AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Lezione 1-2-3 (25/02/2020)

L'argomento di questo corso sarà la analisi funzionale, cioè lo studio degli spazi di funzioni.
La maggior parte degli spazi che verranno studiati sono oggetti che gli studenti già conoscono bene dai corsi precedenti, come ad esempio gli spazi L^p o delle funzioni continue, ma qui verranno studiati sotto un punto di vista differente e più generale. In particolare, nello studio di questi spazi verranno utilizzati molti concetti di algebra lineare e di topologia generale, pertanto la conoscenza delle nozioni di base di queste aree sarà essenziale per una buona comprensione del corso.
Un aspetto particolarmente interessante sarà il confronto tra gli spazi finito-dimensionali, già studiati a fondo nei corsi di base, e gli spazi funzionali che introdurremo, che hanno dimensione infinita. Durante tutto il corso saranno frequenti le osservazioni riguardo le proprietà che determinate classi di spazi funzionali condividono con gli spazi di dimensione finita.
Una motivazione per lo studio di questi spazi funzionali è data dalle equazioni differenziali, che con i concetti introdotti in questo corso potranno essere affrontate in modo ben più efficace rispetto a quanto visto nei corsi di base.

Iniziamo a definire gli oggetti di base su cui lavoreremo per tutto il corso.

Definizione.
Sia X uno spazio vettoriale.
*Una **seminorma** su X è una funzione non-negativa $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ che verifichi:*

1. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ *(Disuguaglianza triangolare);*
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$ *(Omogeneità).*

Se inoltre è verificata:

3. $\|x\| > 0 \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}$, *(Positività);*

*allora $\|\cdot\|$ si dice **norma** e $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio normato**. Quando non c'è il rischio di ambiguità scriveremo semplicemente che X è uno spazio normato.*

Osservazione.

1. *Dalla 2., prendendo $\alpha = 0$, si deduce che $\|0\| = 0$ per ogni seminorma $\|\cdot\|$.*
2. *Ogni spazio normato è uno spazio metrico rispetto alla distanza $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ indotta da $\|\cdot\|$.*

Definizione.
Sia X uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ due norme su X.
*$\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ si dicono **equivalenti** se esiste una costante $C > 0$ tale che $\dfrac{\|x\|_1}{C} \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$ per ogni $x \in X$.*

Osservazione.
Se $\dim X < +\infty$, è ben noto che tutte le possibili norme su X sono equivalenti tra di loro.

Definizione.
*Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio di Banach** (o semplicemente Banach) se è uno spazio metrico completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$, cioè se ogni successione di Cauchy è convergente, cioè:*

$$\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0 \qquad \exists\, x \in X : \; x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$$

Osservazione.

1. *Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono due norme equivalenti su X allora le successioni di Cauchy per $\|\cdot\|_1$ e per $\|\cdot\|_2$ sono le stesse, e anche le successioni convergenti per $\|\cdot\|_1$ e per $\|\cdot\|_2$ sono le stesse. Dunque, $(X, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach se e solo se lo è $(X, \|\cdot\|_2)$.*
   In particolare, tutti gli spazi normati finito-dimensionali sono spazi di Banach.

2. *Un sottoinsieme $E \subset X$ di uno spazio di Banach è a sua volta un Banach con la norma indotta $\|\cdot\|$ se e solo se è un suo sottospazio lineare chiuso. Indicheremo i sottospazi lineari chiusi con la notazione $E \lhd X$. Per sottolineare che indichiamo un sottospazio proprio, cioè $E \neq X$, scriveremo $E \underset{\neq}{\lhd} X$.*

   In dimensione infinita non tutti i sottospazi lineari sono chiusi. Un sottospazio lineare non chiuso di uno spazio di Banach è uno spazio normato ma non è un Banach, perché i sottospazi di uno spazio metrico completo sono completi se e solo se sono chiusi.

Esempio.

1. *Dato uno spazio misura (X, Σ, μ), gli spazi $L^p(\mu)$ sono spazi di Banach per $p \in [1, +\infty]$, con*

   $$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty); \qquad\qquad \|f\|_\infty := \mathrm{esssup}_X |f|.$$

   Prendendo lo spazio finito $X = \{1, \ldots, N\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ e $\mu = \#$ la misura che conta, otteniamo $\mathbb{R}^N$ con

   $$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^N |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad\qquad \|x\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,N} |x(k)|.$$

   Se invece consideriamo la misura che conta su tutti gli interi positivi $X = \mathbb{N}$ otteniamo gli spazi di successioni

   $$\begin{aligned} \ell_p &:= \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \; \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\}; \\ \ell_\infty &:= \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \; \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < +\infty\right\}. \end{aligned}$$

   Affinché $\|\cdot\|_p$ sia una norma, è necessario considerare gli elementi L^p non come funzioni ma come classi di funzioni rispetto alla relazione di uguaglianza μ-quasi ovunque, altrimenti $\|\cdot\|_p$ è solo una seminorma.

2. *Lo spazio $C^K([a, b])$ delle funzioni con k derivate continue su un intervallo chiuso e limitato è un Banach con la norma*

   $$\|f\|_{C^K} := \sum_{k=1}^K \sup_{[a,b]} \left|f^{(k)}\right|.$$

3. *Se $\mu(X) < +\infty$, come ad esempio su un compatto di $\mathbb{R}^N$ con la misura di Lebesgue, è possibile considerare lo spazio normato $(L^p(\mu), \|\cdot\|_q)$ con $q \leq p$, mentre negli spazi di successioni si può considerare $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ per $q \geq p$. Tuttavia, la norma $\|\cdot\|_q$ non è equivalente a $\|\cdot\|_p$ in nessuno dei due casi e gli spazi $(L^p(\mu), \|\cdot\|_q)$ e $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ non sono completi.*
   Un discorso analogo è valido per lo spazio $\left(C^K([a, b]), \|\cdot\|_{C^L}\right)$ se $L < K$.

Dunque gli oggetti del nostro studio saranno gli spazi normati che, nelle maggior parte dei casi, assumeremo completi e cioè degli spazi di Banach.
Introduciamo ora le applicazioni tra questi spazi che saranno oggetto del nostro studio. Siamo interessati a mappe che conservino sia la struttura di spazio vettoriale che quella di norma, dunque considereremo mappe lineari e continue.
Come vedremo, negli spazi infinito-dimensionali non è ridondante richiedere che una mappa lineare sia continua, perché esistono molti esempi di mappe lineari non continue. Questa è una delle principali differenze tra spazi di dimensione finita e infinita ed emergerà in molti degli argomenti che verranno trattati.

Definizione.
*Una mappa $A : X \to Y$ tra due spazi vettoriali X, Y si dice **lineare** se*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall\, x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per mappe lineari utilizzeremo la notazione Ax per intendere $A(x)$.

Osservazione.

1. *Se $\dim X < +\infty$ è ben noto che allora ogni mappa lineare è continua. Infatti, data una base $\{e_1, \dots, e_N\}$ di X, abbiamo che*

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| &= \left\| A\sum_{k=1}^{N} x(k)e_k - A\sum_{i=1}^{N} y(k)e_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{N} (x(k) - y(k))Ae_k \right\| \\ &\leq \sup_{k=1,\dots,N} \|Ae_k\| \sum_{k=1}^{N} |x(k) - y(k)| \\ &\leq C\|x - y\|; \end{aligned}$$

   dunque, A è Lipschitz e in particolare continua.

2. *In generale non tutte le mappe lineari tra spazi vettoriali normati sono continue. Prendiamo infatti $X = C^1([0,1])$, $Y = C([0,1])$, entrambi con la norma $\|f\| := \sup_{[0,1]} |f|$, e $A : X \to Y$ data da $(Af)(x) \mapsto f'(x)$: è chiaramente lineare ma non è continua perché la successione $\left\{ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \right\}$ verifica $\|f_n\| \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ma $\|Af_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |\cos(nx)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.*

3. *In generale, anche se una mappa lineare è continua, l'inversa potrebbe non esserlo. Infatti, prendendo X, Y come prima, la mappa $B : Y \to X$ data da $(Bf)(x) = \displaystyle\int_0^x f$ è continua, perché*

$$\|Bf - Bg\|_X \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f - g| = \int_0^1 |f - g| \leq \|f - g\|_Y.$$

   Inoltre B è iniettiva, dunque è invertibile sull'immagine $\widetilde{X} := \{f \in C^1([0,1]) :\ f(0) = 0\}$; tuttavia, la sua inversa B^{-1} è (la restrizione a $\widetilde{X}$) della mappa A definita in precedenza, che come abbiamo visto non è continua.

Il prossimo risultato caratterizza la continuità delle mappe lineari: la continuità in un punto equivale alla continuità su tutto lo spazio e alla limitatezza del rapporto tra le norme dei vettori e delle loro immagini.

Proposizione.
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati e $A : X \to Y$ lineare.
Allora, le seguenti condizioni si equivalgono:

a. A *è continua;*

b. $\exists\, x_0 \in X$ *tale che* A *è continua in* x_0*;*

c. A *è* *limitata, cioè* $\|A\| := \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$.

Dimostrazione.

$a \Rightarrow b$ Ovvio.

$b \Rightarrow c$ Siano ε, δ tali che $\|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y \leq \varepsilon$. Per ogni $z \in X \setminus \{0\}$ scriviamo

$$Az = \frac{\|z\|_X}{\delta} A\left(\frac{\delta}{\|z\|_X} z\right) = \frac{\|z\|_X}{\delta}\left(A\left(\frac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0\right) - Ax_0\right),$$

e inoltre $\left\|\dfrac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0 - x_0\right\|_X = \delta$, pertanto $\left\|A\left(\dfrac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0\right) - Ax_0\right\|_Y \leq \varepsilon$. Dunque,

$$\|Az\|_Y = \frac{\|z\|_X}{\delta}\left\|A\left(\frac{\delta}{\|z\|_X} z + x_0\right) - Ax_0\right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|z\|_X,$$

e cioè $\|A\| < \dfrac{\varepsilon}{\delta} < +\infty$.

$c \Rightarrow a$ Se A è limitato, allora per $x, y \in X$ con $x \neq y$ vale

$$\|Ax - Ay\|_Y = \frac{\|Ax - Ay\|_Y}{\|x - y\|_X}\|x - y\|_X \leq \|A\|\|x - y\|_X,$$

dunque A è Lipschitz e in particolare continua.

□

Osservazione.
La costante $\|A\|$ *è, intuitivamente, il più grande fattore per cui* A *può dilatare un vettore. Può essere equivalentemente caratterizzata dai seguenti valori:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X < 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Esempio.

1. *Se* (X, Σ, μ) *è uno spazio misura, consideriamo la mappa* $A : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ *data dalla moltiplicazione per una data* g*, ovvero:* $(Af)(x) = f(x)g(x)$*. Affinché* A *sia ben definita bisognerà assumere* $p \geq q$ *e* $g \in L^r(\mu)$ *con* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.
   A *è ovviamente lineare ed è continua perché, dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene* $\|A\| \leq \|g\|_r$*; in realtà, scegliendo come* $f = g|g|^{\frac{r}{p}-1}$ *si ottiene* $\|A\| = \|g\|_r$

2. *La mappa* $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ *data da* $(Af)(x) = \int_0^x f(t)h(t)\mathrm{d}t$*, per* $h \in L^1([0,1])$ *fissata, è lineare e continua; infatti, si verifica immediatamente che* $\|A\| \leq \|h\|_1$ *e, prendendo* $f = \mathrm{segno}(h)$*, si ottiene* $\|A\| = \|h\|_1$.

Lezioni 4-5 (27/02/2020)

Anche sull'insieme delle mappe lineari continue tra due spazi fissati è possibile definire una struttura di spazio normato.

Proposizione.
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati.
Allora l'insieme delle mappe lineari continue tra X e Y, che indichiamo con

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{A : X \to Y \textit{ lineare e continua}\},$$

è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto date da

$$\begin{aligned} (A+B) : x &\mapsto Ax + Bx \\ (\alpha A) : x &\mapsto \alpha \cdot Ax \end{aligned}$$

e la norma già definita in precedenza $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$.
Inoltre, se Y è uno spazio di Banach, allora anche $\mathcal{L}(X,Y)$ è un Banach.
Quando il codominio $Y = X$ coincide con il dominio di A, indichiamo lo spazio degli operatori continui su X come $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

Dimostrazione.
Si verifica immediatamente che le operazioni di somma e prodotto verificano gli assiomi di spazio vettoriale e che $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è una norma.
Mostriamo ora la completezza di $\mathcal{L}(X,Y)$ sotto l'ipotesi che Y sia completo. Se $\{A_n\}$ è una successione di Cauchy per $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, allora lo è anche $\{A_n x\}$, per ogni $x \in X$, perché $\|A_n x - A_m x\|_Y \le \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$: dunque, per la completezza di Y, avrò $A_n x \underset{n\to+\infty}{\to} A(x)$, per qualche $A(x)$. La mappa $x \mapsto A(x)$ é:

- lineare, perché

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to+\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to+\infty} A_n y = \alpha A(x) + \beta A(y);$$

- continua, perché, fissando $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$ tale che $\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon$ per ogni $n, m \ge N$,

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_Y \le \limsup_{n\to+\infty} \left(\|A_n - A_N\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|A_N\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right) \|x\|_X \le \left(\varepsilon + \|A_N\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right) \|x\|_X$$

- il limite della successione $\|A_n\|$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, il che conclude la dimostrazione della completezza, perché, prendendo ε, n, m come prima,

$$\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|A_n x - Ax\|_Y = \sup_{\|x\| \le 1} \lim_{m\to+\infty} \|A_n x - A_m x\|_Y \le \limsup_{m\to+\infty} \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon.$$

□

Osservazione.

1. *Se sia* $\dim X$ *che* $\dim Y$ *sono finite, allora anche $\mathcal{L}(X,Y)$ ha dimensione finita pari a* $\dim(\mathcal{L}(X,Y)) = \dim X \cdot \dim Y$.

2. *Dati X, Y, Z spazi normati e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, allora $B \circ A \in L(X,Z)$ verifica la disuguaglianza*
$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \le \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$
In particolare, prendendo $X = Y = Z$ e $A = B$, otteniamo $\left\|A^2\right\| \le \|A\|^2$ e, iterando, $\left\|A^N\right\| \le \|A\|^N$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Introduciamo un concetto fondamentale nell'analisi funzionale, quello di isometria tra due spazi normati: le isometrie mantengono la struttura lineare e quella di norma, dunque due spazi isometrici hanno le stesse proprietà e sono in qualche modo "interscambiabili" dal punto di vista dell'analisi funzionale.

Definizione.
*Una mappa lineare $\Phi : X \to Y$ tra due spazi normati $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ si dice **isometria** se $\|\Phi(x)\|_Y = \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.*
*Se inoltre Φ è suriettiva, si dice che X e Y sono **isometrici**.*

Osservazione.
Dalla definizione segue che ogni isometria Φ è continua con $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1$. Inoltre, le isometrie sono iniettive perché se $\Phi(x) = 0$ allora $\|x\|_X = \|\Phi(x)\|_Y = 0$.
Dunque, un'isometria suriettiva è invertibile e la sua inversa è anch'essa un'isometria, e in particolare è continua.

Esempio.

1. *Per ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$ un'isometria suriettiva tra $L^p([0, 1])$ e $L^p([a, b])$ è data da*
$$f(x) \mapsto (b-a)^{\frac{1}{p}} f((b-a)x + a).$$
2. *Un'isometria <u>non suriettiva</u> da ℓ_p in sé, per ogni $p \in [1, +\infty]$, è data da*
$$(x(1), x(2), x(3), \dots) \mapsto (0, x(1), x(2), \dots).$$

Ci soffermeremo ora su un caso particolare di spazi di mappe lineari continue, quello in cui il codominio è $Y = \mathbb{R}$. Questo spazio dei funzionali lineari continui, detto spazio duale di X, avrà un ruolo fondamentale per lo studio delle proprietà dello stesso X.
Molti spazi duali sono in realtà isometrici ad altri spazi ben noti.

Definizione.
*Lo **spazio duale** di uno spazio normato X è lo spazio $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ dei funzionali lineari continui su X.*

Osservazione.
Poiché $\mathbb{R}$ è completo, dalla proposizione precedente deduciamo che X^* è uno spazio di Banach (anche se X non è completo).

Esempio.

1. *In uno spazio misura σ-finito il duale di $L^p(\mu)$, per $p \in [1, +\infty)$, è isometrico a $L^{p'}(\mu)$, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Un'isometria suriettiva tra i due spazi è data da*
$$\begin{array}{rcl} L^{p'}(\mu) & \longleftrightarrow & (L^p(\mu))^* \\ g & \leftrightarrow & L_g f \to \displaystyle\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \end{array}$$
2. *Se $K \Subset \mathbb{R}^N$ è compatto, il duale dello spazio delle funzioni continue $C(K)$ è dato dallo spazio di misure con segno $\mathcal{M}(K)$, dotato della norma della variazione totale, e un'isometria suriettiva è*
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(K) & \longleftrightarrow & (C(K))^* \\ \mu & \leftrightarrow & L_\mu : f \to \displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu \end{array}$$

Concentriamoci adesso su una classe di spazi normati che ha una struttura più ricca, data da un prodotto scalare. Su questi spazi sarà possibile estendere con poche difficoltà molti concetti elementari dello spazio euclideo.

Definizione.
*Un **prodotto scalare** su uno spazio vettoriale H è una mappa $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ che verifichi:*

1. *$(x, y) = (y, x)$ per ogni $x, y \in H$ (Simmetria);*
2. *Per ogni $y \in H$ fissato, $x \mapsto (x, y)$ è lineare in x, cioè*
$$(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y), \qquad \forall\, x, y, z \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \textit{(Linearità)};$$
3. *$(x, x) > 0$ per ogni $x \in H \setminus \{0\}$ (Positività).*

Osservazione.

1. *Dalla 1 e dalla 2 si deduce che (x, y) è lineare anche in y, a x fissato;*
2. *Da ogni prodotto scalare si può definire una norma su H data da $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$;*
3. *Valgono le seguenti formule, ben note nel caso euclideo:*
   - *$(x, y) \le \|x\|\|y\|$ (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz);*
   - *$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Regola del parallelogramma);*
   - *Se $(x, y) = 0$ allora $\|x + y\|^2 = \|x|^2 + \|y\|^2$ (Teorema di Pitagora);*
   - *$(x, y) = \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$ (Identità di polarizzazione).*

Definizione.
*Uno spazio vettoriale con prodotto scalare H si dice **spazio di Hilbert** (o semplicemente Hilbert) se è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ indotta dal prodotto scalare.*

Esempio.

1. *Gli spazi $L^2(\mu)$ sono spazi di Hilbert con il prodotto scalare dato da $(f, g) := \displaystyle\int_X fg\,\mathrm{d}\mu$. In particolare, lo sono $\mathbb{R}^N$ con il prodotto scalare $(x, y) := \displaystyle\sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)$ e lo spazio ℓ_2 delle successioni a quadrato sommabile con $(x, y) := \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)$.*
2. *Gli spazi $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ per $p \ne 2$ oppure $C^K([a, b])$ non sono spazi di Hilbert con nessuna scelta di prodotto scalare, perché non vale la regola del parallelogramma per la norma $\|\cdot\|_p$.*
3. *Gli spazi $(L^p(\mu), \|\cdot\|_2)$, per $p \ne 2$ tale che $L^p(\mu) \subset L^2(\mu)$, e $\big(C^K([0, 1]), \|\cdot\|_2\big)$ non sono spazi di Hilbert perché la norma proviene dal prodotto scalare $(f, g) = \displaystyle\int_X fg\,\mathrm{d}\mu$, ma lo spazio non è completo rispetto a questa norma.*

Definizione.
Sia X uno spazio vettoriale e $E \subset X$ un suo sottoinsieme. L'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di X si indica con
$$\mathrm{Span}(E) := \{c_1x_1 + \cdots + c_Nx_N :\ c_i \in \mathbb{R},\ x_i \in E\}.$$

Osservazione.
Dato $E \subset X$, $\mathrm{Span}(E)$ è il più piccolo sottospazio lineare contenente E, mentre $\overline{\mathrm{Span}(E)}$ è il più piccolo sottospazio lineare chiuso contenente E.

Una prima proprietà fondamentale degli spazi con prodotto scalare è che è possibile definire la nozione di ortogonalità.

Definizione.
Due elementi $x, y \in H$ di uno spazio vettoriale con prodotto scalare si dicono ***ortogonali*** *se $(x, y) = 0$ e per indicarlo si utilizza la notazione $x \perp y$.*
*L'**ortogonale** di un sottoinsieme non vuoto $E \subset H$ è l'insieme degli elementi di H che sono ortogonali a tutti quelli di M, ovvero*

$$E^{\perp} := \{x \in H : \ (x, y) = 0 \quad \forall\, y \in E\}.$$

Esempio.

1. *Se $H = \ell_2$ e $E = \{e_1\}$ contiene il primo vettore della base standard infinito-dimensionale $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, allora l'ortogonale è dato dalle successioni con la prima entrata nulla:*

$$E^{\perp} = \{x \in \ell_2 : \ x(1) = 0\} = \left\{ (0, x(2), x(3), \dots) : \ \sum_{k=2}^{+\infty} x(k)^2 < +\infty \right\}.$$

2. *Se $H = L^2([-1, 1])$ e*

$$E = \{f \in L^2([-1, 1]) : \ f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1, 1)\}$$

è dato da tutte le funzioni pari quasi ovunque, allora l'ortogonale è dato dalle funzioni dispari q.o.:

$$E^{\perp} = \{f \in L^2([-1, 1]) : \ f(x) = -f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1, 1)\};$$

viceversa, l'ortogonale delle funzioni dispari è dato dallo spazio $E^{\perp\perp} = E$ delle funzioni pari.

Lezioni 6-7-8 (03/03/2020)

Lemma.
Sia H uno spazio con prodotto scalare e $E \subset H$ non vuoto. Allora:

1. $E^\perp \lhd H$;
2. $E^\perp \cap E = \begin{cases} \{0\} & \text{se } 0 \in E \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin E \end{cases}$;
3. *Se* $F \subset E$, *allora* $E^\perp \subset F^\perp$;
4. $E^\perp = \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$, *e in particolare* $E^\perp = \{0\}$ *se* E *è denso in* H;
5. $\overline{\mathrm{Span}(E)} \subset E^{\perp\perp}$.

Dimostrazione.

1. $E^\perp$ è un sottospazio lineare di H perché, presi $x, z \in E^\perp, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y \in E$, allora $(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y) = 0$ e dunque $\alpha x + \beta z \in E^\perp$.
   $E^\perp$ inoltre è chiuso perché può essere scritto come
   $$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{x \in H : \ (x, y) = 0\},$$
   che è un'intersezione di chiusi in quanto $x \mapsto (x, y)$ è continua per ogni y fissato.
2. Se $x \in E \cap E^\perp$, allora nella definizione di ortogonale si può prendere $y = x$ e dunque $0 = (x, x) = \|x\|^2$, cioè $x = 0$.
3. Se $x \in E^\perp$, allora $x \perp y$ per ogni $y \in E$, e in particolare è vero prendendo $y \in F$, dunque $x \in F^\perp$.
4. Poiché $E \subset \overline{\mathrm{Span}(E)}$, allora $E^\perp \supset \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$.
   Per mostrare l'altra inclusione, facciamo vedere innanzi tutto che $E^\perp \subset (\mathrm{Span}(E))^\perp$: se $x \in E^\perp$ e $y \in \mathrm{Span}(E)$, allora $y = c_1 y_1 + \cdots + c_N y_N$ con $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_N \in E$, dunque
   $$(x, y) = c_1(x, y_1) + \cdots + c_N(x, y_N) = 0,$$
   cioè $x \in (\mathrm{Span}(E))^\perp$. Per concludere, mostriamo $\mathrm{Span}(E)^\perp \subset \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$: se $x \in E^\perp$ e $y \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$, allora esiste $y_n \in \mathrm{Span}(E)$ con $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ e dunque
   $$(x, y) = \left(x, \lim_{n\to+\infty} y_n\right) = \lim_{n\to+\infty}(x, y_n) = 0,$$
   cioè $x \in \left(\overline{\mathrm{Span}(E)}\right)^\perp$.
5. Per definizione di ortogonale, per ogni $x \in E$, $y \in E^\perp$ vale $(x, y) = (y, x) = 0$, ma allora $x \in E^{\perp\perp}$. Dunque $E \subset E^{\perp\perp}$, ma essendo quest'ultimo un sottospazio chiuso, avremo anche $\overline{\mathrm{Span}(E)} \subset E^{\perp\perp}$.

$\square$

Un'altra caratteristica fondamentale degli spazi di Hilbert è poter definire una <u>proiezione</u> che mappi l'intero spazio su un suo dato sottoinsieme chiuso e convesso (e dunque in particolare per i sottospazi chiusi), con delle speciali proprietà.

Lemma.
Sia H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un suo sottoinsieme chiuso e convesso.
Allora per ogni $x \in H$ esiste un unico $P(x) \in K$ che minimizza la distanza, cioè

$$\|P(x) - x\| = \mathrm{d}(x, K) = \min_{y \in K} \|y - x\|.$$

Inoltre, $P(x)$ verifica:

1. *$(P(x) - x, P(x) - y) \leq 0$ per ogni $y \in K$, ed è l'unico $z \in K$ a verificare $(z - x, z - y) \leq 0$ per ogni $y \in K$;*
2. *$\|P(x) - P(z)\| \leq \|x - z\|$ per ogni $x, z \in H$, e in particolare P è continua.*

P è detta ***proiezione*** *su K.*

Dimostrazione.
Mostriamo che, fissato $x \in H$, esiste un unico punto in K che minimizza la distanza da x. Sia $\{y_n\}$ una successione minimizzante, cioè $y_n \in K$ e $\|y_n - x\| \underset{n \to +\infty}{\to} d := \mathrm{d}(x, K)$: fissato $\varepsilon > 0$, per $n, m \geq N(\varepsilon)$ avrò $\|y_n - x\|, \|y_m - x\| \leq d + \varepsilon$, inoltre essendo K convesso ho $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in K$ e dunque $\left\|\dfrac{y_n + y_m}{2} - x\right\| \geq d$. Dunque, applicando la regola del parallelogramma a $y_n - x, y_m - x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\
&\leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2 \\
&\leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2;
\end{aligned}$$

essendo ε arbitrario, $\{y_n\}$ è di Cauchy e dunque, per la completezza di H, converge.
Per mostrare l'unicità, supponiamo per assurdo che esistano y_1, y_2 con $y_1 \neq y_2$ e $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = d$. Allora, applicando come prima l'identità del parallelogramma si ottiene:

$$\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 = \frac{\|y_1 - x\|^2}{2} + \frac{\|y_2 - x\|^2}{2} - \frac{\|y_1 - y_2\|^2}{4} < \frac{\|y_1 - x\|^2}{2} + \frac{\|y_2 - x\|^2}{2} = d^2,$$

cioè $\left\|\dfrac{y_1 + y_2}{2} - x\right\| < d$, che è assurdo. Dunque c'è un unico $P(x)$ di distanza minima.
Fissiamo poi $y \in K$ e utilizziamo il fatto che $P(x)$ minimizza la distanza rispetto a $(1 - t)P(x) + ty$, per $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \|P(x) - x\|^2 - \|(1 - t)P(x) + ty - x\|^2 \\
&= \|P(x) - x\|^2 - \big(\| - tP(x) + ty\|^2 + \|P(x) - x\|^2 + 2(-tP(x) + ty, P(x) - x)\big) \\
&= -t^2\|P(x) - y\|^2 + 2t(P(x) - y, P(x) - x).
\end{aligned}$$

Dividendo per $2t$ otteniamo

$$(P(x) - y, P(x) - x) \leq \frac{t}{2}\|P(x) - y\|^2 \underset{t \to 0}{\to} 0.$$

Inoltre, se $z \in K$ verifica $(z - x, z - y) \leq 0$ per ogni $y \in K$, allora scrivendo

$$\begin{aligned}
\|z - x\|^2 - \|y - x\|^2 &= \|z - x\|^2 - \|(z - x) - (z - y)\|^2 \\
&= \|z - x\|^2 - \big(\|z - x\|^2 - 2(z - x, z - y) + \|z - y\|^2\big) \\
&= 2(z - x, z - y) - \|z - y\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

otteniamo $\|z - x\| \leq \|y - x\|$ per ogni $y \in K$, e cioè $z = P(x)$.
Infine, dati $x, z \in H$ sappiamo che

$$(P(x) - x, P(x) - y) \leq 0, \qquad (P(z) - z, P(z) - w) \leq 0, \qquad \forall\, y, w \in C;$$

dunque, prendendo $y = P(z)$, $w = P(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &\geq (P(x) - x, P(x) - P(z)) + (P(z) - z, P(z) - P(x)) \\ &= (P(x) - x - P(z) + z, P(x) - P(z)) \\ &= -(x - z, P(x) - P(z)) + \|P(x) - P(z)\|^2, \end{aligned}$$

cioè $\|P(x)-P(z)\|^2 \leq (x-z, P(x)-P(z)) \leq \|x-z\|\|P(x)-P(z)\|$, e dividendo poi per $\|P(x)-P(z)\|$ la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione.
Se la norma di H non proviene da un prodotto scalare, il punto di minima distanza potrebbe non essere unico, e la proiezione potrebbe non essere ben definita.
Prendiamo ad esempio $H = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ e come K la palla unità chiusa

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| \leq 1 \right\}.$$

Il punto $x = (1, 1)$ verifica $\mathrm{d}(x, K) = 1 = \|x - (t, 1 - t)\|$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Esempio.
Se $K = \overline{B_R(x_0)} = \{x \in H : \ \|x - x_0\| \leq R\}$ è una palla chiusa, allora

$$P(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x - x_0\| \leq R \\ x_0 + \dfrac{R}{\|x - x_0\|}(x - x_0) & \text{se } \|x - x_0\| > R \end{cases}.$$

Teorema (Proiezione su un sottospazio chiuso)**.**
Sia H uno spazio di Hilbert e $E \lhd H$.
Allora esistono $P \in \mathcal{L}(H, E)$, $Q \in \mathcal{L}\left(H, E^\perp\right)$ tali che:

1. *$x = Px + Qx$ per ogni $x \in H$;*
2. *Se $x \in E$ allora $Px = x$ e $Qx = 0$;*
3. *Se $x \in E^\perp$ allora $Qx = x$ e $Px = 0$;*
4. *Se $E \neq \{0\}$ allora $\|P\|_{\mathcal{L}(H,E)} = 1$, se $E \neq H$ allora $\|Q\|_{\mathcal{L}(H,E^\perp)} = 1$.*

Dimostrazione.
Definisco $P : H \to E$ come la proiezione su data dal lemma precedente, dato che E è un chiuso convesso, e $Q : x \mapsto x - Px$.
Verifichiamo che P, Q hanno tutte le proprietà richieste. Innanzi tutto, $Qx \in E^\perp$: infatti, so che $(Px - x, Px - y) \leq 0$ per ogni $y \in E$, ma essendo E un sottospazio lineare posso scegliere $y = Px + z$ con $z \in E$ e avrò $(Px - x, z) \leq 0$; scegliendo invece $y = Px - z$ avrò $(Px - x, -z) \leq 0$ e cioè $Qx = x - Px \in E^\perp$.
Mostriamo la linearità: per ogni $x, y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ scriviamo

$$\alpha P(x) + \alpha Q(x) + \beta P(y) + \beta Q(y) = \alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y),$$

dunque

$$E \ni \alpha P(x) + \beta P(y) - P(\alpha x + \beta y) = \alpha Q(x) + \beta Q(y) - Q(\alpha x + \beta y) \in E^\perp.$$

Essendo però $E \cap E^\perp = \{0\}$, entrambe le espressioni devono essere nulle, dunque

$$\alpha P(x) + \beta P(y) - P(\alpha x + \beta y) = 0 = Q(\alpha x + \beta y) - \alpha Q(x) - \beta Q(y),$$

il che mostra la linearità di P, Q.
La continuità segue dal Teorema di Pitagora, perché essendo $Px \perp Qx$ deduciamo $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$, quindi $\|Px\| \leq \|x\|$ e $\|Qx\| \leq \|x\|$.
Restano da dimostrare le quattro proprietà delle proiezioni: la 1 segue dalla costruzione di P; la 2 segue nuovamente dalla definizione e dall'osservazione che una proiezione coincide con l'identità sulla sua immagine. Per la 3 osserviamo che se $x \in E^\perp$ allora $E^\perp \ni x - Qx = Px \in E$, dunque $Px \in E \cap E^\perp = \{0\}$. Infine, nella dimostrazione della continuità abbiamo già visto che $\|P\| \leq 1, \|Q\| \leq 1$; se $E \neq \{0\}$, allora ogni $x \in E$ verifica $\|Px\| = \|x\|$ e dunque $\|P\| = 1$, e analogamente se $E \neq H$ per $x \in E^\perp$ abbiamo $\|Qx\| = \|x\|$ e dunque $\|Q\| = 1$. □

Corollario.
Per ogni sottospazio lineare chiuso $E \lhd H$ *possiamo scrivere l'intero spazio come somma diretta* $H = E \oplus E^{\perp}$ *di* E *e del suo ortogonale.*
In particolare, se $E \lhd H$ *allora vale* $E = E^{\perp\perp}$*, mentre in generale per ogni sottoinsieme* $E \subset H$ *scriveremo* $H = \overline{\text{Span}(E)} \oplus E^{\perp}$ *e* $\overline{\text{Span}(E)} = E^{\perp\perp}$.

Dimostrazione.
Dal teorema precedente abbiamo che $H = E + E^{\perp}$, ma poiché abbiamo già visto che $E \cap E^{\perp} = \{0\}$ allora la somma è diretta.
Scambiando poi i ruoli di $E, E^{\perp}$ otteniamo che $H = E^{\perp} \oplus E^{\perp\perp}$; avendo già visto che $E \subset E^{\perp\perp}$, dall'uguaglianza $E^{\perp} \oplus E = E^{\perp} \oplus E^{\perp\perp}$ segue che non può essere un sottospazio proprio. Nel caso generale $E \subset H$ basterà ripetere il ragionamento considerando $\overline{\text{Span}(E)}$ al posto di E. $\square$

Esempio.

1. *Se* $E = \text{Span}\{x_0\}$ *è* 1*-dimensionale allora* $Px = \dfrac{(x, x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$ *e* $Qx = x - \dfrac{(x, x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$*;*

2. *Se* $E \subset L^2([-1, 1])$ *è dato dalle funzioni pari q.o. allora*

$$(Pf)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}; \qquad (Qf)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$