Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 07/02/23 - foglio 1/5*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor $\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) = \frac{1}{6}.$$

Analogamente,

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n\arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = -\frac{1}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}} - n\arctan\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - \ln\left(1 + x + x^2\right)}{e^{-2x-x^2} - 1 + 2\ln(1+x)}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - \ln\left(1 + x + x^2\right)}{e^{-2x-x^2} - 1 + 2\ln(1+x)} \\
= \;& \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - 1 - \left(x + x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} + o\left(\left(x+x^2\right)^3\right)\right)}{\left(1 + (-2x - x^2) + \frac{(-2x-x^2)^2}{2} + \frac{(-2x-x^2)^3}{6}\right) - 1 + 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)} \\
= \;& \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - 1 - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)}{\left(1 - 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right) - 1 + 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)} \\
= \;& \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^3 + o\left(x^3\right)}{\frac{4}{3}x^3 + o\left(x^3\right)} \\
= \;& \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1 + x + x^2\right) - e^x + 1}{e^{-2x-x^2} - 1 + 2\ln(1+x)} = -\frac{5}{8}, \; \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x-x^2} - 1 + 2\ln(1+x)}{e^x - 1 - \ln\left(1 + x + x^2\right)} = \frac{8}{5}, \; \lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{-2x-x^2} - 2\ln(1+x)}{e^x - 1 - \ln\left(1 + x + x^2\right)} = -\frac{8}{5}.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 07/02/23 - foglio 2/5*

Esercizio 3 (8 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{1+\ln x} + a, \qquad a = \mp 2, \mp 1,$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo, dunque il dominio è

$$(0, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione non è pari né dispari né periodica.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Dalla monotonia della radice cubica e del logaritmo otteniamo che:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x \in \left(e^{-a^3-1}, +\infty\right), \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x \in \left(0, e^{-a^3-1}\right); \end{aligned}$$

inoltre, poiché la funzione si annulla per $x = e^{-a^3-1}$ e non è definita in $x = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x) &\qquad \text{non interseca l'asse verticale,} \\ f(x) &\qquad \text{non interseca l'asse orizzontale in } \left(e^{-a^3-1}, 0\right). \end{aligned}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

dunque, $y = 0$ è un asintoto verticale mentre non ci sono asintoti orizzontali poiché $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione NON è derivabile nei punti in cui si annulla la radice, cioè $x = \dfrac{1}{e}$, mentre negli altri punti la derivata è:

$$f'(x) = \frac{1}{3x(1+\ln x)^{\frac{2}{3}}}.$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 07/02/23 - foglio 3/5*

Soluzione: Studiando il segno di f' si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{non ha massimi né minimi} & . \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

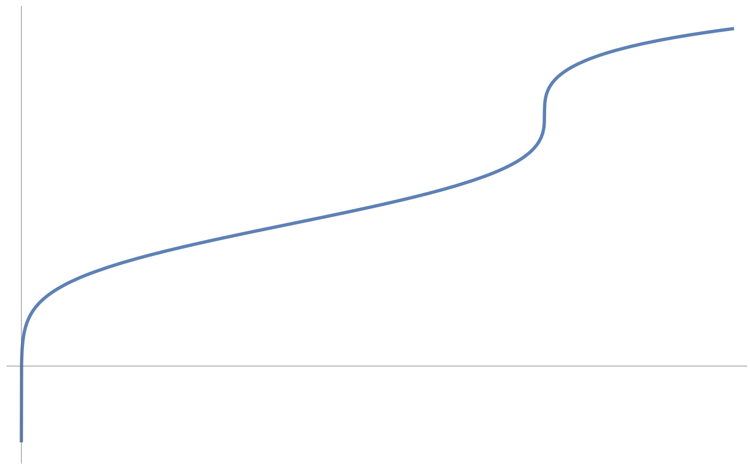
$$f''(x) = \frac{-5 - 3\ln x}{9x^2\,(1+\ln x)^{\frac{5}{2}}},$$

studiandone il segno otteniamo che:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(e^{-\frac{5}{3}}, \frac{1}{e}\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(0, e^{-\frac{5}{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = e^{-\frac{5}{3}}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 07/02/23 - foglio 4/5*

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{1} x\left(e^{x^4}+e^{2x}\right)\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché xe^{x^4} è una funzione dispari e l'intervallo $(-1,1)$ è simmetrico, l'integrale di questa funzione sarà nullo, dunque integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\left(e^{x^4}+e^{2x}\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} xe^{2x}\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4e^2} \\ &= \frac{e^2}{4}+\frac{3}{4e^2}.\end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\int_{-1}^{1} x\left(e^{-x^4}+e^{2x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} xe^{2x}\mathrm{d}x = \frac{e^2}{4}+\frac{3}{4e^2},$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\left(e^{x^4}+e^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x\left(e^{-x^4}+e^{-2x}\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} xe^{-2x} \\ &= \left[x\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-2x}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2e^2}-\frac{e^2}{2}-\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{2e^2}-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4e^2}+\frac{e^2}{4} \\ &= -\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4e^2}.\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 07/02/23 - foglio 5/5*

Esercizio 5 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{\sqrt{k^2+1}}}{b^{\sqrt{k}}}, \qquad a = 2, 3, b = 4, 5;$

Soluzione: Poiché

$$\sqrt[n]{\frac{a^{\sqrt{n^2+1}}}{b^{\sqrt{n}}}} = \frac{a^{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}}{b^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \frac{a^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}}{b^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to\infty}{\to} a > 1,$$

dal criterio del rapporto otteniamo che la serie

NON CONVERGE.

(3 punti) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{a^{\sqrt{k^2+1}}}{b^{\sqrt{k}}}, \qquad a = 2, 3, b = 4, 5;$

Soluzione: Dal criterio della radice, la serie non è infinitesima e dunque

NON CONVERGE.

Esercizio 6 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$iz^4 = (1-i)^2.$$

Soluzione: Poiché $\dfrac{(1-i)^2}{i} = -2 = 2e^{i\pi}$, le soluzioni sono

$$z = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Analogamente,

$$iz^4 = (1+i)^2 = 2i = i \cdot 2e^{i0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{k}{2}\pi}, \qquad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$-iz^4 = (1-i)^2 = -2i = -i \cdot 2e^{i0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{k}{2}\pi}, \qquad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$-iz^4 = (1+i)^2 = 2i = -i \cdot 2e^{i\pi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Per il secondo esonero, svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo, svolgere tutti gli esercizi in tre ore.