AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Topologie deboli

Introduciamo ora un nuovo concetto di convergenza per successioni, più debole e flessibile rispetto alla convergenza in norma, chiamato appunto convergenza debole.
L'importanza di questo concetto, che è essenziale per lo studio degli spazi funzionali e delle equazioni differenziali, è dovuto al fatto che in dimensione infinita le palle chiuse non sono compatte.

Lemma.
Sia X uno spazio normato e $E \subset X$ un suo sottospazio lineare non denso.
Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 \in X$ tale che $\|x_0\| = 1$ e $\mathrm{d}(x_0, E) \geq 1 - \varepsilon$.

Dimostrazione.
Se $x \in X \setminus \overline{E}$, allora $\mathrm{d}(x, E) > 0$, dunque per definizione di distanza esiste $z \in E$ tale che $0 < \|x - z\| \leq \dfrac{\mathrm{d}(x, E)}{1 - \varepsilon}$. Quindi $x_0 := \dfrac{x - z}{\|x - z\|}$ ha norma pari a $\|x_0\| = 1$; inoltre, essendo E un sottospazio lineare, per ogni $y \in E$ abbiamo $z + y\|x - z\| \in E$, pertanto

$$\|x_0 - y\| = \left\| \frac{x - z - y\|x - z\|}{\|x - z\|} \right\| \geq \frac{\mathrm{d}(x, E)}{\|x - z\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

Passando all'estremo inferiore otteniamo $\mathrm{d}(x_0, E) \geq 1 - \varepsilon$. □

Osservazione.

1. *In generale, se $\|x_0\| = 1$, varrà sempre $\mathrm{d}(x_0, E) \leq 1$ perché $\mathrm{d}(x_0, E) \leq \mathrm{d}(x_0, 0) = \|x_0\|$.*
2. *Se X è uno spazio di Hilbert, è possibile prendere $\varepsilon = 0$ nel lemma precedente, cioè trovare x_0 con $\|x_0\| = 1 = \mathrm{d}(x_0, E)$: basta prendere $x_0 \in E^\perp$ per avere*

$$\mathrm{d}(x_0, E)^2 = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|^2 = \inf_{y \in E} \left(\|x_0\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x_0\|^2.$$

Corollario.
Sia X uno spazio normato con $\dim X = +\infty$.
Allora, la palla unità chiusa $\overline{B_1(0)} := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ non è compatta.

Dimostrazione.
Se $\dim X = +\infty$, allora esiste una successione crescente di sottospazi lineari chiusi $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Applicando il lemma precedente a ciascuno di questi sottospazi troviamo $x_n \in E_n$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\mathrm{d}(x_n, E_{n-1}) \geq \dfrac{1}{2}$. La successione $\{x_n\}$ in $\overline{B_1(0)}$ quindi verifica $\|x_n - x_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ per ogni $n \neq m$, dunque non è di Cauchy e non può convergere. □

Definizione.
Sia X uno spazio normato, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X e $x \in X$.
Se $Lx_n \underset{n \to +\infty}{\to} Lx$ per ogni $L \in X^*$ si dice che x_n ***converge debolmente*** *a x e si indica con la notazione $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$.*

Proposizione.
Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in uno spazio normato X e $x \in X$. Allora:

1. *Se* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ *allora* $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.

2. *Se* $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *allora* $\{x_n\}$ *è limitata.*

Dimostrazione.

1. Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, allora per ogni $L \in X^*$ abbiamo

$$|Lx_n - Lx| \leq \|L\|_{X^*}\|x_n - x\|_X \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

cioè $Lx_n \underset{n\to+\infty}{\to} Lx$.

2. Poiché $Lx_n \underset{n\to+\infty}{\to} Lx$ per ogni $L \in X^*$, allora $\{Lx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque, per un corollario del Teorema di Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$.

□

Osservazione.

1. *Se* $\dim X < +\infty$ *e* $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$, *allora* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$. *Infatti, presa una base* $\{e_1, \ldots, e_N\} \subset X$ *di* X, *consideriamo i funzionali della base duale* $\{L_1, \ldots, L_N\} \subset X^*$ *tali che* $L_i e_j = \delta_{ij}$ *per ogni* i, j; *allora, avremo*

$$x_n = c_{1,n}e_1 + \cdots + c_{N,n}e_N = (L_1x_n)e_1 + \cdots + (L_Nx_n)e_N \underset{n\to+\infty}{\to} (L_1x)e_1 + \cdots + (L_Nx)e_N = x.$$

2. *Se* $X = \ell_1$, *abbiamo già visto in un lemma precedente che se converge debolmente allora converge anche fortemente; il lemma è stato enunciato solo nel caso di convergenza a* 0, *ma vale più in generale applicandolo a* $x_n - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3. *In generale, <u>non</u> tutte le successioni che convergono debolmente sono anche convergenti (in norma). Prendiamo infatti uno spazio di Hilbert* H *di dimensione infinita e un sistema ortonormale numerabile* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: *come abbiamo già visto,* $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ *e dunque la successione non converge in norma; tuttavia, dalla Disuguaglianza di Bessel sappiamo che* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x, e_n)^2 < +\infty$ *per ogni* $x \in H$, *dunque in particolare* $(x, e_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *e cioè, visto il Teorema di Riesz-Fréchet sul duale degli spazi di Hilbert,* $e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$.

Esempio.
La successione data dagli elementi della base standard infinito-dimensionale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge debolmente in* ℓ_p *a* 0 *per ogni* $p \in (1, +\infty)$. *Infatti, per ogni* $x \in \ell_{p'}$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *abbiamo*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)e_n(k) = x(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

perché tutte le successioni in $\ell_{p'}$ *sono infinitesime; dunque, data l'isometria tra* $\ell_{p'}$ *e* $(\ell_p)^*$, *abbiamo che* $Le_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *per ogni* $L \in (\ell_p)^*$. *Nel caso* $p = 2$ *otteniamo quanto già avevamo osservato, essendo* $\{e_n\}$ *un sistema ortonormale.*
La stessa successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *invece <u>non</u> converge debolmente in* ℓ_1: *infatti, scegliendo dei funzionali* $L \in (\ell_1)^*$ *come nel caso precedente* ℓ_p *con* $p > 1$, *come ad esempio* $Lx = x(k)$, *otteniamo* $Le_n = e_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, *dunque se* $e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *allora* $x(k) = 0$ *per ogni* k *e quindi* $x \equiv 0$; *tuttavia,* e_n *non può convergere debolmente a* 0 *perché* $\|x_n\| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

La convergenza debole equivale alla convergenza rispetto a una certa topologia, chiamata appunto <u>topologia debole</u>. Gli intorni di questa topologia sono essenzialmente delle regioni limitate solo in un numero finito di direzioni.

Definizione.
Sia X uno spazio normato.
*La **topologia debole** su X è quella che ha per intorni gli insiemi del tipo*

$$\mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(x_0) := \{x \in X : \ |L_1(x-x_0)| < \varepsilon, \dots, |L_N(x-x_0)| < \varepsilon\},$$

per $x_0 \in X$ e un numero finito di $L_1, \dots, L_N \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.
La topologia debole su X si indica con il simbolo $\sigma(X, X^*)$.
*Gli insieme aperti (rispettivamente, gli insiemi chiusi) rispetto a $\sigma(X, X^*)$ si dicono **debolmente aperti** (rispettivamente, **debolmente chiusi**).*

Osservazione.

1. *Se* $\dim X < +\infty$ *la topologia debole coincide con quella indotta dalla norma.*

2. *In generale, una successione in X converge debolmente se e solo se converge rispetto alla topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Teorema (Proprietà della topologia debole)**.**
Sia X uno spazio normato e $\sigma(X, X^*)$ la topologia debole su X. Allora:

1. *Ogni funzionale lineare continuo $L \in X^*$ su X è continuo anche rispetto a $\sigma(X, X^*)$, inoltre, tra tutte le topologie per cui tutti gli $L \in X^*$ sono continue, $\sigma(X, X^*)$ è la meno fine;*

2. *La topologia $\sigma(X, X^*)$ è di Hausdorff;*

3. *Se* $\dim X = +\infty$, *$\sigma(X, X^*)$ non è metrizzabile su X;*

4. *Se X^* è separabile, $\sigma(X, X^*)$ è localmente metrizzabile.*

Dimostrazione.

1. Per dimostrare la continuità di un generico $L \in X^*$ faccio vedere che $L^{-1}\{(a, b)\}$ è aperto rispetto a $\sigma(X, X^*)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$: se $L \equiv 0$, allora $L^{-1}((a, b)) = \begin{cases} X & \text{se } a < 0 < b \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$ è sempre aperto; altrimenti esiste $x_0 \in X$ tale che $Lx_0 = \dfrac{a+b}{2}$, e avremo

   $$L^{-1}\{(a, b)\} = \{x \in X : \ a < Lx < b\} = \left\{x \in X : \ \frac{a-b}{2} < L(x-x_0) < \frac{b-a}{2}\right\} = \mathcal{U}_{L;\frac{b-a}{2}}(x_0).$$

   Se poi τ è un'altra topologia per cui tutti i funzionali sono continui, allora dovrà contenere tutti gli aperti del tipo $L^{-1}\{(Lx_0 - \varepsilon, Lx_0 + \varepsilon)\} = \mathcal{U}_{L;\varepsilon}(x_0)$ e le loro intersezioni finite

   $$\mathcal{U}_{L_1;\varepsilon}(x_0) \cap \dots \cap \mathcal{U}_{L_N,\varepsilon}(x_0) = \mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(x_0);$$

   dunque, τ conterrà tutti gli aperti di $\sigma(X, X^*)$ e cioè sarà più fine.

2. Dalla II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach, per ogni $x_1 \neq x_2 \in X$ esiste un iperpiano che separa strettamente $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$, cioè $Lx_1 < \alpha < Lx_2$ per qualche $L \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque, $U_1 := \{x \in X : \ Lx < \alpha\}$ e $U_2 := \{x \in X : \ Lx > \alpha\}$ sono due intorni disgiunti rispettivamente di x_1 e x_2; quindi $\sigma(X, X^*)$ è di Hausdorff.

3. Se $\sigma(X, X^*)$ fosse indotta da una metrica $\widetilde{\mathrm{d}}$, allora la palla $\widetilde{B}_{\frac{1}{n}}(0) := \left\{x \in X : \ \widetilde{\mathrm{d}}(x, 0) < \dfrac{1}{n}\right\}$ sarebbe aperta per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque conterrebbe un intorno del tipo $U_n := \mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(0)$. Se $\dim X = +\infty$, esiste $x_n \in \ker L_1 \cap \dots \cap \ker L_N \setminus \{0\}$, perché altrimenti la mappa $x \mapsto (L_1x, \dots, L_Nx)$ sarebbe una mappa lineare iniettiva tra X e $\mathbb{R}^N$ e cioè X avrebbe dimensione finita; inoltre, poiché l'intersezione dei nuclei è un sottospazio lineare, possiamo supporre $\|x_n\| \geq n$. Dunque x_n è una successione illimitata che però verifica

   $$x_n \in \ker L_1 \cap \dots \cap \ker L_N \subset U_n \subset \widetilde{B}_{\frac{1}{n}}(0),$$

   cioè $\widetilde{\mathrm{d}}(x_n, 0) \leq \dfrac{1}{n}$ e quindi $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$, in contraddizione con la limitatezza delle successioni debolmente convergenti che abbiamo dimostrato in precedenza.

4. Se $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sottoinsieme denso e numerabile della palla unità chiusa $\{L \in X^* : \|L\|_{X^*} \leq 1\}$ di X^*, definiamo $\widetilde{\mathrm{d}}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|L_n(x-y)|}{2^n}$: è chiaramente ben definita e soddisfa le proprietà delle distanza. Bisognerà far vedere che, restringendosi sui limitati, ogni palla rispetto a $\widetilde{d}$ contiene intorni deboli e viceversa; per omogeneità, sarà sufficiente considerare solo elementi $x \in X$ che verificano $\|x\| \leq 1$. Dato un intorno debole $U = \mathcal{U}_{M_1,\dots,M_N;\varepsilon}(x_0)$ di x_0, cerco $r > 0$ tale che $U \supset \widetilde{B}_r(x_0) := \left\{x \in B_1(0) : \widetilde{\mathrm{d}}(x,x_0) < r\right\}$: innanzi tutto, possiamo supporre $\|M_i\|_{X^*} \leq 1$ per ogni $i = 1,\dots,N$ (a meno di ri-scalare ε), dunque esisteranno $L_{n_1},\dots,L_{n_N}$ tali che $\|M_i - L_{n_i}\|_{X^*} \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$ per $i = 1,\dots,N$; quindi, scegliendo $r < \dfrac{\varepsilon}{2^{n_i+1}}$ per $i = 1,\dots,N$, ogni $x \in \widetilde{B}_r(x_0)$ verifica

$$
\begin{aligned}
|M_i(x-x_0)| &\leq |M_i(x-x_0) - L_{n_i}(x-x_0)| + |L_{n_i}(x-x_0)| \\
&\leq \|M_i - L_{n_i}\|\|x-x_0\| + 2^{n_i}\widetilde{\mathrm{d}}(x,x_0) \\
&< \frac{\varepsilon}{4}(\|x\| + \|x_0\|) + 2^{n_i} r \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

cioè $x \in U$. Viceversa, data $\widetilde{B}_r(x_0)$, cerco un intorno debole $U = \mathcal{U}_{M_1,\dots,M_N;\varepsilon}(x_0)$ tale che $U \subset \widetilde{B}_r(x_0)$: scelgo $N > \dfrac{\log\frac{4}{r}}{\log 2}$ in modo che $\dfrac{1}{2^{N-1}} < \dfrac{r}{2}$ e poi $M_i = L_i$ e $\varepsilon = \dfrac{r}{2}$ per ogni $i = 1,\dots,N$; dunque, se $x \in U \cap B_1(0)$, allora

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{d}}(x,x_0) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{|L_n(x-x_0)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|L_n(x-x_0)|}{2^n} \\
&\leq \frac{r}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + (\|x\| + \|x_0\|) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\|L_n\|}{2^n} \\
&\leq \frac{r}{2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
&= r,
\end{aligned}
$$

quindi $x \in \widetilde{B}_r(x_0)$.

□

Osservazione.
Nel caso $X = \ell_1$, abbiamo visto che la convergenza debole equivale a quella in norma. Tuttavia, la topologia debole e quella della norma rimangono distinte, perché la prima non è metrizzabile mentre la seconda sì.

Teorema (Caratterizzazione dei convessi chiusi)**.**
Sia X uno spazio normato e $K \subset X$ un insieme convesso.
Allora, K è chiuso se e solo se è debolmente chiuso.

Dimostrazione.
Se K è debolmente chiuso, allora è chiuso perché la topologia della norma è più fine di quella debole. Viceversa, mostriamo che se K è convesso e chiuso allora $X \setminus K$ è debolmente aperto: preso $x_0 \in X \setminus K$, dalla II forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach esiste un iperpiano chiuso che separa $\{x_0\}$ e K, cioè $Lx_0 < \alpha < Lx$ per ogni $x \in K$ e $L \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ opportuni. Dunque, $U := \{x \in X : Lx < \alpha\}$ è un intorno debole di x_0 contenuto in $X \setminus K$, e quindi $X \setminus K$ è debolmente aperto. □

Corollario.
Se $f : X \to \mathbb{R}$ *è convessa, allora è inferiormente semi-continua rispetto alla norma se e solo se lo è rispetto alla topologia debole.*
In particolare, la norma è inferiormente semi-continua rispetto alla topologia debole e quindi se $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *allora* $\|x\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

Dimostrazione.
Se f è convessa, ogni suo sotto-livello $f^{-1}((-\infty, c])$ è convesso per ogni $c \in \mathbb{R}$; dunque, dal teorema precedente, questi sotto-livelli saranno chiusi se e solo se sono debolmente chiusi. Poiché la chiusura dei sotto-livelli equivale alla semi-continuità inferiore, concludiamo che f è inferiormente semi-continua se e solo se lo è rispetto alla topologia debole.
Il secondo enunciato segue dalla convessità della norma (che può essere facilmente dedotta dalle proprietà che definiscono le norme). $\square$

Osservazione.

1. *Applicando il corollario precedente alle funzioni concave, otteniamo che per queste ultime la semi-continuità superiore equivale a quella rispetto alla topologia debole. Mettendo insieme questi due risultati otteniamo nuovamente che le mappe lineari, che sono convesse e concave, sono continue rispetto alla topologia debole: in qualche senso, il corollario precedente equivale a "metà" della continuità delle mappe lineari.*

2. *Negli esempi precedenti di successioni convergenti debolmente ma non in norma avevamo* $\|x_n\| = 1$ *mentre il limite debole verificava* $\|x\| = 0$, *dunque la disuguaglianza di questo corollario è stretta e in generale la norma non è continua rispetto alla topologia debole. Deduciamo inoltre che le sfere non sono debolmente chiuse.*

Sugli spazi duali è possibile definire un'altra topologia, con proprietà simili a quelle della topologia debole ma ancor più "debole".

Definizione.
Sia X *uno spazio normato,* X^* *il suo duale,* $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* X^* *e* $L \in X^*$.
Se $L_n x \underset{n\to+\infty}{\to} Lx$ *per ogni* $x \in X$ *si dice che* L_n ***converge debolmente**** *a* L *e si indica con la notazione* $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$.

Osservazione.

1. *Se* $L_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} L$ *allora* $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$;

2. *Se* $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$ *allora* $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è limitata;*

3. *Se* X *è riflessivo, allora* $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$ *se e solo se* $L_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} L$.

Come per la convergenza debole, anche la convergenza debole* proviene da una topologia, che ha proprietà analoghe:

Definizione.
Sia X *uno spazio normato e* X^* *il suo duale.*
La ***topologia debole**** *su* X^* *è quella che ha per intorni gli insiemi del tipo*

$$\mathcal{U}_{x_1,\dots,x_N;\varepsilon}(L_0) := \{L \in X^* : |Lx_1 - L_0x_1| < \varepsilon, \dots, |Lx_N - L_0x_N| < \varepsilon\},$$

per $L_0 \in X^*$ *e un numero finito di* $x_1, \dots, x_N \in X$ *e* $\varepsilon > 0$.
La topologia debole su X^* *si indica con il simbolo* $\sigma(X^*, X)$.
Gli insieme aperti (rispettivamente, gli insiemi chiusi) rispetto a $\sigma(X^*, X)$ *si dicono* ***debolmente**** ***aperti*** *(rispettivamente,* ***debolmente**** ***chiusi****).*

Osservazione.

1. *Se X è riflessivo, la topologia debole* coincide con quella debole $\sigma(X^*, X^{**})$.*

2. *In generale, una successione in X^* converge debolmente* se e solo se converge rispetto alla topologia debole $\sigma(X^*, X)$.*

Proposizione.
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $\sigma(X^*, X)$ la topologia debole su X^*. Allora:*

1. *Ogni funzionale lineare continuo $\Lambda \in X^{**}$ su X^* dato da $\Lambda L = Lx$ è continuo anche rispetto a $\sigma(X^*, X)$, inoltre, tra tutte le topologie per cui tutti i $\Lambda \in X^{**}$ di questo tipo sono continui, $\sigma(X^*, X)$ è la meno fine;*

2. *La topologia $\sigma(X^*, X)$ è di Hausdorff, <u>non</u> è metrizzabile su X se $\dim X = +\infty$ ed è localmente metrizzabile se X è separabile;*

3. *La norma è debolmente* sequenzialmente inferiormente semi-continua, cioè se $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$ allora $\|L\|_{X^*} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|L_n\|$.*

Dimostrazione.
Le prime due affermazioni si dimostrano come per i risultati corrispondenti per le topologie deboli. Per la terza, se $L_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} L$ allora per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ abbiamo

$$Lx \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} L_n x \leq \|L_n\|\|x\| \leq \|L_n\|,$$

dunque $Lx \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|L_n\|$ e, passando all'estremo inferiore su x, otteniamo la tesi. □

Esempio.

1. *La successione $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in ${c_0}^*$ data da $L_n : x \mapsto x(n)$ converge debolmente* a 0 ma non debolmente. Infatti, poiché ${c_0}^*$ è una copia di ℓ_1, allora possiamo considerare l'elemento $\Lambda \in {c_0}^{**}$ dato da $\Lambda : L \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} Le_n$: avremo $\Lambda L_n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.*
La stessa successione, vista in ${\ell_p}^*$, converge debolmente a 0 per $p < +\infty$, ma non in ${\ell_\infty}^*$ perché $L_n(1, \ldots, 1) = 1$.*

2. *Sia $f \in C_0([0, 1])$ fissata con $\int_0^1 f_0 = 1$ e $f_n(x) := f_0(x - n)$. $\{f_n\}$ è limitata in $L^1(\mathbb{R})$ ma non converge debolmente perché, prendendo $g \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ otteniamo $\int_{\mathbb{R}} f_n g = \int_0^1 f_0 = 1$, mentre se g ha supporto compatto allora per n tale che $g(x) \equiv 0$ per $x \geq n$ abbiamo $\int_{\mathbb{R}} f_n g = \int_n^{n+1} f_n g = 0$; dunque, se esistesse f tale che $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ in $L^1(\mathbb{R})$, avremmo $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ ma $\int_{\mathbb{R}} fg = 0$ per ogni g a supporto compatto, che è assurdo. Del resto, f_n converge debolmente a zero in $L^p(\mathbb{R})$ perché se $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora $\int_n^{n+1} |g|^{p'} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ e dunque*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x - n) g(x) \mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty \left(\int_n^{n+1} |g(x)|^{p'} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0;$$

analogamente, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.

Proposizione.
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $\Lambda \in X^{**}$.
Allora, Λ è continuo in $\sigma(X^*, X)$ se e solo se Λ è della forma $\Lambda L = Lx$ per qualche $x \in X$.

Dimostrazione.
Se $\Lambda : L \mapsto Lx$ per qualche $x \in X$, allora è ovviamente continuo $\sigma(X^*, X)$.
Viceversa, se Λ è continuo in $\sigma(X^*, X)$ allora l'insieme $A = \{L \in X^* : |\Lambda L| < 1\}$ conterrà un intorno di 0, che sarà della forma $U = \mathcal{U}_{x_1,\dots,x_N;\varepsilon}(0)$ per qualche $x_1, \dots, x_N \in X$, $\varepsilon > 0$. Per omogeneità, $tA = \{L \in X^* : |\Lambda L| < t\}$ conterrà $tU = \mathcal{U}_{x_1,\dots,x_N;t\varepsilon}(0)$ e dunque, passando al limite per t che va a zero,

$$Lx_1 = \cdots = Lx_N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda L = 0.$$

Dunque la mappa $A : X^* \to \mathbb{R}^{N+1}$ data da $A : L \mapsto (\Lambda L, Lx_1, \dots, Lx_N)$ non è suriettiva, perché $(1, 0, \dots, 0) \notin \operatorname{ran} A$, e quindi $\operatorname{ran} A \subset \left\{y \in \mathbb{R}^{N+1} :\ c_0y_0 + c_1y_1 + \cdots + c_Ny_N\right\}$ per qualche $c_0 \neq 0, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$, e cioè, per ogni $L \in X^*$,

$$\Lambda L = -\frac{1}{c_0}(c_1Lx_1 + \cdots + c_NLx_n) = L\left(-\frac{c_1}{c_0}x_1 - \cdots - \frac{c_N}{c_0}x_N\right).$$

□

Corollario.
Un iperpiano su X^* della forma $H := \{\Lambda = \alpha\}$ per qualche $\Lambda \in X^{**}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è chiuso in $\sigma(X^*, X)$ se e solo se Λ è della forma $\Lambda L = Lx$ per qualche $x \in X$.
In particolare, se uno spazio X non è riflessivo, non tutti i chiusi convessi in X^* sono debolmente* chiusi e la topologia $\sigma(X, X^*)$ è strettamente meno fine di $\sigma(X^*, X)$.

Dimostrazione.
Se $\Lambda : L \mapsto Lx$, allora H è chiaramente chiuso in $\sigma(X^*, X)$.
Viceversa, se H è chiuso in $\sigma(X^*, X)$, allora per ogni $L_0 \in H$ avremo che $X \setminus H$ conterrà un intorno del tipo $U = \mathcal{U}_{x_1,\dots,x_N;\varepsilon}(L_0)$. Essendo U connesso, a meno di cambiare L_0 con $-L_0$, avremo $\Lambda L < \alpha$ per ogni $L \in U$; scrivendo poi $L' = L - L_0$ deduciamo che se $|L'x_i| < \varepsilon$ per $i = 1, \dots, N$ allora $\Lambda L' < \alpha - \Lambda L_0$. Cambiando segno a L' otteniamo anche $|\Lambda L'| < \alpha - \Lambda L_0$ e quindi, ragionando per omogeneità, Λ è debolmente* continua in 0 e, grazie all'invarianza per traslazioni, lo è in qualsiasi punto. Dunque la conclusione segue dal lemma precedente. □

L'importanza delle topologia debole* è legata al fondamentale teorema di compattezza di Banach-Alaoglu. Per dimostrare questo teorema utilizzeremo un importante risultato di topologia generale.

Teorema (di Tychonoff)**.**
Sia X uno insieme qualsiasi e

$$\prod_{x\in X} \mathbb{R}_x = \mathbb{R}^X := \{f : X \to \mathbb{R}\},$$

con la topologia prodotto avente per intorni gli insiemi del tipo

$$\mathcal{U}_{x_1,\dots,x_n;\varepsilon}(f_0) := \left\{f \in \mathbb{R}^X :\ |f(x_1) - f_0(x_1)| < \varepsilon, \dots, |f(x_N) - f_0(x_N)| < \varepsilon\right\}.$$

Se $F \subset \mathbb{R}^X$ è tale che $\sup_{f\in F} |f(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X$, allora F è relativamente compatto.

Teorema (di Banach-Alaoglu)**.**
Sia X uno spazio normato, X^* il suo duale e $\overline{B_1(0)} := \{L \in X^* :\ \|L\| \leq 1\}$ la palla unità chiusa in X^*. Allora, $\overline{B_1(0)}$ è compatta in $\sigma(X^*, X)$.

Dimostrazione.
Notiamo innanzi tutto che la topologia debole* su $X^* \subset \mathbb{R}^X$ coincide con quella indotta dalla topologia prodotto. Dunque, $B := \overline{B_1(0)}$ è relativamente compatta in X^* per il Teorema di Tychonoff, perché $|Lx| \leq \|x\|_X < +\infty$ per ogni $x \in X$. Per mostrare che B è chiusa, e dunque compatta, scriviamo:

$$\begin{aligned} B &= \left\{f \in \mathbb{R}^X :\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, x, y \in X\right\} \cap \left\{f \in \mathbb{R}^X :\ -\|x\| \leq f(x) \leq \|x\|,\ \forall\, x \in X\right\} \\ &= \bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x,y\in X} \left\{f \in \mathbb{R}^X;\ f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) = 0\right\} \cap \bigcap_{x\in X} \left\{f \in \mathbb{R}^X :\ -\|x\| \leq f(x) \leq \|x\|\right\}. \end{aligned}$$

B è quindi chiusa in quanto intersezione di chiusi: lo sono gli insiemi della prima intersezione perché ogni mappa del tipo $f \mapsto f(x)$ è continua in $\mathbb{R}^X$ e dunque lo è anche $f \mapsto f(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x)-\beta f(y)$; lo sono anche gli altri insiemi perché preimmagini di un chiuso rispetto a una mappa continua. $\square$

Corollario.
Se X è riflessivo, allora $\overline{B_1(0)} \subset X^*$ è compatta in $\sigma(X^*, X^{**})$.

Il seguente Lemma sugli spazi riflessivi ha delle interessanti conseguenze, soprattutto alla luce del Teorema di Banach-Alaoglu.

Lemma.
Sia X uno spazio di Banach.
Allora, X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che X^* sia riflessivo ma esista $\Lambda_0 \in X^{**} \setminus J(X)$, dove $J : X \to X^{**}$ è l'isometria canonica che manda x nel funzionale $J(x) : L \mapsto Lx$. Allora, per un corollario del Teorema di Hahn-Banach, esisterà $\alpha \in X^{***}$ tale che $\alpha|_{J(X)} \equiv 0$ ma $\alpha\Lambda_0 \neq 0$; tuttavia, essendo X^* riflessivo, α sarà del tipo $\alpha : \Lambda \mapsto \Lambda L$ per qualche $L \in X^*$, dunque per ogni $x \in X$ avremo

$$Lx = J(x)L = \alpha J(x) = 0,$$

quindi $L = 0$, che è assurdo perché $\Lambda_0 L = \alpha\Lambda_0 \neq 0$.
Viceversa, supponiamo che X sia riflessivo, cioè che ogni $\Lambda \in X^{**}$ sia del tipo $\Lambda = J(x)$. Allora, per ogni $\alpha \in X^{***}$, il funzionale $L_\alpha := \alpha \circ J$ è un elemento di X^* e dunque

$$\alpha\Lambda = \alpha J(x) = L_\alpha x = \Lambda L_\alpha,$$

dunque X^* è riflessivo. $\square$

Corollario.

1. *Gli spazi $L^\infty([0,1])$ e ℓ_∞ non sono riflessivi.*
2. *Se X è riflessivo, allora $\overline{B_1(0)} \subset X$ è compatta in $\sigma(X, X^*)$.*

Vale in realtà un risultato più forte del precedente, che caratterizza gli spazi riflessivi e attraverso la debole compattezza della palla unità chiusa. Per dimostrarlo utilizzeremo il seguente lemma.

Lemma (di Goldstine)**.**
Sia X uno spazio normato, $J : X \mapsto X^{**}$ l'isometria canonica e $\overline{B_1(0)} \subset X$ la palla unità chiusa. Allora, $J\left(\overline{B_1(0)}\right)$ è denso rispetto alla topologia debole $\sigma(X^{**}, X^*)$ *nella palla unità chiusa*

$$\overline{B_1(0)} := \{\Lambda \in X^{**} : \ \|\Lambda\|_{X^{**}} \leq 1\}.$$

Corollario.
L'immagine $J(X)$ di J è debolmente* densa in X^{**}.

Osservazione.
Il Lemma di Goldstine è falso se si considera la densità in norma su X^{**}. Infatti, essendo J un'isometria, se X è un Banach lo sarà anche $J(X)$ sarà un Banach e dunque sarà chiuso in X^{**}; pertanto, sarà denso se e solo se J è suriettiva, cioè se e solo se X è riflessivo. Per omogeneità, lo stesso vale se si considera solo la palla unità.

Dimostrazione.
Fissato $\Lambda_0 \in X^{**}$ con $\|\Lambda_0\| \leq 1$ e un suo intorno debole* U cerchiamo $x \in X$ tale che $J(x) \in U$; scegliendo U della forma

$$U = \mathcal{U}_{L_1,\ldots,L_N;\varepsilon}(\Lambda_0) := \{\Lambda \in X^{**} : \ |\Lambda L_1 - \Lambda_0 L_1| < \varepsilon, \ldots, |\Lambda L_1 - \Lambda_0 L_N| < \varepsilon\},$$

x dovrà verificare $|L_i x - \Lambda_0 L_i| < \varepsilon$ per $i = 1, \dots, N$. Se così non fosse, allora la mappa $A : X \to \mathbb{R}^N$ data da $A : x \mapsto (L_1 x, \dots, L_N x)$ verificherebbe $y_0 := (\Lambda_0 L_1, \dots, \Lambda_0 L_N) \notin \overline{A\left(\overline{B_1(0)}\right)}$. Potremmo allora separare strettamente $\overline{A\left(\overline{B_1(0)}\right)}$ e $\{y_0\}$, cioè trovare $(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N, \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$c_1(Ax)_1 + \cdots + c_N(Ax)_N < \alpha < c_1 y_{01} + \cdots + c_N y_{0N}$$

per ogni $x \in \overline{B_1(0)}$, cioè $\sum_{i=1}^N c_i L_i x < \alpha < \sum_{i=1}^N c_i \Lambda_0 L_i$; passando all'estremo superiore, otterremo la seguente contraddizione:

$$\left\| \sum_{i=1}^N c_i L_i \right\| \le \alpha < \sum_{i=1}^N c_i \Lambda_0 L_i \le \left\| \sum_{i=1}^N c_i L_i \right\| \|\Lambda_0\| \le \left\| \sum_{i=1}^N c_i L_i \right\| .$$

□

Teorema (Teorema di Kakutani)**.**
Sia X uno spazio di Banach. X è riflessivo se e solo se la palla unità $\overline{B_1(0)} \subset X$ è compatta in $\sigma(X, X^*)$.

Dimostrazione.
Se X è riflessivo, è stato già visto che la palla unità è debolmente chiusa.
Supponiamo ora che $\overline{B_1(0)}$ sia compatta in $\sigma(X, X^*)$; innanzitutto, osserviamo che $J : X \mapsto X^{**}$ è continua rispetto alle topologie $\sigma(X, X^*)$ in partenza e $\sigma(X^{**}, X^*)$ in arrivo, perché la preimmagine di un aperto fondamentale in $\sigma(X^{**}, X^*)$

$$J^{-1}\left(\mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(J(x_0))\right) = \mathcal{U}_{L_1,\dots,L_N;\varepsilon}(x_0)$$

è un aperto fondamentale in $\sigma(X, X^*)$. Dunque, anche l'immagine attraverso J di $\overline{B_1(0)}$ è compatta in $\sigma(X^{**}, X^*)$ e in particolare chiusa. Dal Lemma di Goldstine otteniamo che $J\left(\overline{B_1(0)}\right)$ è anche densa in $\overline{B_1(0)}$, e dunque non potrà che essere $J\left(\overline{B_1(0)}\right) = \overline{B_1(0)}$; ragionando per omogeneità concludiamo che $J(X) = X^{**}$, cioè X è riflessivo. □

Mostriamo ora alcuni risultati che mettono in relazione riflessività e separabilità.

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach tale che X^* è separabile.
Allora, X è separabile.

Dimostrazione.
Sia $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione densa in X^*; allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ e $L_n x_n \ge \frac{\|L_n\|}{2}$. Mostriamo che un sottospazio numerabile e denso è dato dalle combinazioni lineari razionali

$$D := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{x_n\} = \{c_1 x_1 + \cdots + c_N x_N;\ c_i \in \mathbb{Q}\} :$$

D è chiaramente numerabile ed è denso in $Y = \mathrm{Span}\{x_n\}$, dunque basterà far vedere che Y è denso in X; a questo scopo, grazie a un corollario delle forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach, sarà sufficiente mostrare che l'unico funzionale in X^* che si annulla sull'intero Y è quello identicamente nullo. Se $L|_Y \equiv 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ trovo L_N tale che $\|L - L_N\| \le \varepsilon$ e dunque

$$\|L\| \le \|L - L_N\| + \|L_N\| \le \varepsilon + 2L_N x_N = \varepsilon + 2(L_N x_N - L x_N) \le \varepsilon + 2\|L_N - L\| \le 3\varepsilon,$$

quindi $L \equiv 0$. □

Corollario.
Se X^* è separabile, la topologia debole* su X^* è localmente metrizzabile.

Osservazione.
Se X è uno spazio separabile, il suo duale X^* potrebbe non esserlo. Infatti, $L^1([0,1])$ e ℓ_1 sono entrambi separabili ma i rispettivi duali non lo sono, essendo copie isomorfe rispettivamente di $L^\infty([0,1])$ e ℓ_∞.

Corollario.
Sia X uno spazio di Banach.
Allora, X è riflessivo e separabile se e solo se X^* è riflessivo e separabile.

Dimostrazione.
Se X^* è riflessivo e separabile, allora dal lemma precedente otteniamo che X è riflessivo mentre dalla proposizione deduciamo che X è separabile.
Viceversa, se X è riflessivo e separabile, allora anche X^{**}, essendo una copia isomorfa di X, è riflessivo e separabile e quindi, come abbiamo appena dimostrato, anche X^* è riflessivo e separabile.
□

Esempio.
Gli spazi $L^p([0,1])$ sono riflessivi e separabili per ogni $p \in (1,+\infty)$. Lo spazio $L^1([0,1])$ è separabile ma non riflessivo, e il suo duale è isomorfo a $L^\infty([0,1])$ e dunque non è né separabile né riflessivo. Infine, $L^\infty([0,1])$ non è né separabile né riflessivo e anche il suo duale non é riflessivo (altrimenti anche $L^\infty([0,1])$ sarebbe riflessivo) né separabile (altrimenti lo sarebbe anche $L^\infty([0,1])$).
Un discorso analogo vale per gli spazi ℓ_p.

Concludiamo il capitolo sulle topologie deboli introducendo una classe di spazi di Banach: quelli <u>uniformemente convessi</u>. Questi spazi sono definiti attraverso una condizione puramente geometrica di uniforme stretta convessità delle palle; tuttavia, da questa definizione discendono sorprendentemente delle importanti proprietà topologiche.

Definizione.
*Uno spazio di Banach X si dice **uniformemente convesso** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta.$$

Osservazione.

1. *La definizione può essere data equivalentemente assumendo $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$: se ad esempio $\|x\| \leq 1-\gamma$ allora abbiamo sempre $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \frac{\|x\|+\|y\|}{2} \leq 1 - \frac{\gamma}{2}$, e analogamente se $\|y\| \leq 1-\gamma$; se invece $1-\gamma \leq \|x\|, \|y\| \leq 1$ allora avremo*
$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \|x-y\| - \left\| \frac{x}{\|x\|} - x \right\| - \left\| y - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \varepsilon - (1-\|x\|) - (1-\|y\|) \geq \varepsilon - 2\gamma =: \varepsilon',$$
dunque $\left\| \frac{\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}}{2} \right\| \leq 1-\delta'$, per qualche $\delta' > 0$, e quindi
$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left\| \frac{\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}}{2} \right\| + \frac{\left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} - y \right\|}{2} \leq 1 - \delta' + \gamma =: \delta$$

2. *In uno spazio uniformemente convesso le palle sono sempre strettamente convesse; la condizione di convessità uniforme è tuttavia più forte perché richiede una uniformità rispetto alla scelta dei punti sulla sfera, che potrebbe non essere verificata perché le sfere in generale non sono compatte.*

3. *Negli spazi uniformemente convessi è possibile definire la proiezione su un chiuso convesso come l'unico punto di distanza minima, analogamente agli spazi di Hilbert, perché la proprietà di uniforme convessità permette di dimostrare l'esistenza e l'unicità del punto di minima distanza.*

Esempio.

1. *Gli spazi di Hilbert sono uniformemente convessi, perché dalla regola del parallelogramma abbiamo, se* $\|x\| = \|y\| = 1$ *e* $\|x - y\| \geq \varepsilon$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \sqrt{\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4}} \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} =: 1 - \delta.$$

2. *Lo spazio* $L^1(\mu)$ *<u>non</u> è uniformemente convesso: prendiamo infatti* A, B *misurabili disgiunti di misura positiva (se non esistono,* $L^1(\mu)$ *è uni-dimensionale), e definiamo* $f = \frac{\chi_A}{|\mu(A)|}, g = \frac{\chi_B}{|\mu(B)|}$*; otterremo*

$$\|f\| = \|g\| = 1, \|f - g\| = 2, \qquad \left\|\frac{f+g}{2}\right\| = 1.$$

3. *Neanche* $L^\infty(\mu)$ *è uniformemente convesso, perché prendendo* $f = \chi_A + \chi_B, g = \chi_A - \chi_B$ *si ottiene, come prima,*

$$\|f\| = \|g\| = 1, \|f - g\| = 2, \qquad \left\|\frac{f+g}{2}\right\| = 1;$$

analogamente, non sono uniformemente convessi neanche i sottospazi chiusi $c_0 \lhd \ell_\infty$ *e* $C(K) \lhd L^\infty(K)$ *per* $K \Subset \mathbb{R}^N$.

Il seguente risultato ci mostra che gli spazi uniformemente convessi verificano una proprietà apparentemente di natura assai diversa: sono spazi riflessivi.

Teorema (di Milman-Pettis)**.**
Gli spazi uniformemente convessi sono riflessivi.

Dimostrazione.
Per omogeneità sarà sufficiente mostrare che se X è uniformemente convesso e $\Lambda_0 \in X^{**}$ con $\|\Lambda_0\| = 1$ allora $\Lambda_0 \in J(X)$; inoltre, poiché $J(X)$ è chiuso in X^{**} (rispetto alla topologia della norma), basterà far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ tale che $\|J(x) - \Lambda_0\| \leq \varepsilon$.
Prendiamo $L \in X^*$ tale che $\|L\| = 1$ e $\Lambda_0 L \geq 1 - \frac{\delta}{2}$, con δ come nella definizione di convessità uniforme, e consideriamo l'intorno debole* di Λ_0 dato da

$$U = \mathcal{U}_{L;\frac{\delta}{2}}(\Lambda_0) := \left\{\Lambda \in X^{**} : |\Lambda L - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Poiché, per un lemma precedente, $J(X)$ è denso in $\sigma(X^{**}, X^*)$, avremo $J(x) \in U$ per qualche $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$; per concludere ci basterà mostrare che proprio questo x verifica $\|J(x) - \Lambda_0\| \leq \varepsilon$. Se così non fosse, allora $\Lambda_0 \in X^{**} \setminus \overline{B_\varepsilon(J(x))}$, ed essendo $\overline{B_\varepsilon(J(x))}$ chiuso anche in $\sigma(X^{**}, X^*)$ e $J(X)$ denso in $\sigma(X^{**}, X^*)$ avremo $J(y) \in U \setminus \overline{B_\varepsilon(J(x))}$ per qualche $y \in \overline{B_1(0)} \subset X$. y dunque verificherà

$$|Ly - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}, \qquad \|x - y\| > \varepsilon.$$

Essendo però anche $x \in U$, avremo $|Lx - \Lambda_0 L| < \frac{\delta}{2}$, da cui

$$\|x + y\| \geq Lx + Ly \geq 2\Lambda_0 L - \delta \geq 2 - 2\delta,$$

cioè $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta$, in contraddizione con $\|x - y\| > \varepsilon$. $\square$

Osservazione.
Gli spazi finito-dimensionali $\left(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1\right), \left(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty\right)$ *non sono uniformemente convessi, essendo un caso particolare di spazi* L^1 *e* L^∞ *rispettivamente, ma poiché hanno dimensione finita sono riflessivi.*

Un'altra utile proprietà degli spazi riflessivi è la relazione tra convergenza debole e convergenza in norma.

Proposizione.
Sia X uno spazio uniformemente convesso e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X e $x \in X$. Allora, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ se e solo se

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x, \qquad \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} x.$$

Dimostrazione.
Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ allora abbiamo già visto che $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ e inoltre $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} x$ perché la norma è una funzione continua.
Dimostriamo ora che negli spazi uniformemente convessi la convergenza debole e la convergenza della norma implicano la convergenza in norma. Questo è ovvio nel caso in cui il limite sia $x = 0$. Altrimenti, $y_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|}, y := \dfrac{x}{\|x\|}$ verificano $\|y_n\| = \|y\| = 1$ e $y_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} y$; per linearità avremo anche $\dfrac{y_n + y}{2} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} y$, dunque dall'inferiore semicontinuità debole della norma si ottiene $\liminf\limits_{n\to+\infty} \left\|\dfrac{y_n + y}{2}\right\| \geq \|y\| = 1$. Se avessimo $\|y_n - y\| \geq \varepsilon > 0$ allora, per uniforme convessità, avremmo anche $\left\|\dfrac{y_n + y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$, in contraddizione con quanto appena visto, pertanto $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. Dunque possiamo concludere che

$$\|x_n - x\| \leq \left\|x_n - \frac{\|x\|}{\|x_n\|}x_n\right\| + \left\|\frac{\|x\|}{\|x_n\|}x_n - x\right\| = |\|x_n\| - \|x\|| + \|x\|\|y_n - y\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

□

Osservazione.
Nel caso degli spazi di Hilbert il risultato segue facilmente dalle proprietà del prodotto scalare: se $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ e $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x\|$ allora

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\to} 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$$

Esempio.

1. *Il risultato può non essere vero negli spazi non uniformemente convessi, come ad esempio c_0: la successione definita da $x_n = e_1 + e_n = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ converge debolmente a $x = e_1$, perché come abbiamo già visto $x_n - x = e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ e inoltre $\|x_n\| = \|x\| = 1$, ma $\|x_n - x\| = 1$.*

2. *Il precedente risultato è vero anche in ℓ_1, nonostante questo spazio non sia uniformemente convesso, perché come abbiamo già visto la convergenza debole in ℓ_1 equivale alla convergenza in norma.*

Per concludere, mostriamo che tutti gli spazi di L^p sono uniformemente convessi. Questo seguirà abbastanza facilmente dalla seguente disuguaglianza:

Proposizione (Disuguaglianza di Hanner)**.**
Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e $f, g \in L^p(\mu)$ per qualche $p \in [1, +\infty)$. Se $p \leq 2$, allora

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)}^p + \|f - g\|_{L^p(\mu)}^p \geq (\|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)})^p + |\|f\|_{L^p(\mu)} - \|g\|_{L^p(\mu)}|^p.$$

Se invece $p \geq 2$, allora

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)}^p + \|f - g\|_{L^p(\mu)}^p \leq (\|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)})^p + |\|f\|_{L^p(\mu)} - \|g\|_{L^p(\mu)}|^p.$$

Dimostrazione.
Partiamo dal caso $p \le 2$. La disuguaglianza è simmetrica in f, g ed è banale nel caso in cui una delle due sia nulla, dunque possiamo supporre $\|f\| \ge \|g\| > 0$ e la disuguaglianza equivarrà a

$$\begin{aligned}
& \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \\
\ge \; & (\|f\| + \|g\|)^p + (\|f\| - \|g\|)^p \\
= \; & \left((\|f\| + \|g\|)^{p-1} + (\|f\| - \|g\|)^{p-1}\right)\|f\| + \left((\|f\| + \|g\|)^{p-1} - (\|f\| - \|g\|)^{p-1}\right)\|g\| \\
= \; & \underbrace{\left(\left(1 + \frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1} + \left(1 - \frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1}\right)}_{=:a\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)} \|f\|^p + \underbrace{\frac{\|f\|^{p-1}}{\|g\|^{p-1}}\left(\left(1 + \frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1} - \left(1 - \frac{\|g\|}{\|f\|}\right)^{p-1}\right)}_{=:b\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)} \|g\|^p,
\end{aligned}$$

con

$$a(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \qquad\qquad b(r) = \frac{(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}}{r^{p-1}};$$

questa disuguaglianza chiaramente seguirà dalla stima puntuale

$$|f(x) + g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p \ge a\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)|f(x)|^p + b\left(\frac{\|g\|}{\|f\|}\right)|g(x)|^p$$

per μ-q.o. x, cioè

$$|A+B|^p + |A-B|^p \ge a(r)|A|^p + b(r)|B|^p, \qquad\qquad \forall r \in (0,1], A, B \in \mathbb{R}.$$

Notiamo ora che è sufficiente dimostrare la disuguaglianza nel caso $|A| \ge |B|$: infatti, la mappa $F : r \mapsto a(r) - b(r)$ è decrescente in quanto

$$(a(r) - b(r))' = (p-1)\left(\frac{r^p + 1}{r^p}\right)\left(\frac{1}{(1+r)^{2-p}} - \frac{1}{(1-r)^{2-p}}\right) \le 0,$$

dunque essendo $F(1) = 0$ avremo $F \ge 0$; perciò, quando $|A| \le |B|$ otterremo

$$0 \le F(r)(|B|^p - |A|^p) = a(r)|B|^p + b(r)|A|^p - (a(r)|A|^p + b(r)|B|^p)$$

e cioè $a(r)|A|^p + b(r)|B|^p \le a(r)|B|^p + b(r)|A|^p$. Consideriamo ora, per $|A| \ge |B|$ la funzione $G : r \mapsto a(r)|A|^p + b(r)|B|^p$; la sua derivata è

$$G'(r) = (p-1)\left(\frac{1}{(1+r)^{2-p}} - \frac{1}{(1-r)^{2-p}}\right)\left(|A|^p - \frac{|B|^p}{r^p}\right),$$

dunque $G(r)$ ha un ha un massimo assoluto in $r = \dfrac{|B|}{|A|}$, quindi

$$G(r) \le G\left(\frac{|B|}{|A|}\right) = ||A| + |B||^p + (|A| - |B|)^p = |A+B|^p + |A-B|^p$$

e la disuguaglianza è provata.
Nel caso $p \ge 2$ si ragiona in modo analogo ma con le disuguaglianze opposte: ci si restringe al caso $|A| \ge |B|$, in cui si vede che G ha un minimo assoluto in $\dfrac{|B|}{|A|}$ e dunque

$$|A+B|^p + |A-B|^p \le a(r)|A|^p + b(r)|B|^p, \qquad\qquad \forall r \in (0,1], A, B \in \mathbb{R},$$

da cui seguirà la disuguaglianza originariamente cercata con le stesse manipolazioni del caso $p \le 2$. □

Osservazione.

1. *Se $p = 2$ valgono entrambe le disuguaglianze, che dunque dovranno essere uguaglianze, cioè*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 + ||\|f\| - \|g\||^2;$$

sviluppando i quadrati a destra si ottiene la ben nota identità del parallelogramma.

2. Se $p = 1$ si la disuguaglianza di Hanner da come risultato

$$\|f+g\| + \|f-g\| \geq \max\{2\|f\|, 2\|g\|\};$$

a meno di scambiare f e g, possiamo supporre di avere $\|f\| \geq \|g\|$, dunque scrivendo $2f = (f+g)+(f-g)$ la disuguaglianza equivale alla ben nota disuguaglianza triangolare.

Corollario.
Gli spazi $L^p(\mu)$ sono uniformemente convessi per $p \in (1, +\infty)$.

Dimostrazione.
Prendiamo $f, g \in L^p(\mu)$ con $\|f\| = \|g\|_{L^p(\mu)} = 1, \|f-g\|_{L^p(\mu)} \geq \varepsilon$. Nel caso $p \geq 2$ dalla disuguaglianza di Hanner si ottiene

$$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p \leq 2^p,$$

da cui

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leq \left(1 - \frac{\|f-g\|^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} =: 1 - \delta.$$

Se invece $p \leq 2$, applichiamo la disuguaglianza di Hanner a $\dfrac{f+g}{2}, \dfrac{f-g}{2}$ e otteniamo:

$$\|f\|^p + \|g\|^p \geq \left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\| + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\| - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|\right|^p;$$

dunque, se $L^p(\mu)$ non fosse uniformemente convesso, esisterebbero f_n, g_n tali che $\|f_n\| = \|g_n\| = 1, \|f_n - g_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \varepsilon > 0, \left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, e dunque la disuguaglianza precedente darebbe la seguente contraddizione:

$$\begin{array}{rcl}
2 & = & \|f_n\|^p + \|g_n\|^p \\
& \geq & \left(\left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| + \left\|\dfrac{f_n-g_n}{2}\right\|\right)^p + \left(\left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| - \left\|\dfrac{f_n-g_n}{2}\right\|\right)^p \\
& \geq & \left(\left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(\left\|\dfrac{f_n+g_n}{2}\right\| - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p \\
& \underset{n\to+\infty}{\to} & \left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^p \\
& > & 2.
\end{array}$$

$\square$