Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/21 - foglio 1/4*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 3^n + 2^n}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 3^n + 2^n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2^n}\right)} \\
&= 4 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2^n}} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x - 3\sin(2x)}{1 - \cos\left(x\sqrt{x}\right)}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O\left(x^5\right), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{6x - 3\sin(2x)}{1 - \cos\left(x\sqrt{x}\right)} &= \lim_{x\to 0} \frac{6x - 3\left(2x - \frac{8x^3}{6} + O\left(x^5\right)\right)}{1 - \left(1 - \frac{\left(x\sqrt{x}\right)^2}{2} + O\left(\left(x\sqrt{x}\right)^4\right)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 + O\left(x^5\right)}{\frac{x^3}{2} + O\left(x^6\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4 + O\left(x^2\right)}{\frac{1}{2} + O\left(x^3\right)} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/21 - foglio 2/4*

Esercizio 3 (7 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x,$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;
(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;
(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;
(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
(1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
(1 punto) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
(1 punto) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo, cioè:

$$\{x > 0\}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari né periodica.

Segno: Scrivendo $f(x) = \ln x(\ln x - 4)$, dal segno dei singoli fattori

	$0 < x < 1$	$1 < x < e^4$	$x > e^4$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$
$\ln x - 2$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

deduciamo che

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{se } 0 < x < 1, x > e^4, \\ f(x) &< 0 \quad \text{se } 1 < x < e^4; \end{aligned}$$

essendo $f(x)$ non definita per $x = 0$, allora

$f(x)$ non interseca mai l'asse verticale;

poiché $f(x) = 0$ per $x = 1, e^4$,

$f(x)$ interseca l'asse orizzontale nei punti $(1, 0), \left(e^4, 0\right)$.

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty;$$

dunque la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

ontinuità e derivabilità: Poiché logaritmi e potenze non hanno problemi di continuità e derivabilità sul loro dominio, deduciamo che

$f(x)$ è continua e derivabile su tutto il suo insieme di definizione.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x};$$

avendo lo stesso segno di $\ln x - 2$, si ottiene che:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è crescente} & \text{se } x > e^2, \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{se } 0 < x < e^2, \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & x = e. \end{array}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2(\ln x - 3)}{x^2};$$

avendo il segno opposto di $\ln x - 3$ si ottiene che:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \text{è convessa} & \text{se } x > e^3, \\ f(x) & \text{è concava} & \text{se } 0 < x < e^3, \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = e^3. \end{array}$$

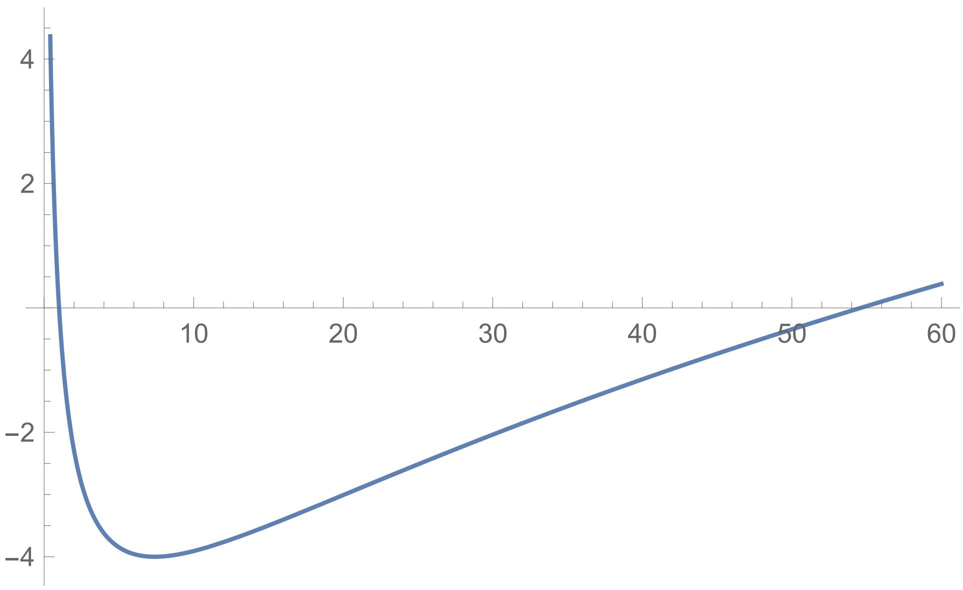

Figura 1: Grafico di $f(x) = \ln^2 x - 4\ln x$.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/21 - foglio 3/4*

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{1} \left(|x| + x^3\right) e^{x^2} \mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $|x|e^{x^2}$ è pari, $x^3 e^{x^2}$ è dispari e l'intervallo è simmetrico, l'integrale sarà il doppio di quello della prima funzione sulla parte positiva dell'intervallo, che può essere calcolato con la sostituzione $y = x^2$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(|x| + x^3\right) e^{x^2} \mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{1} x e^{x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} e^y \mathrm{d}y \\ &= \left[e^y\right]_0^1 \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 5 (5 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Soluzione: Poiché $\dfrac{\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$, allora dal criterio del confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{non converge.}$$

Poiché la successione $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ è positiva, infinitesima e decrescente, dal criterio per serie alternate concludiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 15/02/21 - foglio 4/4*

Esercizio 6 (5 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^3 = (1+\imath)^5.$$

Soluzione: Poiché $1+\imath$ in forma trigonometrica si scrive come $\sqrt{2}e^{\imath\frac{\pi}{4}}$, allora $(1+\imath)^5 = 2^{\frac{5}{2}}e^{\imath\frac{5}{4}\pi}$, dunque le sue radici cubiche saranno $z = 2^{\frac{5}{6}}e^{\imath\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ con $k = 0, 1, 2$, e cioè:

$$\sqrt[6]{32}e^{\imath\left(\frac{5}{12}\pi+k\frac{2}{3}\pi\right)}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.