Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/01/23 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{an^{\arctan n} + n^{b(n)}}, \qquad a = 3, 2, b(n) = \cos n, \sin n.$$

Soluzione: Poiché $|\arctan n| \leq \frac{\pi}{2}$, $|b(n)| \leq 1$, allora

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{an^{\arctan n} + n^{b(n)}} &\leq \sqrt[n]{an^{\frac{\pi}{2}} + n} \leq \sqrt[n]{(a+1)n^{\frac{\pi}{2}}}, \\ \sqrt[n]{an^{\arctan n} + n^{b(n)}} &\geq \sqrt[n]{an^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{(a+1)n^{-\frac{\pi}{2}}}, \end{aligned}$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a+1)n^{\pm\frac{\pi}{2}}} = 1$, dal Teorema del confronto concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{an^{\arctan n} + n^{b(n)}} = 1.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \cos^2 x - \cos\left(x^2\right)}{2x^2 - \sin^2 x - \sin\left(x^2\right)}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right), \qquad \sin x = x + o\left(x^2\right) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \cos^2 x - \cos\left(x^2\right)}{2x^2 - \sin^2 x - \sin\left(x^2\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)^2 - \left(1 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right)}{2x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2 - \left(x^2 + o\left(x^4\right)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) - \left(1 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right)}{2x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) - \left(x^2 + o\left(x^4\right)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{6}x^4 + o\left(x^4\right)}{\frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x^2\right) - \cos^2 x - x^2}{2x^2 - \sin^2 x - \sin\left(x^2\right)} = -\frac{5}{2}, \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \sin^2 x - \sin\left(x^2\right)}{x^2 + \cos^2 x - \cos\left(x^2\right)} = \frac{2}{5}, \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \sin\left(x^2\right) - 2x^2}{x^2 + \cos^2 x - \cos\left(x^2\right)} = -\frac{2}{5}.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/01/23 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{2} - a}, \qquad a = 4, 3, 2, 1$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per tutti i valori per cui gli argomenti di entrambe le radici sono maggiori o uguale a zero, cioè:

$$[2a, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né periodica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Per la monotonia della radice quadrata, la funzione ha valori strettamente positivi nei punti del dominio che verificano $4x > \frac{x}{2} - a$, cioè $x > -\frac{2}{7}a$, ma questa condizione è verificata su tutto il dominio e dunque:

$$f(x) > 0 \qquad \text{per } x \in [2a, +\infty);$$

inoltre, la funzione non si annulla mai e non è definita in 0, dunque

$$f(x) \qquad \text{non interseca né l'asse orizzontale né l'asse verticale.}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to 2a^+} f(x) = 2\sqrt{a}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

inoltre, poiché $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, non ci sono asintoti.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione non è derivabile nei punti del dominio in cui si annulla la radice, cioè $x = 2a$, mentre negli altri punti la derivata è:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2} - a}}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

---

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/01/23 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di f' si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(\frac{16}{7}a, +\infty\right), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in \left(2a, \frac{16}{7}a\right), \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = \frac{16}{7}a. \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

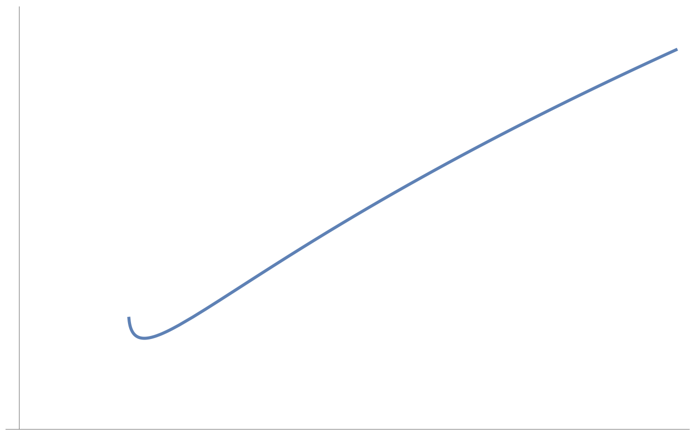
$$f'(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{16\left(\frac{x}{2} - a\right)^{\frac{3}{2}}}$$

è sempre negativa, otteniamo che:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in (2a, 4a), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in (4a, +\infty), \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = 4a. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/01/23 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_e^{e^a} \frac{1}{(a+1)x\ln x - x\ln^2 x}\mathrm{d}x, \qquad a = 2, 3, 4, 5.$$

Soluzione: Con il cambio di variabile $y = \ln x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^a} \frac{1}{(a+1)x\ln x - x\ln^2 x}\mathrm{d}x &= \int_1^a \frac{1}{(a+1)y - y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^a \left(\frac{1}{a+1}\frac{1}{y} - \frac{1}{a+1}\frac{1}{y-a-1}\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{a+1}\ln|y| - \frac{1}{a+1}\ln|y-a-1|\right]_1^a \\
&= \frac{2}{a+1}\ln a.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 17/01/23 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k+a}}{(2k+b)!e^k}, \qquad a, b = \pm 1;$

Soluzione: Poiché

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{(n+1)^{2n+2+a}}{(2n+2+b)!e^{n+1}}}{\frac{n^{2n+a}}{(2n+b)!e^n}} &= \frac{(n+1)^{2n+2+a}(2n+2)!e^n}{n^{2n+a}(2n+2+b)!e^{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+a}}{(2n+2+b)(2n+1+b)e} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(2n+2+b)(2n+1+b)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\frac{1}{e} \\
&\underset{n\to\infty}{\to} \frac{e}{4},
\end{aligned}$$

dal criterio del rapporto otteniamo che la serie

CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k^{2k+a}}{(2k+b)!e^k}, \qquad a, b = \pm 1;$

Soluzione: Dal punto precedente la serie converge assolutamente, dunque

CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^8 = \frac{z}{1+\sqrt{3}i}.$$

Soluzione: Le soluzioni sono $z = 0$ e le soluzioni di $z^7 = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}i} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{5}{3}\pi}$, cioè

$$z = 0, \frac{1}{\sqrt[7]{2}}e^{i\left(\frac{5}{21}\pi+\frac{2}{7}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Allo stesso modo,

$$z^8 = \frac{z}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 0, \frac{1}{\sqrt[7]{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{21}+\frac{2}{7}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$z^8 = \frac{z}{3+\sqrt{3}i} = \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{i\frac{11}{6}\pi}z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 0, \frac{1}{\sqrt[14]{12}}e^{i\left(\frac{11}{42}+\frac{2}{7}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$z^8 = \frac{z}{3-\sqrt{3}i} = \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}\pi}z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 0, \frac{1}{\sqrt[14]{12}}e^{i\left(\frac{\pi}{42}+\frac{2}{7}k\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.