Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO I - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (04-03-09)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $x(0) = (1,1,0)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x - y - z \\ \dot{z} = 2x - 2y \end{cases}$$

con condizioni iniziali generiche $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$.
Se ne trovi la soluzione e si verifichi in particolare che il moto descritto dal sistema avviene in un piano, individuando al variare dei dati iniziali il piano su cui si svolge.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 0, -1, 2)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 4.Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = (1,1) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix},$$

Se ne trovi la soluzione al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (2, \dots, 2)$.
Se ne determini la soluzione.

ESERCIZIO 6. Dimostrare che se, data una matrice A, esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ tale che $A^n = \lambda A$, allora $\exp A$ è un polinomio di grado $n-1$ in A, e calcolare esplicitamente i coefficienti.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 2 - Roberto Feola e Luca Battaglia (11/03/2009)

Esercizio 1. Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali, e per tali λ determinare queste soluzioni.

Esercizio 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dddot{x} - 5\ddot{x} + 8\dot{x} - 4x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3.Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} - \varepsilon\dot{x} - 4x = \varepsilon e^t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Se ne determini la soluzione al variare di $\varepsilon \geq 0$.

Esercizio 4.Determinare le equazioni della curva piana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \cos t \\ \dot{y} = x - 3\sin t \end{cases}$$

e passante per il punto $(1, 0)$.

Esercizio 5.Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Si dimostri che se $\det A = 0$ il moto descritto dal sistema avviene in un piano per qualunque scelta del dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^3$

Esercizio 6. Si determini la soluzione dell'equazione differenziale lineare non omogenea $\dot{x} = x + f(t)$ in funzione del dato iniziale $x(0) = x_0$.

Si usi tale risultato per dimostrare che la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 \\ \dot{x_3} = x_2 + x_3 \\ \dots \\ \dot{x_n} = x_{n-1} + x_n \end{cases}$$

con condizioni iniziali $x_k(0) = 1 \; \forall k = 1, \dots, n$ è $x_k(t) = e^t \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \; \forall k = 1, \dots, n.$

Si calcoli infine $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$.

(Suggerimento: per il secondo punto, può essere utile procedere per induzione)

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 3 - Roberto Feola e Luca Battaglia (18-03-09)

<u>Esercizio 1.</u> Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 2tx + t^2 - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

(*Suggerimento*:si consideri il cambio di variabile $y = x + t$)

<u>Esercizio 2.</u> Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1 - tx^2e^t}{t^2xe^t} \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

(*Suggerimento*:considerare la sostituzione $y = tx$)

<u>Esercizio 3.</u> Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t}{x(2t^2 - t^4 - 2)} \\ x(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è un chiuso e spiegare perchè questo non contraddice quanto visto a lezione.

<u>Esercizio 4.</u>Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = t(x + 2t) + (x + t)(4x - t) - \dfrac{1}{2} \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.Determinare l'intervallo di definizione della soluzione.
(*Suggerimento*.Si cerchino soluzioni della forma $x(t) = \frac{y(t)-t}{2}$)

<u>Esercizio 5.</u>Usando il metodo della variazione delle costanti, trovare una formula risolutiva per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

<u>Esercizio 6.</u> Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dddot{x} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = 3e^t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ \ddot{x}(0) = 2 \end{cases}$$

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 4 - Roberto Feola e Luca Battaglia (25-03-09)

Esercizio 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(1-x^2) \\ \dot{y} = 2x(y^2-1) \end{cases}$$

(1.1)Determinare una costante del moto $H(x,y)$ per il sistema tale che $H(0,0)=0$.
(1.2)Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
(1.3)Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
(1.4)Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
Dimostrare in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(\frac{1}{2},0)$ lo è e scriverne il periodo come integrale definito.
(1.5)Determinare esplicitamente la soluzione con dato iniziale $(\overline{x},\overline{y})=(1,0)$.

Esercizio 2.Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3+9y^2x-x \\ \dot{y} = -3x^2y-3y^3+y \end{cases}$$

(2.1)Determinare una costante del moto per il sistema.
(2.2)Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità
(2.3)Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y)=E\}$$

(2.4)Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

Esercizio 3.Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{xy}(2y-2) \\ \dot{y} = e^{xy}(4x^3-4x) \end{cases}$$

(3.1)Si mostri che la funzione $H(x,y)=(y-x^2)(y+x^2-2)$ è una costante del moto per il sistema.
(3.2)Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
(3.3)Se ne discuta la stabilità.
(3.4)Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 4. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x-2y^2 \\ \dot{y} = -2y-2x^2 \end{cases}$$

(4.1)Determinare i punti di equilibrio e discuterne la natura.
(4.2)Stimare il bacino di attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabili.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 5 - Roberto Feola e Luca Battaglia (01-04-09)

Esercizio 1. Sia dato il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \qquad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

dove

$$V(x, y) = y^2 + x^2(x + 2)^2$$

(1.1) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(1.2) Analizzare qualitativamente le curve di livello.
(1.3) Stimare il bacino di attrazione di eventuali punti asintoticamente stabili.

Esercizio 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

dove

$$H(x, y) = x^2 y(x + y^2 + 1)(x - y^2 - 1)$$

(2.1) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
(2.2) Se ne discuta la stabilità.
(2.3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(2.4) Si dimostri che non esistono traiettorie periodiche.

Esercizio 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x - x^2 y - y^3 \end{cases}$$

(3.1) Si dimostri che l'origine è un punto asintoticamente stabile.
(3.2) Si dimostri che il suo bacino d'attrazione è tutto il piano.
(3.3) Si trovi la forma esplicita di $\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.
(3.4) Si determinino esplicitamente le soluzioni del sistema.
(*Suggerimento*: per l'ultimo punto può essere conveniente utilizzare coordinate polari (ρ, θ).)

Esercizio 4. Sia dato il sistema gradiente

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x, y) = 1 - e^{-(x^2+y^2)}.$$

(4.1) Si determinino i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
(4.2) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
(4.3) Studiare il bacino d'attrazione di eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili.
Esercizio d'esame 15/09/2008

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 6 - Roberto Feola e Luca Battaglia (15-04-09)

<u>Esercizio 1.</u>Si consideri il sistema di equiazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $x(0) = (2, 1, 0)$.Se ne trovi la soluzione.

<u>Esercizio 2.</u>Dato il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x|x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande:

(2.1)Quante soluzioni esistono?

(2.2)Si trovi esplicitamente una soluzione e se e discuta la regolarità in t

(2.3)Si verifichi che $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile e si studi il suo bacino di attrazione.

<u>Esercizio 3.</u>Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - xe^{-x^2} \\ \dot{y} = ye^{-x^2} - 2x^2ye^{-x^2} - y^2 \end{cases}$$

(3.1)Verificare che la funzione

$$H(x, y) = xy(y - e^{-x^2})$$

è una costante del moto per il sistema.

(3.2)Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

(3.3)Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(3.4)Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

<u>Esercizio 4.</u>Sia dato il sistema gradiente planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \qquad V(x, y) = y^2 - x^6 + 6x^4 - 9x^2$$

(4.1)Determinare i punti di equilibrio del sistema.

(4.2)Studiarne la stabilità.

(4.3)Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.

(4.4)Stimare il bacino di attrazione di eventuali punti asintoticamente stabili.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 7 - Roberto Feola e Luca Battaglia (22-04-09)

Esercizio 1.Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x(x^2 - 2)}{x - 2}$$

(1.1)Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
(1.2)Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
(1.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
(1.4)Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

Esercizio 2.Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x^2}(2x^3 - 3x^2 + 1)$$

(2.1)Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
(2.2)Verificare che l'energia $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ con $y = \dot{x}$, è una costante del moto.
(2.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
(2.4)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(2.5)Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(x, \dot{x})$.
(2.6)Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

Esercizio 3.Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 3x^4 - 8\alpha x^3 + 6x^2$$

Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, rispondere alle seguenti domande:
(2.1)Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
(2.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(2.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
(2.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 8 - Roberto Feola e Luca Battaglia (29-04-09)

Esercizio 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3 e^x$$

(1.1)Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
(1.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(1.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
(1.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(1.5)Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

Esercizio 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza

$$F(x) = 5x^3 - 2x^7$$

(2.1)Scrivere le equazioni del moto e le equazioni del sistema dinamico associato.
(2.2)Determinare eventuali punti di equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(2.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale $V(x)$ corrispondente alla forza $F(x)$ e tale che $V(0) = 0$.
(2.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(2.5)Verificare che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = (1, 0)$ è periodica, scriverne il periodo come integrale definito e darne una stima.

Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3 - 4x + \frac{\alpha}{x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ rispondere alle seguenti domande:
(3.1)Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
(3.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(3.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
(3.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO 9 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (06-05-09)

ESERCIZIO 1.Si considerino due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{1}{\rho^4}$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti.
(1.1)Descrivere il moto nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libert'a nelle variabili polari (ρ, θ).
(1.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(1.3)Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
(1.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(1.5)Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(1.6)Scrivere la variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$ e dire sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 2.Si considerino due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = 2$,che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\log \rho - \frac{2\alpha}{\rho}$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti e $\alpha \in \mathbb{R}$. Rispondere alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo $L \neq 0$ del momento angolare del sistema.
(2.1)Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
(2.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(2.3)Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
(2.4)Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(2.5)Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

ESERCIZIO 3.Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 4\sin^3 x + 3\sin^2 x, \qquad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

(3.1)Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
(3.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(3.3)Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
(3.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(3.5)Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
(3.6)Verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica per $E = 0$ e scriverne il periodo come integrale definito.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO 10 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (13-05-09)

ESERCIZIO 1. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} - 2\log\rho - \frac{\alpha}{\rho^2}$$

Rispondere alle seguenti domande al variare di $\alpha \geq 0$.
(1.1)Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
(1.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(1.3)Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
(1.4)Discutere qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(1.5)Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = 2\rho - \alpha\rho^4$$

Rispondere alle seguenti domande al variare di $\alpha \geq 0$
(2.1)Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
(2.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(2.3)Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
(2.4)Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(2.5)Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

ESERCIZIO 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho}\right)$$

(3.1)Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
(3.2)Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(3.3)Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
(3.4)Studiare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(3.5)Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato 11 - Roberto Feola e Luca Battaglia (20-05-09)

Esercizio 1. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muove nel piano (x, y) lungo la parabole di equazioni $y = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x sia $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di κ, mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla parabola.Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ secondo la legge oraria $\xi(t) = e^t$.

(1.1)Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B.

(1.2)Determinare il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto κ e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K.

(1.3)Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.

(1.4)Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.

(1.5)Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.

(1.6)Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.

(1.7)Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.

Suggerimento: si ricorda che $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *e* $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Esercizio 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo) che all'istante $t = 0$ coincide con κ e ruota attorno all'asse ζ, parallelo a z, con velocità angolare costante ω.L'origine O' si muove lungo l'asse z con legge oraria $z_{O'}(t) = t$. Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K secondo le equazioni

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\eta \\ \dot{\eta} = \xi \\ \dot{\zeta} = \alpha \end{cases}$$

dove α è un parametro reale, e al tempo $t = 0$ si trova nel punto $(\xi(0), \eta(0), \zeta(0)) = (1, 0, 0)$.

(2.1)Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B.

(2.2)Determinare il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto κ e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K.

(2.3)Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.

(2.4)Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.

(2.5)Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.

(2.6)Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.

(2.7)Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.

(2.8)Discutere sotto quali condizioni sui parametri ω e α il punto P ha un moto periodico nel sistema κ.

(2.9)Discutere sotto quali condizioni sui parametri ω e α il punto P risulta fermo nel sistema κ.

Suggerimento: si ricorda che $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *e* $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Esercizio 3. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muove lungo la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 + 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

L'asse ξ di K si mantiene tangente alla curva $\mathbf{q}_{O'}(t)$, mentre l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z di κ; all'istante iniziale O' occupa la posizione $\mathbf{q}_{O'}(0) = (0, -1, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e

y rispettivamente. Un punto P di massa $m = 1$ si muove in K lungo l'asse ξ sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(\xi) = \xi^2 - 1$$

con dato iniziale $\xi(0) = 0$ ed energia meccanica $E = 0$.
(3.1)Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
(3.2)Scrivere la legge del moto nei sistemi K e κ.
(3.3)Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$ e la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(3.4)Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.
(3.5)Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.
(3.6)Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO 12 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (27-05-09)

ESERCIZIO 1.Si consideri un sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^n$$

Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$, si risponda alle seguenti domande:
(1.1)Si studi il grafico dell'energia potenziale.
(1.2)Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
(1.3)Se ne discuta la stabilità.
(1.4)Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(1.5)In particolare di dimostri che, al variare di n,o tutti i dati iniziali che non siano punti di equilibrio danno luogo a traiettorie periodiche o non esistono traiettorie periodiche.Nel primo caso si scriva il periodo T come integrale definito.
(1.6)Si espliciti la dipendenza dall'energia E del periodo trovato al punto precedente.
(1.7)Si dica per quale valore di n il periodo T non dipende da E, e calcolarlo esplicitamente.

ESERCIZIO 2.Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto) si consideri un sistema mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine si muove lungo la curva piana $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{\gamma_1} = 2\gamma_1 - 2\gamma_2 \\ \dot{\gamma_2} = 2\gamma_1 + 2\gamma_2 \end{cases}$$

La componente lungo l'asse x che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = \gamma_1(t)$.L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di κ mentre l'asse ξ di K si mantiene tangente a $\gamma(t)$.All'istante iniziale il punto O' occupa la posizione $q_{O'} = (1, 0, 0)$.Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ sotto l'azione di una molla di costante elastica $\lambda > 0$.
(2.1)Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
(2.2)Scrivere la legge del moto nei sistemi κ e K.
(2.3)Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$ e la velocità relativa $\mathbf{v'}$.
(2.4)Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.
(2.5)Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.
(2.6)Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.
(2.7)Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.

ESERCIZIO 3.Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\alpha}{8\rho^8}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.Al variare del parametro e del momento angolare L,si risponda alle seguenti domande. (3.1)Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
(3.2)Si determinino i punti di equilibrio.
(3.3)Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
(3.4)Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
(3.5)Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(3.6)Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(3.7)Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico. *Esercizio esame 07/06/2007*