Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 1/3*

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - \ln(n!)}{\arctan n}.$$

Soluzione: Poiché $n\ln n - \ln(n!) = \ln \frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ e $\arctan n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2} > 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - \ln(n!)}{\arctan n} = +\infty.$$

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\arctan\frac{3}{x}}.$$

Soluzione: Poiché $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\arctan\frac{3}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y\cos(2y)}{\arctan(3y)} = \frac{1}{3}\frac{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\lim_{y\to 0}\frac{\arctan(3y)}{3y}} \lim_{y\to 0}\cos(2y) = \frac{1}{3}.$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 2/3*

Esercizio 3 (16 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \left|x^4 - 8|x|\right|,$$

determinandone:

(2 punti) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni numero reale, cioè il suo dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(2 punti) Eventuali simmetrie e periodicità;

Soluzione: La funzione è pari, perché dipende solo da x^4 e $|x|$, e non è periodica.

(2 punti) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché f è un modulo, non sarà mai negativa, dunque

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in (-\infty, -2) \cup (2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty);$$

inoltre, $f(0) = 0$ e f si annulla in $0, \pm 2$, dunque

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{interseca l'asse verticale in } (0,0), (0, \pm 2), \\ f(x) & \text{interseca l'asse orizzontale in } (0,0). \end{array}$$

(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

dunque, poiché $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\to} \pm\infty$, non ci sono asintoti.

(2 punti) Eventuali punti di non derivabilità e, dove è derivabile, la derivata;

Soluzione: Poiché $f(x) = \begin{cases} x^4 + 8x & \text{per } x \leq -2 \\ -x^4 - 8x & \text{per } -2 < x < 0 \\ 8x - x^4 & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ x^4 + 8x & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$, allora $\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \to 0^\pm}{\to} \pm 8$ e $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \underset{x \to 2^\pm}{\to}$ $\pm 24 \underset{x \to -2^\pm}{\leftarrow} \frac{f(x) + f(2)}{x + 2}$, dunque

$$f \text{ non è derivabile in } x = 0, \pm 2,$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - fac-simile - foglio 3/3*

mentre in tutti gli altri punti è derivabile con

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3+8 & \text{per } x<-2 \\ -4x^3-8 & \text{per } -2<x<0 \\ 8-4x^3 & \text{per } 0<x<2 \\ 4x^3+8 & \text{per } x>2 \end{cases} .$$

(2 punti) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente} & \text{per ogni } x \in \left(-2, \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(0, \sqrt[3]{2}\right) \cup (2,+\infty), \\ f(x) & \text{è decrescente} & \text{per ogni } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \\ f(x) & \text{ha un massimo} & \text{in } x = \pm\sqrt[3]{2}; \end{array}$$

i massimi non sono assoluti perché f può tendere a $+\infty$; inoltre i tre punti di non derivabilità $x = 0, \pm 2$ sono minimi assoluti perché unici punti in cui la funzione non negativa si annulla.

(2 punti) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Poiché

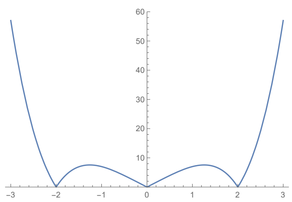
$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 & \text{per } x<-2, 0<x<2 \\ -12x^2 & \text{per } -2<x<0, x>2 \end{cases} ,$$

studiando il segno di $f''(x)$ si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa} & \text{per } x \in (-\infty,-2) \cup (0,2), \\ f(x) & \text{è concava} & \text{per } x \in (-2,0) \cup (2,+\infty), \\ f(x) & \text{non ha flessi} & . \end{array}$$

(2 punti) Grafico qualitativo.

Soluzione:



*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza.