Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 1/3*

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n}{n^3+n+1}\right)^{n^2+2n}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n}{n^3+n+1}\right)^{n^2+2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n+1}{n^3+n+1}\right)^{n^2+2n}\\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n+1}{n^3+n+1}\right)^{-\frac{n^3+n+1}{2n+1}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}-\frac{2n+1}{n^3+n+1}n^2+2n}\\
&= \frac{1}{e^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\cos x)+x^2}{x\arctan(2x)-2x\arctan x}.$$

Soluzione: Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\\
\arctan x &= x+o\left(x^2\right)=x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{2\ln(\cos x)+x^2}{x\arctan(2x)-2x\arctan x} &= \frac{2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^2}{2}+o\left(x^5\right)\right)+x^2}{x\left(2x-\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)-2x\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)}\\
&= \frac{-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)}{-2x^4+o\left(x^4\right)}\\
&\underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = 2\cos^3\left(\frac{x}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni numero reale, cioè il suo dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione è pari, perché lo dipende solo dal coseno, ed ha periodo 4π, perché dipende solo dal coseno di $\frac{x}{2}$.

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Studiando il segno di $f(x)$ si ottiene (restringendosi a $[-2\pi, 2\pi)$:

$$\begin{array}{lll} f(x) & > 0 & \text{per } x \in (-\pi, \pi), \\ f(x) & < 0 & \text{per } x \in [-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi); \end{array}$$

inoltre, $f(0) = 5$ e f si annulla in $\pm\pi$, dunque

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{interseca l'asse verticale in}(0, 5), \\ f(x) & \text{interseca l'asse orizzontale in } (\pm\pi, 0). \end{array}$$

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} f(x),$$

dunque non ci sono asintoti.

(1 punto) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: La funzione è derivabile su tutto il dominio e la derivata è

$$f'(x) = -3\sin\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

---

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 3/3*

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene (restringendosi a $[-2\pi, 2\pi)$):

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \text{è crescente} & \text{per } x \in (-2\pi, 0), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per } x \in (0, 2\pi), \\ f(x) & \text{ha un massimo} & \text{in } x = 0, \\ f(x) & \text{ha un minimo} & \text{in } x = -2\pi; \end{array}$$

massimi e minimi sono assoluti perché $f(x)$ non assume mai valori maggiori o minori.

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

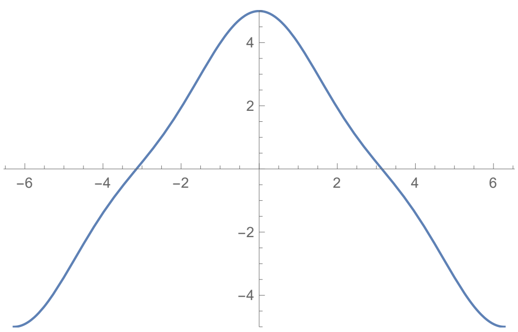
$$f''(x) = 3\cos\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

studiando il segno di $f''(x)$ si ottiene (restringendosi a $[-2\pi, 2\pi)$):

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in \left(-2\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in \left(-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \\ f(x) & \text{ha un flesso} & \text{in } x = -\frac{3}{2}\pi, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.