Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/22 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3^n-2^n)}{\ln(4^n-3^n)}.$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3^n-2^n)}{\ln(4^n-3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)}{\ln\left(4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln 3+\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n\ln 4+\ln\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 3+\frac{1}{n}\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\ln 4+\frac{1}{n}\ln\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}=\frac{\ln 3}{\ln 4};$$

allo stesso modo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4^n-3^n)}{\ln(3^n-2^n)}=\frac{\ln 4}{\ln 3};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3^n-2^n)}{\ln(5^n-4^n)}=\frac{\ln 3}{\ln 5},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(5^n-4^n)}{\ln(3^n-2^n)}=\frac{\ln 5}{\ln 3}.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
&= \left(\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}}\right)^{\frac{-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)}{x^2}}\\
&= \left(\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}}\right)^{-\frac{1}{6}+o(1)}\\
&\underset{x\to 0}{\to} e^{-\frac{1}{6}};
\end{aligned}$$

allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/22 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + a}, \qquad a = 2, 3, 4, 5.$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: Il denominatore è diverso da zero per $x \neq \sqrt[3]{4}$, dunque il dominio è

$$\left(-\infty, -\sqrt[3]{a}\right) \cup \left(-\sqrt[3]{a}, +\infty\right).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né simmetrica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Studiando il segno di $f(x)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{a}\right) \cup (0, +\infty), \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in \left(-\sqrt[3]{a}, 0\right); \end{aligned}$$

inoltre, f non si annulla sono in 0, dunque

$$\begin{aligned} f(x) &\qquad \text{interseca l'asse verticale in } (0,0), \\ f(x) &\qquad \text{interseca l'asse orizzontale in } (0,0). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\sqrt[3]{a}^{\pm}} f(x) = \mp\infty,$$

dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale e $x = -\sqrt[3]{a}$ è un asintoto verticale.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = \frac{a - 2x^3}{(x^3 + a)^2}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

---

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/22 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{a}\right) \cup \left(-\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{ha un massimo} & \text{in } x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}; \end{array}$$

il massimo non è assoluto perché f può tendere a $+\infty$.

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

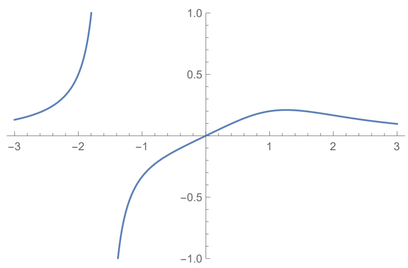
$$f''(x) = \frac{6x^2\left(x^3 - 2a\right)}{\left(x^3 + a\right)^2},$$

studiando il segno di $f''(x)$ si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{a}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2a}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{2a}\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = \sqrt[3]{2a}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/22 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x}{2-\cos(x^2)} \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con i cambi di variabile $y = x^2, t = \tan\frac{y}{2}$ si ottiene:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x}{2-\cos(x^2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-\cos(x^2)} = \int_0^1 \frac{1}{1+3t^2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\sqrt{3}t\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

allo stesso modo,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x}{2+\cos(x^2)} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3+t^2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}};$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} \frac{x^2}{2-\cos(x^3)} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+3t^2} dt = \frac{2}{9}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\sqrt{3}t\right)\right]_0^1 = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi;$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} \frac{x^2}{2+\cos(x^3)} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{3+t^2} dt = \frac{2}{9}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/22 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{\sqrt[3]{k^a+k^b}}, \qquad a=5,4,\ b=2,1;$

Soluzione: Poiché $\dfrac{1-\cos n}{\sqrt[3]{n^a+n^b}} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{a}{3}}}$, dal confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{a}{3}}}$ otteniamo che la serie

CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-\cos k}{\sqrt[3]{k^a+k^b}}, \qquad a=5,4,\ b=2,1;$

Soluzione: Dal punto precedente la serie converge assolutamente, dunque

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$\left(z^3-2i\right)^2=-4.$$

Soluzione: Scrivendo $\left(z^3-2i\right)^2 = z^6-4iz^3-4 = z^3\left(z^3-4i\right)-4$, le soluzioni saranno quelle di $z^3=0$ e di $z^3=4i=4e^{i\frac{\pi}{2}}$, cioè

$$z=0, z=\sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,\ldots,3;$$

allo stesso modo,

$$-4=\left(z^3+2i\right)^2=\left(z^3+4i\right)z^3-4 \iff z=0, z=\sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,\ldots,3;$$

$$-9=\left(z^3-3i\right)^2=\left(z^3-6i\right)z^3-9 \iff z=0, z=\sqrt[3]{6}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,\ldots,3;$$

$$-9=\left(z^3+3i\right)^2=\left(z^3+6i\right)z^3-9 \iff z=0, z=\sqrt[3]{6}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k=0,\ldots,3.$$

*ISTRUZIONI:
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.