa panoramica generale sulla teoria spettrale, studiamo più in dettaglio alcune proprietà specifiche dello spettro di una classe di operatori, che avevamo introdotto nello studio degli spazi di Sobolev: gli operatori compatti. Come vedremo, le proprietà spettrali degli operatori compatti ricordano il caso finito dimensionale.

Lemma.
Sia X uno spazio di Banach complesso, $A \in \mathcal{L}(X)$ e $E \underset{\neq}{\lhd} F \lhd X$ tali che $(\mathbb{I} - A)F \subset E$.

Allora, esiste $x_0 \in F$ tale che $\|x_0\| = 1$ e $\|Ax_0 - Ay\| \geq \frac{1}{2}$ per ogni $y \in E$.

Dimostrazione.
Da un lemma precedente, sappiamo che esiste $x_0 \in F$ che verifica $\|x_0\| = 1$ e $\|x_0 - z\| \geq \frac{1}{2}$ per ogni $z \in E$. Poiché $(\mathbb{I} - A)F \subset E$, allora per ogni $y \in E$ avremo $Ax_0 - Ay = x_0 - (y + (\mathbb{I} - A)(x_0 - y))$ con $y + (\mathbb{I} - A)(x_0 - y) \in E$, dunque $\|Ax_0 - Ay\| \geq \frac{1}{2}$. $\square$

Osservazione.
Dato uno spazio normato X e $E \lhd X$, il quoziente

$$\frac{X}{E} := \{x + E;\ x \in X\}$$

ha anch'esso una struttura di spazio normato con $\|x + E\|_{\frac{X}{E}} := \inf\{\|x + y\| :\ y \in E\}$; se X è uno spazio di Banach anche $\frac{X}{E}$ è uno spazio di Banach.

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach complesso e $A \in \mathcal{K}(X)$. Allora:

1. $\dim \ker(\mathbb{I} - A) < +\infty$;
2. $\mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A)$ *è chiuso;*
3. $\dim \dfrac{X}{\mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A)} < +\infty$.

Dimostrazione.

1. Se fosse $\dim \ker(\mathbb{I} - A) = +\infty$, allora conterrebbe una successione crescente di sottospazi lineari chiusi $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Poiché $(\mathbb{I} - A)E_n = \{0\} \subset E_{n-1}$, possiamo applicare il lemma precedente alla coppia E_{n-1}, E_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ e trovare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_n$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \frac{1}{2}$; ciò vorrebbe dire che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha estratte convergenti, in contraddizione con il fatto che A è compatto.

2. Dati $y, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $(\mathbb{I} - A)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$, vogliamo mostrare che $y \in \mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A)$. Mostriamo innanzi tutto che $d_n := \mathrm{d}(x_n, \ker(\mathbb{I} - A))$ è limitata: se fosse $d_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, allora prendendo $z_n \in \ker(\mathbb{I} - A)$ tale che $\|x_n - z_n\| \leq d_n + 1$ avremo $\left\|\frac{x_n - z_n}{d_n}\right\| \leq 2$ e dunque, essendo A compatto, a meno di estratte $A\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} w$; tuttavia, essendo $x_n - Ax_n$ limitata, avremo $\frac{x_n - Ax_n}{d_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e dunque w verifica

$$w - Aw \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \frac{x_n - z_n}{d_n} - A\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) = \frac{x - Ax_n}{d_n} - \underbrace{\frac{z_n - Az_n}{d_n}}_{=0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

dunque $w \in \ker(\mathbb{I} - A)$, in contraddizione con

$$\mathrm{d}(w, \ker(\mathbb{I} - A)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}, \ker(\mathbb{I} - A)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}\left(\frac{x_n}{d_n}, \ker(\mathbb{I} - A)\right) = 1.$$

Dunque, esiste $z_n \in \ker(\mathbb{I} - A)$ tale che $\|x_n - z_n\| \leq C$, e per compattezza $A(x_n - z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} v$, ma allora

$$x_n - z_n = x_n - Ax_n + A(x_n - z_n) - \underbrace{(\mathbb{I} - A)z_n}_{=0} \underset{n\to+\infty}{\to} y + v,$$

e cioè

$$y = \lim_{n\to+\infty} (\mathbb{I} - A)x_n = \lim_{n\to+\infty} (\mathbb{I} - A)(x_n - z_n) = (\mathbb{I} - A)(y + v) \in \mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A).$$

3. Supponiamo per assurdo che $\dim \dfrac{X}{\mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A)} = +\infty$. Allora, dati $\{y_n + \mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearmente indipendenti in $\dfrac{X}{\mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A)}$, applico il lemma precedente con $E_n := \mathrm{Span}\{\mathrm{ran}\,(\mathbb{I} - A), y_1, \ldots, y_n\}$, $F = E_{n+1}$: allora, esisteranno $x_n \in E_{n+1} \setminus E_n$ tali che $\|x_n\| = 1$ e $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ per $n \neq m$, assurdo perché A è compatto.

□

Corollario.
Se $\ker(\mathbb{I} - A) = \{0\}$*, allora* $\mathbb{I} - A$ *è invertibile sull'immagine.*

Osservazione.
Le proprietà degli operatori del tipo $\mathbb{I} - A$ *sono le stesse di* $A - \lambda\mathbb{I} = -\lambda\left(\mathbb{I} - \dfrac{A}{\lambda}\right)$*, per ogni* $\lambda \neq 0$*, perché le moltiplicazioni per* $-\lambda$ *e* $-\dfrac{1}{\lambda}$ *sono invertibili.*

Teorema (Alternativa di Fredholm per operatori compatti)**.**
Sia X *uno spazio di Banach e* $A \in \mathcal{K}(X)$ *e, per* $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n := \ker((\mathbb{I} - A)^n); \qquad R_n := \mathrm{ran}\,((\mathbb{I} - A)^n).$$

Allora:

1. R_n *è chiuso e* $K_n \subset K_{n+1}$, $R_n \subset R_{n-1}$, $\dim K_n < +\infty$, $\dim \dfrac{X}{R_n} < +\infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

2. *Esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$K_N = K_{N+1} = \cdots = K_n \qquad R_N = R_{N+1} = \cdots = R_n \qquad \forall n \geq N,$$

inoltre $X = K_N \oplus R_N$ *e*

$$\begin{aligned} &(\mathbb{I} - A)K_N \subset K_N && \text{con } (\mathbb{I} - A)|_{K_N} \text{ nilpotente,} \\ &(\mathbb{I} - A)R_N \subset R_N && \text{con } (\mathbb{I} - A)|_{R_N} \text{ invertibile.} \end{aligned}$$

3. $\mathbb{I} - A$ *è suriettivo se e solo se è iniettivo, cioè* $N = 1$ *e* $K_1 = \{0\}, R_1 = X$.

Dimostrazione.

1. Se $x \in K_n$, allora

$$(\mathbb{I} - A)^{n+1}x = (\mathbb{I} - A)(\mathbb{I} - A)^n = (\mathbb{I} - A)0 = 0$$

e dunque $x \in K_{n+1}$; analogamente, se $y = (\mathbb{I} - A)^n x \in R_n$ allora $y = (\mathbb{I} - A)^{n-1}(\mathbb{I} - A)x \in R_{n-1}$. Il resto segue dalla proposizione precedente, scrivendo $(\mathbb{I} - A)^n = \mathbb{I} - A_n$ con $A_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} A^k$ compatto in quanto combinazione di operatori compatti.

2.

Passo 1 Esiste N per cui $K_N = K_n$ per ogni $n \geq N$: se così non fosse, essendo $(\mathbb{I} - A)K_{n+1} = K_n$, potremmo applicare il lemma precedente con $E_n = K_n$ e $F_n = K_{n+1}$ e trovare $x_n \in K_{n+1} \setminus K_n$ con $\|x_n\| = 1$ e $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \frac{1}{2}$ per $n \neq m$; tuttavia, questo è assurdo perché A è compatto.

Passo 2 Esiste M per cui $R_M = R_n$ per ogni $n \geq M$: altrimenti, come prima, potrei applicare il lemma con $E_n = R_n$ e $F_n = R_{n-1}$ e trovare una successione limitata senza estratte convergenti, in contraddizione con la compattezza di A.

Passo 3 Se N è come prima, $K_N \cap R_N = \{0\}$: infatti, se $y \in K_N \cap R_N$ allora esiste $x \in X$ tale che $(\mathbb{I} - A)^N x = y$ e $(\mathbb{I} - A)^N y = 0$, dunque $(\mathbb{I} - A)^{2N} x = 0$ e cioè $x \in K_{2N} = K_N$, pertanto $y = (\mathbb{I} - A)^N x = 0$.

Passo 4 Se N, M sono i più piccoli interi per cui i K_n, R_m si "stabilizzano", allora $M \leq N$: grazie al passo precedente, questo seguirà dopo aver dimostrato $K_{M-1} \cap R_{M-1} \neq \emptyset$; prendendo $x \in R_{M-1} \setminus R_M$, avremo $(\mathbb{I} - A)x \in R_M = (\mathbb{I} - A)R_M$, cioè $(\mathbb{I} - A)x = (\mathbb{I} - A)y$ per qualche $y \in R_M$, dunque $x - y \in \ker(\mathbb{I} - A) \subset K_{M-1}$, ma inoltre $x - y \in R_{M-1} + R_M = R_{M-1} \subset R_N$ e $x - y \neq 0$ perché $y \in R_M \not\ni x$.

Passo 5 $X = K_N \oplus R_N$: per ogni $x \in X$ avrò $(\mathbb{I} - A)^N x \in R_N = (\mathbb{I} - A)^N R_N$, dunque esisterà $y \in R_N$ per cui $(\mathbb{I} - A)^N y = (\mathbb{I} - A)^N x$, quindi $x - y \in K_N$ e posso scrivere $x = x - y + y \in K_N + R_N$; la somma è diretta grazie al Passo 3.

Passo 6 Le restrizioni a K_N e R_N sono rispettivamente nilpotenti e invertibili: innanzi tutto, per definizione abbiamo $(\mathbb{I} - A)K_N \subset K_{N-1} \subset K_N$ e $(\mathbb{I} - A)R_N \subset R_{N+1} \subset R_N$ e inoltre $(\mathbb{I} - A)^N|_{K_N} = 0$, quindi $(\mathbb{I} - A)|_{K_N}$ è nilpotente; essendo poi $R_N = R_{N+1} = (\mathbb{I} - A)R_N$, $(\mathbb{I} - A)|_{R_N}$ è suriettiva; infine, se $(\mathbb{I} - A)y = 0$ per $y \in R_N = R_{2N-1}$ allora $y = (\mathbb{I} - A)^{N-1} x$ per $x \in R_N$, cioè $(\mathbb{I} - A)^N x = 0$, ma essendo $K_N \cap R_N = \{0\}$, dunque $y = 0$; quindi $(\mathbb{I} - A)|_{R_N}$ è anche iniettiva, ed essendo R_N chiuso è invertibile.

3. Se $\mathbb{I} - A$ è iniettivo, allora $K_1 = \cdots = K_n = \cdots = \{0\}$, dunque $N = 1$ e $X = K_1 \oplus R_1 = R_1 = (I - A)X$, cioè $\mathbb{I} - A$ è anche suriettivo; viceversa, se $\mathbb{I} - A$ è suriettivo, allora $R_1 = \cdots = R_N = \cdots = X$, dunque avremo $X = K_N \oplus R_N = K_N \oplus X$, quindi $\{0\} = K_N \supset \ker(\mathbb{I} - A)$ e cioè $I - A$ è iniettivo.

□

Come conseguenza di questo importante teorema, deduciamo un'interessante analogia con gli operatori finito-dimensionali, che ricorda il Teorema di Rouché-Capelli.

Corollario.
Se l'Alternativa di Fredholm vale con $N = 1$ e $K_1 = \{0\}$, l'equazione $(\mathbb{I} - A)x = y$ avrà un'unica soluzione per ogni y.
Altrimenti, $(\mathbb{I} - A)x = y$ non avrà soluzioni se $y \notin R_1$, mentre se $y \in R_1$ le soluzioni saranno infinite e formeranno uno spazio affine di dimensione $\dim K_1$.

Esempio.
In dimensione finita, ogni operatore $A : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$ può essere rappresentato, rispetto a un'opportuna base, in forma canonica di Jordan: scriverò $\mathbb{C}^M = \mathbb{C}^{M_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{M_J}$, e su ciascun $\mathbb{C}^{M_j}$ abbiamo

$$A|_{\mathbb{C}^{M_j}} : \left(x_{j,1}, \ldots, x_{j,M_j}\right) \to \left(\lambda_j x_{j,1} + x_{j,2}, \ldots, \lambda_j x_{j,M_j-1} + x_{j,M_j}, \lambda_j x_{j,M_j}\right),$$

con $M_j \geq 1$ e λ_j non necessariamente distinti. Se $\lambda_j \neq 1$ per ogni j allora $\mathbb{I} - A$ è invertibile e l'alternativa di Fredholm vale con $N = 1$ e $K_1 = \{0\}, R_1 = \mathbb{C}^M$; se invece ad esempio $\lambda_1 = \cdots = \lambda_I = 1$ per qualche $I \geq 1$, avremo $N = \max\{M_1, \ldots, M_I\}$, $K_N = \mathbb{C}^{M_1} \times \ldots \mathbb{C}^{M_I}$ e $R_N = \mathbb{C}^{M_{I+1}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{M_J}$.

Teorema (spettrale per operatori compatti)**.**
Sia X uno spazio di Banach complesso tale che $\dim X = +\infty$ *e* $A \in \mathcal{K}(X)$*. Allora:*

1. $0 \in \sigma(A)$*;*
2. *Se* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *allora è un autovalore;*
3. *Per ogni* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *esiste un'unica coppia* $K(\lambda), R(\lambda) \lhd X$ *tali che* $X = K(\lambda) \oplus R(\lambda)$ *e*

   $$(A - \lambda \mathbb{I})|_{R(\lambda)} : R(\lambda) \to R(\lambda) \qquad\qquad (A - \lambda \mathbb{I})|_{K(\lambda)} : K(\lambda) \to K(\lambda)$$

   sono rispettivamente invertibile e nilpotente, inoltre $\dim K(\lambda) < +\infty$*,* $\dim \dfrac{X}{R(\lambda)} < +\infty$*;*
4. $K(\lambda) \supset \ker(A - \lambda \mathbb{I})$ *e* $R(\lambda) \subset \mathrm{ran}\,(A - \lambda \mathbb{I})$*;*
5. $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *è discreto e in particolare* $\sigma(A)$ *è numerabile;*
6. *Se* $\lambda, \mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *e* $\lambda \neq \mu$*, allora* $K(\mu) \subset R(\lambda)$*.*

Lezioni 56-57-58 (28/05/2021)

Dimostrazione del Teorema spettrale per operatori compatti.

1. Se $0 \notin \sigma(A)$, allora A sarebbe invertibile e dunque $\mathbb{I} = A^{-1} \circ A$ sarebbe un operatore compatto, che è assurdo se $\dim X = +\infty$.

2. Se $\lambda \neq 0$ non è un autovalore, cioè $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo, allora per l'alternativa di Fredholm l'operatore $\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}A = -\frac{1}{\lambda}(A - \lambda\mathbb{I})$ è iniettivo e anche suriettivo, quindi $A - \lambda\mathbb{I} = -\lambda\left(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}A\right)$ è invertibile e cioè $\lambda \notin \sigma(A)$.

3. Applichiamo l'alternativa di Fredholm all'operatore $\frac{A}{\lambda}$ e prendiamo $K(\lambda) = K_N$ e $R(\lambda) = R_N$: come abbiamo visto, le proprietà sono verificate, dunque resta da far vedere che la decomposizione è unica. Supponiamo che K', R' siano altri spazi con le stesse proprietà e scriviamo, per $x \in K'$, $x = y + z \in K(\lambda) + R(\lambda)$, dunque $0 = (A - \lambda\mathbb{I})^N x = (A - \lambda\mathbb{I})^N z$, ma poiché $(A - \lambda\mathbb{I})^N$ è invertibile su $R(\lambda)$ dev'essere $z = 0$ e cioè $x \in K(\lambda)$; invertendo il ruolo di $K(\lambda)$ e K' dimostriamo che vale anche $K(\lambda) \subset K'$ e dunque i due spazi coincidono. Scrivendo poi $R' \ni x = y + z \in K(\lambda) + R(\lambda)$, avremo $(A - \lambda\mathbb{I})^N x = (A - \lambda\mathbb{I})^N z \in R(\lambda)$, quindi $R' = (A - \lambda\mathbb{I})^N R' \subset R(\lambda)$; invertendo, avremo anche $R(\lambda) \subset R'$.

4. Segue dall'Alternativa di Fredholm e dal fatto che $K(\lambda) = \ker\left((A - \lambda\mathbb{I})^N\right), R(\lambda) = \operatorname{ran}\left((A - \lambda\mathbb{I})^N\right)$ per qualche N.

5. Scriviamo $X = K(\lambda) \oplus R(\lambda)$, con $(A - \lambda\mathbb{I})(K(\lambda)) \subset K(\lambda)$ e $(A - \lambda\mathbb{I})(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$, dunque varrà anche $(A - \mu\mathbb{I})(K(\lambda)) \subset K(\lambda)$ e $(A - \mu\mathbb{I})(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$ per ogni $\mu \in \mathbb{C}$; dal punto precedente abbiamo $\lambda \notin \sigma\left(A|_{R(\lambda)}\right)$, dunque essendo lo spettro chiuso avremo anche $\mu \notin \sigma\left(A|_{R(\lambda)}\right)$ se $|\mu - \lambda|$ è sufficiente piccolo. Inoltre abbiamo anche $\mu \notin \sigma\left(A|_{K(\lambda)}\right)$, e dunque $\mu \notin \sigma(A)$, perché su $K(\lambda)$ abbiamo $(A - \lambda\mathbb{I})^N = 0$ e dunque

$$(A - \lambda\mathbb{I} + (\lambda - \mu)\mathbb{I})\left(\frac{1}{\lambda - \mu}\mathbb{I} - \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}(A - \lambda\mathbb{I}) + \cdots + \frac{(-1)^{N-1}}{(\lambda - \mu)^N}(A - \lambda\mathbb{I})^{N-1}\right) = \mathbb{I} + \frac{(-1)^N}{(\lambda - \mu)^N}(A - \lambda\mathbb{I})^N = \mathbb{I},$$

   cioè $(A - \mu\mathbb{I})|_{K(\lambda)}$ è invertibile.

6. Scrivo, per $x \in K(\mu)$, $x = y + z \in K(\lambda) + R(\lambda)$; iterando il ragionamento del punto precedente, $(A - \mu\mathbb{I})^N(K(\lambda)) \subset K(\lambda)$ e $(A - \mu\mathbb{I})^N(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$, dunque

$$0 = (A - \mu\mathbb{I})^N x = (A - \mu\mathbb{I})^N y + (A - \mu\mathbb{I})^N z \in K(\lambda) + R(\lambda),$$

   quindi per l'unicità della scrittura sarà $(A - \mu\mathbb{I})^N y = (A - \mu\mathbb{I})^N z = 0$; ragionando come prima, $(A - \mu\mathbb{I})^N$ sarà invertibile su $K(\lambda)$ e cioè $y = 0$ e quindi $x = z \in R(\lambda)$.

$\square$

Osservazione.
Se $\dim X < +\infty$ ovviamente $\sigma(A)$ può essere un qualsiasi insieme finito e non necessariamente $0 \in \sigma(A)$.

Esempio.

1. *$A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da $Ax(k) = a_k x(k)$, per una successione infinitesima $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ data, è compatto, come abbiamo già visto. Gli autovalori sono dati da $\lambda = a_n$ per $n \in \mathbb{N}$, perché $Ae_n = a_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; se $a_k = 0$ per qualche k, $0 \in \sigma_p(A)$, altrimenti apparterrà allo spettro residuo perché* ran A *è denso in quanto contiene i vettori della base standard.*

2. *$A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da $(x(1), x(2), x(3), \dots) \to (0, a_1 x(1), a_2 x(2), \dots)$, cioè dalla composizione del precedente con lo shift destro, per $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ infinitesima, è compatto in quanto composizione di un operatore compatto con uno continuo; tuttavia non ha autovalori, come si dimostra analogamente al caso dello shift destro. Dunque dovremo avere $\sigma(A) = \{0\}$ e, come nel caso dello shift destro, sarà nello spettro residuo perché $e_1 \notin \overline{\operatorname{ran} A}$.*

3. $A \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ *dato da* $Af(x) = \displaystyle\int_0^x f$ *è compatto per il Teorema di Ascoli-Arzelà, perché se* $\|f_n\|_\infty \le C$ *e* $|x-y| \le \delta$ *allora* $|Af_n(x) - Af_n(y)| \le C\delta$ *e dunque* $\{Af_n\}$ *ha un'estratta convergente; tuttavia, anche in questo caso non ci sono autovalori e dunque* $\sigma(A) = \{0\}$*: infatti, se* $Af = \lambda f$ *allora* f *è di classe* C^1*, perché* $\operatorname{ran} A \subset C^1([0,1])$ *e dunque risolve l'equazione differenziale* $\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$*, che però ha solo la soluzione banale* $f \equiv 0$*.* $\lambda = 0$ *apparterrà allo spettro residuo, perché* $\operatorname{ran} A = \left\{g \in C^1([0,1]) : g(0) = 0\right\}$ *non è denso in* $C([0,1])$*; tuttavia, considerando la restrizione* $\widetilde{A}$ *di* A *a* $X := \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ *otteniamo* $\operatorname{ran} \widetilde{A} = \left\{g \in C^1([0,1]) : g(0) = g'(0) = 0\right\}$*, che è denso in* X *(ad esempio perché contiene le funzioni a supporto compatto) e dunque* $0 \in \sigma_c\left(\widetilde{A}\right)$*.*

4. $A \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ *dato da* $Af(x) = \displaystyle\int_0^x f - \int_0^1 \left(\int_0^y f\right) \mathrm{d}y$ *è compatto come nel caso precedente, ma ha per autovalori* $\lambda_n = \dfrac{\imath}{2n\pi}$ *per* $n \in \mathbb{Z}$*: infatti, per questi valori l'equazione differenziale* $\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x) \\ \displaystyle\int_0^1 f = 0 \end{cases}$ *ha soluzioni non banali date, a meno di costanti da* $f(x) = e^{\frac{x}{\lambda_n}}$*, che dunque sono autovettori. Quanto a* $\lambda = 0$*, come prima apparterrà allo spettro residuo perché* $\operatorname{ran} A = \left\{g \in C^1([0,1]) : \displaystyle\int_0^1 g = 0\right\}$*, ma sarà nello spettro continuo di* $\widetilde{A}$*, restrizione di* A *a* $X := \left\{f \in C([0,1]) : \displaystyle\int_0^1 f = 0\right\}$*.*

Studiamo ora un'altra importante classe di operatori lineari: gli operatori autoaggiunti, che hanno alcune importanti proprietà di simmetria.
Così come la teoria spettrale per operatori compatti ha molte analogie con il caso finito-dimensionale, quella per operatori compatti autoaggiunti avrà analogie con gli operatori simmetrici in dimensione finita.

Definizione.
Siano X, Y *spazi di Hilbert complessi e* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$*.*
*L'**operatore aggiunto** di* A *è* $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ *definito da* $(Ax, y)_Y = (x, A^*y)_X$ *per ogni* $x \in X, y \in Y$*.*

Osservazione.

1. *Si verifica facilmente che* A^* *è ben definito e unico, è lineare e continuo e* $\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$*.*

2. *Se* $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, allora* $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$*; se poi* $C \in \mathcal{L}(Y, Z)$*, allora l'aggiunto* $(CA)^* \in \mathcal{L}(Z, X)$ *di* $CA \in \mathcal{L}(X, Z)$ *è dato da* $(CA)^* = A^*C^*$*; se inoltre* A *è invertibile, lo è anche* A^* *e* $(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* \in \mathcal{L}(X, Y)$*.*

3. *L'aggiunto dell'aggiunto* $A^{**} \in \mathcal{L}(X, Y)$ *coincide con* A *stesso.*

Esempio.

1. *Se* $\dim X, \dim Y < +\infty$ *è ben noto che la matrice che rappresenta* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *rispetto a due basi ortonormali di* X, Y *è la trasposta coniugata della matrice che rappresenta* $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ *rispetto alle basi duali.*

2. *L'operatore aggiunto dell'identità* $\mathbb{I} \in \mathcal{L}(X)$ *è l'identità* $\mathbb{I} \in \mathcal{L}(X^*)$*.*

3. *L'operatore aggiunto dello shift destro su* ℓ_2 *è dato dallo shift sinistro, e viceversa.*

4. *Se* $A : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *è dato da* $A : f \mapsto fg$*, per* $g \in L^\infty(\mu)$*, allora l'aggiunto* $A^* := L^2(\mu) \to L^2(\mu)$*, è dato da* $A^* : h \mapsto h\overline{g}$*.*

Lemma.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso, $A \in \mathcal{L}(H)$ e $A^* \in \mathcal{L}(H)$ il suo aggiunto. Allora,

1. $\ker A^* = (\text{ran } A)^\perp$;
2. $\overline{\text{ran } A^*} = (\ker A)^\perp$;
3. $\sigma(A^*) = \text{conj}(\sigma(A)) := \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\}$;
4. $A \in \mathcal{K}(H) \iff A^* \in \mathcal{K}(H)$ *e, in caso affermativo,* $\text{ran } (\mathbb{I} - A^*) = (\ker(\mathbb{I} - A))^\perp$ *e in particolare* $\dim \dfrac{H}{\text{ran } (\mathbb{I} - A^*)} = \dim \ker(\mathbb{I} - A)$.

Dimostrazione.

1. Scrivendo $(Ax, y) = (x, A^*y)$, il membro di sinistra sarà nullo per ogni $x \in H$ se e solo se $y \in (\text{ran } A)^\perp$, mentre il membro di destra lo sarà se e solo se $y \in \ker A^*$, dunque $\ker A^* = (\text{ran } A)^\perp$.
2. Segue scrivendo
$$(\ker A)^\perp = (\ker(A^{**}))^\perp = (\text{ran } (A^*))^{\perp\perp} = \overline{\text{ran } (A^*)}.$$
3. Preso $\lambda \in \mathbb{C}$, se $A - \lambda\mathbb{I}$ è invertibile se e solo se lo è anche $(A - \lambda\mathbb{I})^* = A^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}$, dunque $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$, cioè $\lambda \in \text{conj}(\sigma(A))$.
4. Supponiamo $A \in \mathcal{K}(H)$ e prendiamo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in H; a meno di estratte avremo $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ per qualche $x \in H$. Inoltre, dalla continuità (debole) di A^* avremo $A^*x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} A^*x$, mentre per la compattezza di A la successione $\{AA^*x_n\}$ convergerà fortemente e il suo limite sarà necessariamente AA^*x, dunque
$$\begin{aligned} \|A^*x_n - A^*x\|^2 &= (A^*(x_n - x), A^*(x_n - x)) \\ &= (x_n - x, AA^*(x_n - x)) \\ &\leq \|x_n - x\|\|AA^*(x_n - x)\| \\ &\leq C\|AA^*(x_n - x)\| \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$
e quindi $A^* \in \mathcal{K}(H)$; supponendo invece A^* compatto, lo è anche $A^{**} = A$. Infine, se A^* è compatto allora $\text{ran } (\mathbb{I} - A^*)$ è chiuso e dunque
$$\text{ran } (\mathbb{I} - A^*) = \overline{\text{ran } (\mathbb{I} - A^*)} = \overline{\text{ran } ((\mathbb{I} - A)^*)} = \ker(\mathbb{I} - A)^\perp.$$

□

Definizione.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{L}(H)$.
A si dice ***autoaggiunto*** *se coincide con il suo aggiunto, cioè $A^* = A$, ovvero $(Ax, y) = (x, Ay)$ per ogni $x, y \in H$.*

Osservazione.
Da un corollario del Teorema del grafico chiuso abbiamo visto che ogni operatore lineare autoaggiunto è sempre continuo.

Esempio.

1. *Come abbiamo già visto, sono autoaggiunti: gli operatori finito-dimensionali rappresentati, rispetto a una base ortonormale, da una matrice hermitiana; l'identità su un qualsiasi spazio di Hilbert; gli operatori su $L^2(\mu)$ del tipo $Af = fg$ per $g \in L^\infty(\mu)$ a valori reali.*

2. *Un operatore autoaggiunto su $L^2((a,b))$, per $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, è dato dal risolvente A dell'equazione differenziale* $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$*; la restrizione $\widetilde{A}$ di A a $W_0^{1,2}((a,b))$ è anch'essa autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)$.*

Proposizione.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto. Allora:

1. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;*
2. *$\sigma_r(A) = \emptyset$;*
3. *Se λ, μ sono autovalori e x, y sono rispettivi autovettori, allora $x \perp y$;*
4. *$\sigma(A) \subset [m, M]$, dove*

$$m := \inf_{x \in H, \|x\|=1} (Ax, x) \qquad\qquad M := \sup_{x \in H, \|x\|=1} (Ax, x).$$

5. *$m, M \in \sigma(A)$ e in particolare $\rho(A) = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$;*
6. *$\|A\| = \rho(A) = \max\{|m|, |M|\}$.*

Dimostrazione.

1. Segue dal Lemma precedente, perché $\sigma(A) = \sigma(A^*) = \mathrm{conj}(\sigma(A))$.
2. Basterà mostrare che se $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo allora ran $(A - \lambda\mathbb{I})$ è denso in H: essendo A autoaggiunto, dal punto precedente $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo $(A - \lambda\mathbb{I})^* = A - \lambda\mathbb{I}$, dunque dal lemma precedente otteniamo

$$\ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \ker((A - \lambda\mathbb{I})^*) = (\mathrm{ran}\,(A - \lambda\mathbb{I}))^\perp;$$

   dunque, se $A - \lambda\mathbb{I}$ è iniettivo nella precedente uguaglianza avremo il sottospazio banale $\{0\}$ e cioè ran $(A - \lambda\mathbb{I})$ è denso.
3. Se $Ax = \lambda x$ e $Ay = \mu y$ con $\lambda \neq \mu$ allora $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \overline{\mu}(x, y) = \mu(x, y),$$

   dunque $(x, y) = 0$.
4. Innanzi tutto, essendo A autoaggiunto, $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$, dunque è reale e m, M sono ben definiti. Se $\lambda > M$, allora per ogni $x \in H$ abbiamo

$$(\lambda - M)\|x\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 - (Ax, x) = -((A - \lambda\mathbb{I})x, x) \leq \|(A - \lambda\mathbb{I})x\|\|x\|;$$

   da ciò segue che $(A - \lambda\mathbb{I})$ è iniettivo. Inoltre, ran $(A - \lambda\mathbb{I})$ è chiuso perché, se $(A - \lambda\mathbb{I})x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y_0$, dalla disuguaglianza precedente abbiamo $\|x_n - x_m\| \leq \frac{\|(A - \lambda\mathbb{I})(x_n - x_m)\|}{\lambda - M} \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$ e dunque a meno di estratte $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$ e quindi $y_0 = (A - \lambda\mathbb{I})x_0$. Infine, come nel punto precedente ran $(A - \lambda\mathbb{I})^\perp = \ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}$ e quindi $A - \lambda\mathbb{I}$ è invertibile. Analogamente si dimostra che $(A - \lambda\mathbb{I})$ è invertibile anche per $\lambda < m$ e dunque $\sigma(A) \subset [m, M]$.
5. Prendiamo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica $\|x_n\| = 1$ e $(Ax_n, x_n) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} M$: poiché $(Mz - Az, z) \geq 0$ per ogni $x \in H$, prendendo $z = y - \frac{(My - Ay, x_n)}{(Mx_n - Ax_n, x_n)}x_n$ si ottiene, per ogni $y \in H$,

$$0 \leq (Mz - Az, z) = (My - Ay, y) - \frac{|(Mx_n - Ax_n, y)|^2}{(Mx_n - Ax_n, x_n)};$$

prendendo l'estremo superiore tra gli y che verificano $\|y\| \leq 1$ avremo

$$\begin{aligned}
\|Mx_n - Ax_n\|^2 &= \sup_{\|y\|\leq 1} |(Mx_n - Ax_n, y)|^2 \\
&\leq \sup_{\|y\|\leq 1} ((Mx_n - Ax_n, x_n)(My - Ay, y)) \\
&\leq \|M\mathbb{I} - A\|(Mx_n - Ax_n, x_n) \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Se $A - M\mathbb{I}$ fosse invertibile, allora otterremmo la contraddizione $x_n = -(A - M\mathbb{I})^{-1}(Mx_n - Ax_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque dev'essere $M \in \sigma(A)$. Analogamente dimostriamo che $m \in \sigma(A)$, e dunque $\rho(A) = \max\{|m|, |M|\}$.

6. Poiché la disuguaglianza $\rho(A) \leq \|A\|$ è sempre verificata, basterà dimostrare che $\|A\| \leq \max\{|m|, |M|\} =: \mu$. Essendo A autoaggiunto, avremo

$$(A(x \pm y), x \pm y) = (Ax, x) \pm 2\Re(Ax, y) + (Ay, y),$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}
4\Re(Ax, y) &= (A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y) \\
&\leq M\|x + y\|^2 - m\|x - y\|^2 \\
&\leq \mu \left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) \\
&= 2\mu \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Scegliendo x tale che $Ax \neq 0$ e $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|}Ax$ si ottiene $4\|x\|\|Ax\| \leq 4\mu|x\|^2$, cioè $\|Ax\| \leq \mu\|x\|$; questo è banalmente vero anche quando $Ax = 0$, dunque concludiamo che $\|A\| \leq \mu = \rho(A)$.

□

Corollario.

1. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto e $\sigma(A) = \{0\}$, allora $A = 0$.*
2. *Un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile ha al più un'infinità numerabile di autovalori (anche se $\sigma(A)$ potrebbe non essere numerabile).*

Esempio.
Sia $A \in \mathcal{L}(L^2((0,1)))$ dato da $Af(x) = xf(x)$: come abbiamo visto in precedenza, si tratta di un operatore autoaggiunto; tuttavia, non ha alcun autovalore, perché se $xf(x) = \lambda f(x)$ per q.o. x allora $f \equiv 0$. Del resto, poiché

$$\inf_{f\in L^2((0,1)),\ \int_0^1 |f|^2=1} \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x = 0 \qquad\qquad \sup_{f\in L^2((0,1)),\ \int_0^1 |f|^2=1} \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x = 1,$$

allora $\sigma(A) \subset [0,1]$, e in realtà $\sigma(A) = [0,1]$ perché altrimenti per $\lambda \in [0,1]$ dovremmo avere $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda}$, che però non è continuo su $L^2((0,1))$ perché $\frac{1}{x-\lambda} \notin L^\infty((0,1))$. Dunque ogni $\lambda \in [0,1]$ apparterrà allo spettro, e sarà necessariamente nello spettro continuo perché grazie all'ultima proposizione sappiamo che lo spettro residuo è vuoto.

Lezioni 59-60 (01/06/2021)

Come ultimo risultato del corso, presentiamo un teorema spettrale per operatori autoaggiunti compatti, che fornisce una famiglia ortogonale di autovalori in modo analogo al caso delle matrici simmetriche.

Teorema (spettrale per operatori autoaggiunti compatti).
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{K}(H)$ autoaggiunto.
Allora, esiste una successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o un insieme finito $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, di valori e una famiglia $\{K(\lambda_n)\}_n$ di corrispondenti sottospazi finito-dimensionali tali che:

1. *$\sigma(A) = \{\lambda_n\}_n \cup \{0\}$;*
2. *$\lambda_n \in \mathbb{R}$ e, se sono infiniti, $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;*
3. *Ogni λ_n è un autovalore e in particolare $A|_{K(\lambda_n)} = \lambda_n \mathbb{I}$, $\forall n$;*
4. *$K(\lambda_n) \perp K(\lambda_m) \perp \ker A$, $\forall n \neq m$;*
5. *$H = \overline{\mathrm{Span}\{K(\lambda_n)\}_n} \oplus \ker A$.*

Dimostrazione.

1. Dal Teorema spettrale per operatori compatti sappiamo che $\sigma(A) \setminus \{0\}$ è al più numerabile e può accumularsi solo in 0; dunque, possiamo scrivere $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ e definire lo spazio finito-dimensionale $K(\lambda_n)$ come nel Teorema spettrale per operatori compatti. Per costruzione abbiamo $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_n$.
2. Poiché, come abbiamo visto, gli autovalori non possono accumularsi se non in 0, dovrà essere $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$; inoltre, essendo A autoaggiunto, avremo $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ e dunque tutti gli autovalori saranno reali.
3. Segue dal fatto che $(A - \lambda_n \mathbb{I})|_{K(\lambda_n)} : K(\lambda_n) \to K(\lambda_n)$ è nilpotente e autoaggiunto: infatti, se $(A - \lambda_n \mathbb{I})^N|_{K(\lambda_n)} \equiv 0$ per $N \geq 2$, allora per ogni $x \in K(\lambda_n)$ vale
$$\left\|(A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x\right\|^2 = \left((A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x, (A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x\right) = \left(x, (A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-2} (A - \lambda_n \mathbb{I})^N x\right) = 0,$$
cioè $(A - \lambda_n \mathbb{I})^{N-1} x = 0$, e iterando otteniamo $(A - \lambda_n \mathbb{I}) x = 0$ per ogni $x \in H$.
4. Se $x \in K(\lambda_n), y \in K(\lambda_m), z \in \ker A$ allora, per quanto appena visto, $Ax = \lambda_n x, Ay = \lambda_m y, Az = 0z$ con $\lambda_n \neq \lambda_m \neq 0$, dunque per la proposizione precedente avremo $x \perp y \perp z$.
5. Sia $E := \overline{\mathrm{Span}\{K(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}} \oplus \ker A$; dunque $A\left(E^\perp\right) \subset E^\perp$, perché se $x \in E^\perp$ e $Ay = \lambda y$ per $\lambda \in \{\lambda_n\}_n \cup \{0\}$ allora $(Ax, y) = (x, Ay) = \overline{\lambda}(x, y) = 0$, quindi argomentando con la linearità e la chiusura si ottiene $Ax \in E^\perp$. Poiché $A|_{E^\perp}$ è compatto e, per costruzione, non ha autovalori, abbiamo $\sigma(A|_{E^\perp}) = 0$, ma dal corollario precedente otteniamo $A|_{E^\perp} \equiv 0$ e cioè $E^\perp \subset \ker A$; poiché $E^\perp \perp \ker A$, allora $E^\perp = \{0\}$ e cioè $E = H$.

□

Corollario.

1. *Se $A \in \mathcal{K}(H)$ è autoaggiunto esiste un sistema ortonormale completo $\{e_\alpha\}_\alpha$ composto solo da autovettori di A, che permette di scrivere l'operatore in forma "diagonale", cioè:*
$$A : \sum_\alpha (x, e_\alpha) e_a \mapsto \sum_\alpha \lambda_\alpha (x, e_\alpha) e_\alpha;$$
per ottenerlo sarà sufficiente prendere un sistema ortonormale su ciascun autospazio $K(\lambda_n)$ e sul nucleo di A. Se H è separabile, cioè se il sistema è numerabile, avremo $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, mentre se non lo è avremo $\lambda_\alpha \neq 0$ solo per un infinità numerabile di indici.

2. *Se* $0 \neq \lambda \neq \lambda_n$ *per* $n \in \mathbb{N}$ *allora l'equazione* $Ax - \lambda x = y$ *ha un'unica soluzione per ogni* y*; se invece* $\lambda = \lambda_n$*, l'equazione non ha soluzioni per* $y \not\perp K(\lambda_n)$*, mentre se* $y \perp K(\lambda_n)$ *le soluzioni sono infinite e sono uno spazio affine finito-dimensionale di dimensione* $\dim(K(\lambda_n))$*.*

Esempio.

1. $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *dato da* $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ *ha come spettro* $\sigma(A) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ *e, tolto* 0*, sono tutti autovalori. In particolare,* $K\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{Span}\{e_n\}$ *è* 1*-dimensionale per ogni* $\mathbb{R}$*,* $\ker A = \{0\}$ *e una sistema ortonormale completo di autovettori è nato dalla base standard. Più in generale, se* $Ax(k) = a_k x(k)$ *e* $\mathbb{R} \ni a_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$*, allora* $\sigma(A) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$*, la base standard forma un sistema ortonormale completo di autovettori ma stavolta* $K(a_n)$ *potrebbe non essere* 1*-dimensionale, se* $n \mapsto a_n$ *non è iniettiva; anche* 0 *potrebbe essere un autovalore, se* $a_n = 0$ *per qualche* n*, e se questo è vero per infiniti* n *allora* $\dim(\ker A) = +\infty$*.*

2. *L'operatore* $A \in \mathcal{L}\left(L^2((a,b))\right)$ *risolvente dell'equazione differenziale* $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ *è, come abbiamo già visto, compatto e autoaggiunto; inoltre* $\displaystyle\int_a^b (Af)f > 0$ *per ogni* $f \not\equiv 0$*, dunque* $\sigma(A) \subset [0,+\infty)$ *e* A *è anche iniettivo. Per ogni* λ_n *avremo autovettori* f_n *che risolveranno*

$$\begin{cases} (-pf_n')' + qf_n = \dfrac{f_n}{\lambda_n} & su\ (a,b) \\ f_n(a) = f_n(b) = 0 \end{cases}.$$

Fissata $g \in L^2((a,b))$*, risolvere l'equazione* $(A - \lambda\mathbb{I})f = g$ *equivarrà a*

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = \dfrac{u-g}{\lambda} & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases};$$

come abbiamo visto, se $\lambda \neq \lambda_n$ *allora per ogni* g *esiste un'unica soluzione; altrimenti, lo sarà se e solo se* $\displaystyle\int_a^b f_n g = 0$ *per ogni* $f_n \in K(\lambda_n)$ *e, in caso affermativo l'equazione* $Af - \lambda f = g$ *sarà risolta anche da* $f + f_n$ *mentre l'equazione differenziale associata sarà risolta anche da* $u + \lambda_n f_n$ *per ogni* $f_n \in K(\lambda_n)$*.*

Nel caso particolare $p \equiv 1, q \equiv 0$*, la coppia* (λ_n, f_n) *risolverà* $\begin{cases} -f_n'' = \dfrac{f_n}{\lambda_n} & su\ (a,b) \\ f_n(a) = f_n(b) = 0 \end{cases}$*, che ha soluzioni non banali per* $\lambda_n = \left(\dfrac{b-a}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$ *e, dopo aver normalizzato,* $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{b-a}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)$*, dunque in particolare tutti gli autospazi sono* 1*-dimensionali. L'equazione* $\begin{cases} -u'' = \dfrac{u-g}{\lambda} & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ *è sempre risolubile per* $\lambda \neq \left(\dfrac{b-a}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$*, mentre per* $\lambda = \left(\dfrac{b-a}{\pi}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$ *lo è se e solo se* $\displaystyle\int_a^b g(x) \sin\left(\dfrac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) \mathrm{d}x = 0$*. Infine, scrivendo ogni* $f \in L^2((a,b))$ *in serie di Fourier rispetto al sistema completo* $\{f_n\}$*, possiamo scrivere*

$$A : \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) \quad \mapsto \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \frac{c_n}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right).$$