Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 16/07/21 - foglio 1/4*

Esercizio 1 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n+\frac{1}{n^2}}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x - x^2}{x^2\ln\cos x}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+O\left(x^5\right), \qquad \ln(1+x)=x+O\left(x^2\right) \qquad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x - x^2}{x^2\ln\cos x} &= \frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+O\left(x^5\right)\right)^2-x^2}{x^2\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right)\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^4+O\left(x^6\right)}{-\frac{x^4}{2}+O\left(x^6\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}+O\left(x^2\right)}{-\frac{1}{2}+O\left(x^2\right)}\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 16/07/21 - foglio 2/4*

Esercizio 3 (7 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|},$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;
(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;
(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;
(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
(1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
(1 punto) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
(1 punto) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: La funzione è definita quando il denominatore non si annulla, cioè:

$$\{x \neq 0\}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari né periodica.

Segno: Scrivendo $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & x > 0 \\ -1 - \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ si ottiene che

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{se } -1 < x < 0, x > 0, \\ f(x) &< 0 \quad \text{se } x < -1; \end{aligned}$$

essendo $f(x)$ non definita per $x = 0$, allora

$f(x)$ non interseca mai l'asse verticale;

poiché $f(x) = 0$ per $x = -1$,

$f(x)$ interseca l'asse orizzontale nel punto $(-1, 0)$.

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = +\infty;$$

dunque la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

ontinuità e derivabilità: Poiché la funzione non è definita nel punto di non-derivabilità del modulo, concludiamo che

$f(x)$ è continua e derivabile su tutto il suo insieme di definizione.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & x > 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & x < 0 \end{cases},$$

dunque

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{se } x < 0, \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{se } x > 0. \end{array}$$

La funzione non ha massimi né minimi.

Derivata seconda:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & x > 0 \\ -\dfrac{2}{x^3} & x < 0 \end{cases},$$

dunque

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{se } x > 0, \\ f(x) & \text{è concava} & \text{se } x < 0, \end{array}$$

La funzione non ha punti di flesso.

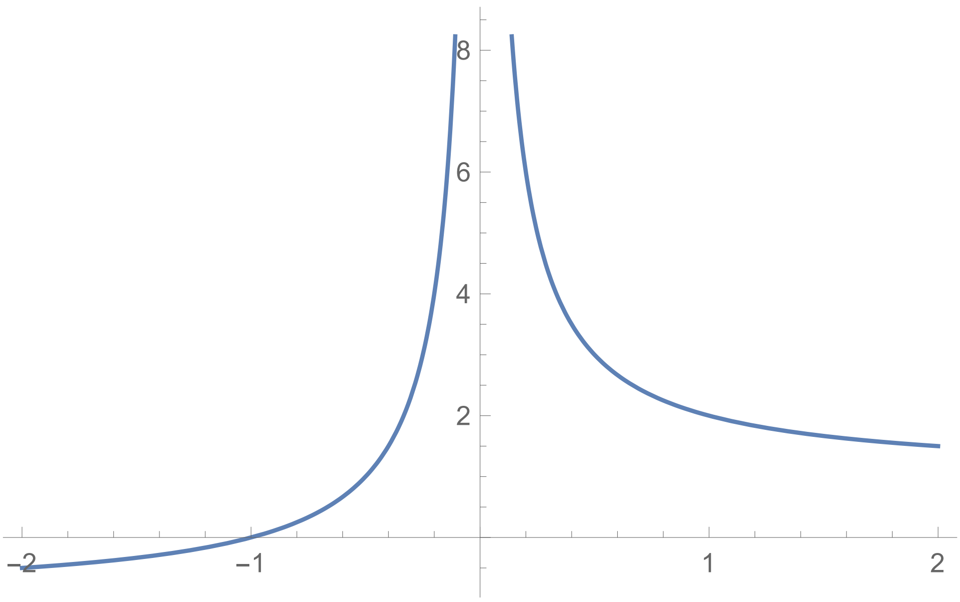

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 16/07/21 - foglio 3/4*

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con la sostituzione $y = \sqrt{x}$ si ottiene $x = y^2$ e $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$, dunque integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 y\operatorname{arctg}y\,\mathrm{d}y \\
&= 2\left(\left[\frac{y^2}{2}\operatorname{arctg}y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2\left(y^2+1\right)}\mathrm{d}y\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{8} - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{8} - \left[\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}y\right]_0^1\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (5 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{k\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-\cos k}{k\sqrt{k}}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{1-\cos n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, allora dal criterio del confronto con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k}{k\sqrt{k}} \qquad \text{converge.}$$

Per lo stesso motivo, la seconda serie converge assolutamente e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-\cos k}{k\sqrt{k}} \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Esame di Analisi I - 16/07/21 - foglio 4/4*

Esercizio 6 (5 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^{10} = \frac{1}{1+\imath}.$$

Soluzione: Il numero $w = \frac{1}{1+\imath} = \frac{1}{1+\imath}\frac{1-\imath}{1-\imath} = \frac{1}{2} - \frac{\imath}{2}$ in forma trigonometrica si scrive come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $t = \frac{7}{4}\pi$, dunque le sue radici cubiche saranno $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{10}} e^{\imath\left(\frac{7}{40}\pi + \frac{2k\pi}{10}\right)}$ con $k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$, e cioè:

$$\frac{1}{\sqrt[20]{2}} e^{\imath\left(\frac{7}{40}\pi + k\frac{\pi}{5}\right)}, \qquad \text{con } k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.$$

*Istruzioni: Per il recupero della prima prova, svolgere gli esercizi 1,2,3 in un'ora e mezza; per il recupero della seconda prova svolgere gli esercizi 4,5,6 in un'ora e mezza; per l'esame completo svolgere tutti gli esercizi in tre ore.