

FUNZIONI ELEMENTARI

POTENZE E RADICI

Definizione

${}^{2n}\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^{2n}, y \geq 0 \ (x \geq 0); \qquad {}^{2n+1}\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^{2n+1} \ (x \in \mathbb{R}).$

Segno

$x^{2n}, {}^{2n}\sqrt{x}, \frac{1}{x^{2n}} \geq 0$ sempre; $x^{2n+1}, {}^{2n+1}\sqrt{x}, \frac{1}{x^{2n+1}} \geq 0$ se $x \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$

Proprietà

$x^{a+b} = x^a x^b; \qquad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}; \qquad x^{ab} = (x^a)^b;$

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}; \qquad (xy)^a = x^a y^a;$

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}; \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}; \quad \sqrt[n]{x^n} = x = (\sqrt[n]{x})^n$ se $x \geq 0$ o n dispari;

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2; \qquad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y); \qquad x \pm y = \frac{x^2 - y^2}{x \mp y};$

$x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}); \qquad \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}};$

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3; \qquad x^3 \pm y^3 = (x^2 \mp xy + y^2)(x \pm y);$

$ax^2 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} 2 \text{ soluzioni} & \text{se } b^2 > 4ac \\ 1 \text{ soluzione} & \text{se } b^2 = 4ac \\ 0 \text{ soluzioni} & \text{se } b^2 < 4ac \end{cases}.$

Valori speciali

$x^0 = 1; \qquad x^1 = x; \qquad 0^a = 0; \qquad 1^a = 1; \qquad \sqrt[n]{0} = 0; \qquad \sqrt[n]{1} = 1.$

Simmetrie

$x^{2n}, \frac{1}{x^{2n}} \ (n \in \mathbb{N}), |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ sono pari ($f(x) = f(-x)$);

$x^{2n+1}, {}^{2n+1}\sqrt{x}, \frac{1}{x^{2n+1}} \ (n \in \mathbb{N})$ sono dispari ($f(x) = -f(-x)$).

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Definizione

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \quad (x > 0); \qquad \log_e x =: \ln x = y \Leftrightarrow x = e^y \quad (x > 0).$

Segno

$a^x \geq 0$ sempre; $\log_a x \geq 0$ se $x \geq 1 \ (a > 0); \quad \ln x \geq 0$ se $x \geq 1.$

Proprietà

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \quad \log_a (x^b) = b \log_a x;$

$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n} \quad \log_a (a^x) = x = a^{\log_a x}; \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\ln x}{\ln b};$

$\ln(xy) = \ln x + \ln y; \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y; \quad \ln (x^b) = b \ln x;$

$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}; \quad \ln(e^x) = x = e^{\ln x}; \quad a^b = e^{b \ln a}.$

Valori speciali

$\log_a 1 = 0 = \ln 1; \qquad \log_a a = 1 = \ln e.$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Definizione

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{definita se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}).$

Segno

$\sin x \geq 0$ se $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi; \cos x \geq 0$ se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$

$\tan x \geq 0$ se $k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Proprietà

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad -1 \leq \sin x \leq 1; \qquad -1 \leq \cos x \leq 1;$

$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

Valori speciali

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0

Formule di addizione, sottrazione e duplicazione

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x; \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos y; \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$

Simmetrie

$\cos x$ è pari ($f(x) = f(-x)$); $\sin x, \tan x$ sono dispari ($f(x) = -f(-x)$);

$\sin x, \cos x$ sono 2π -periodiche ($f(x+2\pi) = f(x)$);

$\tan x$ è π -periodica ($f(x+\pi) = f(x)$);

$\sin(x+\pi) = -\sin x; \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x.$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Definizione

$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{definita se } -1 \leq x \leq 1);$

$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi \quad (\text{definita se } -1 \leq x \leq 1);$

$\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad (\text{definita sempre}).$

Segno

$\arcsin x \geq 0$ se $x \geq 0; \qquad \arccos x \geq 0$ sempre; $\arctan x \geq 0$ se $x \geq 0.$

Proprietà

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}; \quad \sin(\arcsin x) = x; \quad \arcsin(\sin x) = x$ se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

$0 \leq \arccos x \leq \pi; \quad \cos(\arccos x) = x; \quad \arccos(\cos x) = x$ se $0 \leq x \leq \pi;$

$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}; \quad \tan(\arctan x) = x; \quad \arctan(\tan x) = x$ se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$

$\arctan x \leq x \leq \arcsin x$ se $x \geq 0.$

Valori speciali

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Simmetrie

$\arcsin x, \arctan x$ sono dispari ($f(x) = -f(-x)$).

NUMERI COMPLESSI

Forma cartesiana e trigonometrica

$z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{Forma cartesiana});$

$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi \quad (\text{Forma trigonometrica});$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta$ tale che $\cos \theta = \frac{x}{\rho}, \sin \theta = \frac{y}{\rho}; \quad x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta.$

Operazioni elementari

$(x + iy) \pm (a + ib) = (x + a) \pm i(y + b); \quad \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}; \quad \overline{x + iy} = x - iy;$

$(x + iy)(a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya); \quad (\rho e^{i\theta}) (\rho e^{it}) = \rho \rho e^{i(t+\theta)};$

$(\rho(\cos \theta + i \sin \theta))(r(\cos t + i \sin t)) = pr(\cos(\theta + t) + i \sin(\theta + t));$

$\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{it}} = \frac{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)}{r(\cos t + i \sin t)} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta - t) + i \sin(\theta - t)) = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta - t)};$

$\overline{\rho e^{i\theta}} = \overline{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho e^{-i\theta};$

$(\rho e^{i\theta})^n = (\rho(\cos \theta + i \sin \theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \rho^n e^{in\theta}.$

Radici n-esime

$z^n = w = r(\cos t + i \sin t) = \rho e^{it}$ ha n soluzioni (se $w \neq 0$): $(k = 0, \dots, n-1)$

$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}.$

LIMITI

LIMITI NOTEVOLI

Successioni

$n^a \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}; \qquad a^n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \varnothing & \text{se } a \leq -1 \end{cases};$

$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 0); \qquad \sqrt[n]{n^a} \rightarrow 1 \quad (a \in \mathbb{R}).$

Funzioni

$x^a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}; \qquad a^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases};$

$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty; \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty; \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}; \tan x \xrightarrow{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \mp} \pm\infty;$

$(1 + \frac{1}{x})^x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} e \in (2, 3); \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1; \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1; \frac{(1+x)^a - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a;$

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1; \frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}; \frac{\tan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1; \frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1; \frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$

GERARCHIA DEI LIMITI

Successioni

$\frac{\log_a n}{n^b} \rightarrow 0; \qquad \frac{n^b}{c^n} \rightarrow 0; \qquad \frac{c^n}{n!} \rightarrow 0; \qquad \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0 \quad (a > 1, b > 0, c > 1).$

$(n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \Rightarrow (n+1)! = (n+1)n!).$

Funzioni

$x^a \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0; \qquad \frac{\ln x}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0; \qquad \frac{x^a}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (a > 0).$

SVILUPPI DI TAYLOR

Sviluppi delle funzioni elementari

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1});$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n});$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n + o(x^n);$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1});$

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad (a \in \mathbb{R});$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2); \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2);$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$

Proprietà degli o piccolo

$\frac{o(x^n)}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0; \quad o(Cx^n) = o(x^n); \quad C \cdot o(x^n) = o(x^n);$

$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n); \quad o(o(x^n)) = o(x^n); \quad o(x^n + o(x^n)) = o(x^n);$

$x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}); \quad o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}); \quad o(x^n)^m = o(x^{nm});$

$\text{Se } m > n, x^m = o(x^n); \quad o(x^n + x^m) = o(x^n); \quad o(x^n) + o(x^m) = o(x^n).$

ALTRI STRUMENTI

Teorema del confronto

Se $a_n \leq c_n \leq b_n$ e $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a$, allora $c_n \rightarrow a$;

se $a_n \leq b_n$ e $a_n \rightarrow +\infty$, allora $b_n \rightarrow +\infty$;

se $a_n \leq b_n$ e $b_n \rightarrow -\infty$, allora $a_n \rightarrow -\infty$;

se $|a_n| \leq b_n$ e $b_n \rightarrow 0$, allora $a_n \rightarrow 0.$

Criterio del rapporto per successioni

Se $a_n \geq 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$;

se $a_n \geq 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$;

(se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ oppure non esiste il limite, non possiamo dire nulla).

Teorema di L'Hopital

Se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \leftarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Asintoti

Se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$, allora f ha l'asintoto verticale $x = a$;

se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} b$, allora f ha l'asintoto orizzontale $y = b$;

se $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} c$ e $f(x) - cx \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} d$ allora f ha l'asintoto obliquo $y = cx + d.$

DERIVATE

CALCOLO DELLE DERIVATE

Derivate elementari

$f(x)$	x^a	$\frac{1}{x^a}$	$\sqrt[n]{x}$	$ x $
$f'(x)$	ax^{a-1}	$-\frac{a}{x^{a+1}}$	$\frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$	$\text{segno}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$
$f(x)$	a^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	$(\ln a)a^x$	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
				$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)$	$\log_a x$	$\ln x$	$\arcsin x$	$\arccos x$
$f'(x)$	$\frac{1}{(\ln a)x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
				$\frac{1}{1+x^2}$

NON derivabili: $|x|$, $\sqrt[n]{x}$ in $x = 0$; $\arcsin x$, $\arccos x$ in $x = \pm 1$.

Regole di derivazione

$(Af(x)+Bg(x))' = Af'(x)+Bg'(x); \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$
 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}; \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2};$
 $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x); \quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$

APPLICAZIONE ALLO STUDIO DI FUNZIONE

Derivata prima

Se $f'(x) \geq 0$ per $a < x < b$, allora $f(x)$ è CRESCENTE per $a < x < b$;
se $f'(x) \leq 0$ per $a < x < b$, allora $f(x)$ è DECRESCENTE per $a < x < b$;
se $f' \leq 0$ in $(x_0-\delta, x_0)$ e $f' \geq 0$ in $(x_0, x_0+\delta)$, x_0 è un punto di MINIMO;
se $f' \geq 0$ in $(x_0-\delta, x_0)$ e $f' \leq 0$ in $(x_0, x_0+\delta)$, x_0 è un punto di MASSIMO.

Derivata seconda

Se $f''(x) \geq 0$ per $a < x < b$, allora $f(x)$ è CONVESSA per $a < x < b$;
se $f''(x) \leq 0$ per $a < x < b$, allora $f(x)$ è CONCAVA per $a < x < b$;
se $f''(x)$ cambia segno in $x = x_0$, allora x_0 è un punto di FLESSO.

INTEGRALI

CALCOLO DELLE PRIMITIVE

Primitive elementari

$f(x)$	$x^a \quad (a \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$\int f(x)dx$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$\ln x + c$	$e^x + c$	$-\cos x + c$	$\sin x + c$
$f(x)$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\int f(x)dx$	$-\ln \cos x + c$	$\tan x + c$	$\arcsin x + c$	$\arctan x + c$	

Casi particolari

$f(x)$	$Ag(x) + Bh(x)$	$g(x)^a g'(x)$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$\int f(x)dx$	$A \int g(x)dx + B \int h(x)dx + c$	$\frac{g(x)^{a+1}}{a+1} + c$	$\ln g(x) + c$

Funzioni razionali

$f(x)$	$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	
$\int f(x)dx$	$\ln x + c$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$f(x)$	$\frac{1}{(x+a)^2+b^2}$	$\frac{2x+a}{x^2+ax+b}$
$\int f(x)dx$	$\frac{1}{b} \arctan \frac{x+a}{b} + c$	$\ln x^2+ax+b + c$

METODI DI INTEGRAZIONE

Teorema fondamentale del calcolo

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, con F primitiva di f ($F'(x) = f(x)$).

Integrazione per parti

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (integrale indefinito);
 $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$ (integrale definito).

Integrazione per sostituzione

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$, con $y = g(x)$ (integrale indefinito);
 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$ (integrale definito);
 $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$, con $t = g^{-1}(x)$ (integrale indefinito);
 $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$ (integrale definito).

Cambi di variabile speciali

$t = \sqrt[n]{Ax+B}$: $\int f(\sqrt[n]{Ax+B})dx = \frac{n}{A} \int f(t)t^{n-1}dt$;
 $t = \arcsin x$: $\int f(x, \sqrt{1-x^2})dx = \int f(\sin t, \cos t) \cos t dt$;
 $t = \tan \frac{x}{2}$: $\int f(\sin x, \cos x)dx = 2 \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$;
 $t = e^x$: $\int f(e^x)dx = \int \frac{f(t)}{t} dt$.

Integrazione di funzioni simmetriche

Se f dispari, allora $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;
se f pari, allora $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$; $\Rightarrow \int_{-a}^a f(|x|)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

INTEGRALI IMPROPRI

Integrali impropri notevoli

$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$ converge $\iff a < 1$;
 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} dx$ converge $\iff a > 1$ oppure $a = 1, b > 1$.

Criterio del confronto

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e $\int_a^b g(x)dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)dx$ converge;
se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e $\int_a^b f(x)dx$ NON converge, $\int_a^b g(x)dx$ NON converge.

Criterio del confronto asintotico

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b} 1$, allora:
 $\int_a^b f(x)dx$ converge $\iff \int_a^b g(x)dx$ converge.

SERIE

SERIE A TERMINI POSITIVI

Serie notevoli

$\sum_{k=0}^\infty x^k$ converge $\iff -1 < x < 1$ (Serie geometrica);
 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^a}$ converge $\iff a > 1$ (Serie armonica generalizzata);
 $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^a \ln^b k}$ converge $\iff a > 1$ oppure $a = 1, b > 1$.

Criterio del confronto integrale

Se $f(x) \geq 0$ decrescente e $a_n = f(n)$, allora:
 $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Criterio del confronto

Se $a_n \leq b_n$ e $\sum_{k=1}^\infty b_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge;
se $a_n \leq b_n$ e $\sum_{k=1}^\infty a_k$ NON converge, allora $\sum_{k=1}^\infty b_k$ NON converge.

Criterio del confronto asintotico

Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L < +\infty$ e $\sum_{k=1}^\infty b_k$ converge, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge;
Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L > 0$ e $\sum_{k=1}^\infty a_k$ NON converge, allora $\sum_{k=1}^\infty b_k$ converge.

Criterio degli infinitesimi

Se $n^p a_n \rightarrow L < +\infty$ ($p > 1$), allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge;
se $n^p a_n \rightarrow L > 0$ ($p \leq 1$), allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ NON converge.

Criterio del rapporto

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L < 1$, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge;
se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L > 1$, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ NON converge;
(se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ o $\bar{\Delta}$, $\sum_{k=1}^\infty a_k$ potrebbe convergere o non convergere).

Criterio della radice

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L < 1$, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge;
se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L > 1$, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ NON converge;
(se $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ o $\bar{\Delta}$, $\sum_{k=1}^\infty a_k$ potrebbe convergere o non convergere).

SERIE DI SEGNO QUALUNQUE

Criterio di Leibniz per serie a segno alterno

Se $a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0$ decrescente, allora $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ converge.

Criterio della condizione necessaria

Se $a_n \not\rightarrow 0$, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ NON converge; neanche $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$.

Criterio della convergenza assoluta

Se $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ converge, allora $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge;
se $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge ($a_n \geq 0$), allora $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} a_k$ converge.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

Equazioni lineari

La soluzione di $\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è data da:
 $y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \right)$ con $A(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt$.

Equazioni a variabili separabili

La soluzione di $\begin{cases} y'(x) = f(y(x))g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è data da:
 $y(x) \equiv y_0$ per ogni x , se $f(y_0) = 0$; altrimenti,
 $y(x) = F^{-1} \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right)$, con F^{-1} inversa di $F(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds$.

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE LINEARI

Equazioni omogenee

Le soluzioni di $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ dipendono da due parametri $A, B \in \mathbb{R}$, a seconda del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$:
se ha due radici distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$;
se ha una radice doppia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, allora $y(x) = (Ax + B)e^{\lambda_0 x}$;
se ha radici complesse $\alpha \pm i\beta$, allora $y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$.

Equazioni non omogenee

Le soluzioni di $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ sono date da TUTTE le soluzioni dell'equazione omogenea più UNA soluzione particolare;
I parametri A, B si trovano imponendo le condizioni iniziali $y(x_0), y'(x_0)$.

Ricerca di una soluzione particolare

Una soluzione di $y''(x) + ay'(x) + by(x) = Ce^{\alpha x} x^n \cos(\beta x)$ con $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$, oppure di $y''(x) + ay'(x) + by(x) = Ce^{\alpha x} x^n \sin(\beta x)$ si trova come:
 $y(x) = e^{\alpha x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$, se $\alpha + i\beta$ NON è radice di $p(\lambda)$;
 $y(x) = x e^{\alpha x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$, se $\alpha + i\beta$ è radice di $p(\lambda)$;
 $y(x) = x^2 e^{\alpha x} P(x)$, se $\beta = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ è radice DOPPIA di $p(\lambda)$;
in tutti e tre i casi, $P(x), Q(x)$ sono polinomi di grado n .
Una soluzione di $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f_1(x) + f_2(x)$ si trova come $y_1(x) + y_2(x)$, dove $y_i(x)$ risolve $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f_i(x)$ per $i = 1, 2$.