DIMOSTRAZIONE TEO. LUSIN

SUPPONGO CHE f SIA LIMITATA. SE NO, CONSIDERO $f\chi_{E_n}$

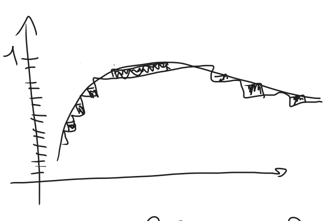
$E_n = \{|f| \leq n\}$ $\quad \mu(E_n) \longrightarrow \mu(X) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n$ TALE CHE $\mu(X) - \mu(E_n) \leq \varepsilon$

SE $g \equiv f|_{E_n}$ SU E CON $\mu(X \setminus E) \leq \varepsilon$

ALLORA $g \equiv f$ SU $E \cap E_n$ CON $\mu(X \setminus (E \cap E_n)) \leq 2\varepsilon$

A MENO DI COMPORRE CON MAPPA AFFINE, $0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x \in X$

$\exists\ \phi_n$ SEMPLICI TALI CHE $\phi_n \to f$ PUNTUALMENTE



$\psi_n := \phi_n - \phi_{n-1}$ HA VALORI $0, \frac{1}{2^n}$

$\psi_n = \frac{1}{2^n}\chi_{E_n} \quad \phi_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \Rightarrow f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\chi_{E_n}$

TEO. REGOLARITÀ MISURE $\Rightarrow \exists\ K$ COMPATTO TALE CHE $\mu(K) \geq \mu(X) - \varepsilon$

$f\chi_K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\chi_{F_n}$, $F_n = E_n \cap K \rightarrow \exists\ A_n$ APERTO, C_n COMPATTO TALI CHE $\mu(A_n) \leq \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $C_n \subset F_n \subset A_n$

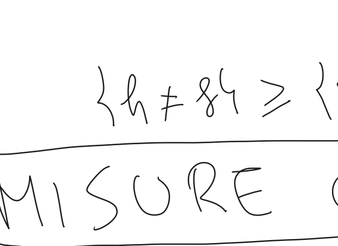
$h := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_{A_n, C_n}$ CONTINUA PERCHÉ CONVERGE TOTALMENTE

È A SUPPORTO COMPATTO SE SCELGO $A_n \subset A$ CON $\bar{A}$ COMPATTO (X LOC. COMPATTO)

$E := K \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \setminus C_n) \Rightarrow f \equiv h$ SU E (PERCHÉ $\chi_{E_n} \equiv \varphi_{A_n, C_n}$)

$$\mu(X \setminus E) = \underbrace{\mu(X) - \mu(K)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_n \setminus C_n)\right)}_{\leq \sum \mu(A_n \setminus C_n) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

PASSO DA h A $g \in C_c(X)$ TALE CHE $\sup_X |g| \leq \sup_X |f|$



$$g(x) := \begin{cases} h(x) & \text{SE } |h(x)| \leq \sup_X |f| \\ \sup_X |f| & \text{SE } h(x) > \sup_X |f| \\ -\sup_X |f| & \text{SE } h(x) < -\sup_X |f| \end{cases}$$

$\{h \neq f\} \geq \{g \neq f\} \Rightarrow \mu(\{g \neq f\}) \leq \mu(\{h \neq f\}) \leq 2\varepsilon$

MISURE CON SEGNO

DEF UNA MISURA CON SEGNO $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{M}$ σ-ALGEBRA) È UNA FUNZIONE CHE VERIFICA $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(E_n)$ $\forall$ UNIONE DISGIUNTA NUMERABILE

$E \subset \mathcal{M}$ SI DICE:

- POSITIVO (PER ν) SE $\nu(F) \geq 0\ \forall F \subset E$
- NEGATIVO SE $\nu(F) \leq 0\ \forall F \subset E$
- NULLO SE $\nu(F) = 0\ \forall F \subset E$ (E È POSITIVO E NEGATIVO)

ESEMPI 1) UNA MISURA (POSITIVA) È UNA MISURA CON SEGNO $\Leftrightarrow$ È FINITA

2) $E \to \int_E f\,d\mu$ È MISURA CON SEGNO SE f È μ-INTEGRABILE

INFATTI, SE PRENDO $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DISGIUNTI, ALLORA

$$\int_{\cup E_n} f = \int f\chi_{\cup E_n} = \int \sum f\chi_{E_n} \underset{\uparrow}{=} \sum \int f\chi_{E_n} = \sum \int_{E_n} f$$

$\sum \int |f\chi_{E_n}| = \int |f| < +\infty \Rightarrow$ TEO. CONV. DOMINATA

3) UNA COMBINAZIONE LINEARE $a\nu_1 + b\nu_2$ È UNA MISURA CON SEGNO SE ν_1, ν_2 SONO MISURE CON SEGNO E $a, b \in \mathbb{R}$ (IN PARTICOLARE, LA DIFFERENZA $\nu_1 - \nu_2$ È MISURA CON SEGNO)

4) LA RESTRIZIONE $\nu|_E : A \to \nu(A \cap E)$ È UNA MISURA CON SEGNO

$\nu|_E$ È MISURA POSITIVA (FINITA) $\Leftrightarrow E$ POSITIVO PER ν

$(-\nu)|_E$ È MISURA POSITIVA $\Leftrightarrow E$ NEGATIVO

OSS 1) SE $\{E_n\}$ CRESCENTI, $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \nu(E_n)$

SE $\{E_n\}$ DECRESCENTI, $\nu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \nu(E_n)$

2) LE MISURE CON SEGNO NON SONO MONOTONE RISPETTO ALL'INCLUSIONE

AD ESEMPIO, SE $\nu(F) < 0$ ALLORA $\nu(E \cup F) < \nu(E)$

IN PARTICOLARE, SE $\nu(E) = -\nu(F) < 0$ ALLORA $\nu(E \cup F) = 0$ MA $E \cup F$ NON È NULLO

3) SE E È POSITIVO (NEGATIVO, NULLO), F È POSITIVO (NEGATIVO, NULLO) $\forall F \subset E$

SE E_n POSITIVI (NEGATIVO, NULLO), $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ POSITIVO (NEGATIVO, NULLO)

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE DI HAHN

DATA ν MISURA CON SEGNO SU X, $\exists\ P$ POSITIVO, N NEGATIVO TALI CHE $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$

SE $X = P' \cup N'$ È UN'ALTRA DECOMPOSIZIONE ANALOGA, $P' \setminus P$, $N' \setminus N$ SONO NULLI

LA SCRITTURA $X = P \cup N$ SI DICE DECOMPOSIZIONE DI HAHN

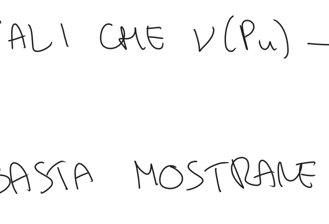
COROLLARIO

OGNI E MISURABILE È UNIONE DISGIUNTA DI UN INSIEME POSITIVO $E \cap P$ E UN INSIEME NEGATIVO $E \cap N$

OSS LA DECOMPOSIZIONE DI HAHN NON È UNICA IN GENERALE PERCHÉ GLI INSIEMI NULLI POSSONO APPARTENERE A P OPPURE A N

ESEMPIO $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$, $P = \{f \geq 0\}$ $N = \{f < 0\}$

OPPURE $P' = \{f > 0\}$ $N' = \{f \leq 0\}$



(~~GLI INSIEMI DOVE $f = 0$ O $\mu(E) = 0$~~ NULLI PER ν POSSONO STARE IN P OPPURE IN N)

DIM TEO DECOMPOSIZIONE DI HAHN

UNICITÀ: SUPPONIAMO $X = P \cup N = P' \cup N'$ DUE DECOMPOSIZIONI

ALLORA $P \setminus P' \subset P$ POSITIVO, $N' \setminus N \subset N$ NEGATIVO ($P \setminus P' = N' \setminus N$) $\Rightarrow P \setminus P'$ NULLO

ALLO STESSO MODO, $N \setminus N'$ NULLO

SIA $M := \sup\{\nu(E) : E \text{ POSITIVI}\}$, PER DEFINIZIONE $\exists\ P_n$ POSITIVI TALI CHE $\nu(P_n) \to M$ $\quad$ PONGO $P := \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n \Rightarrow \nu(P) = M$

P POSITIVO (POSSO SUPPORRE UNIONE CRESCENTE)

BASTA MOSTRARE CHE $N := X - P$ È NEGATIVO.

N NON CONTIENE INSIEMI STRETTAMENTE POSITIVI, SE NO $E \subset N$, E POSITIVO $\Rightarrow \nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) > M$

PER ASSURDO SE $E_0 \subset N$, $\nu(E_0) > 0$, $\exists\ F \subset E_0$ CON $\nu(F) < 0$

$\Rightarrow \nu(E_0 \setminus F) = \nu(E_0) - \nu(F) > \nu(E_0)$

$\varepsilon_n := \sup\{\varepsilon > 0 : \exists\ E \subset E_{n-1} : \nu(E) \geq \nu(E_{n-1}) + \varepsilon\}$

E_n TALE CHE $\nu(E_n) \geq \nu(E_{n-1}) + \varepsilon_n$

$\nu(E_1) \geq \nu(E_0) + \varepsilon_0$

$\nu(E_2) \geq \nu(E_1) + \varepsilon_1 \geq \nu(E_0) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1$

$+\infty > \nu(\cap E_n) = \lim \nu(E_n) \geq \nu(E_0) + \sum \varepsilon_n \Rightarrow \varepsilon_n \to 0$

RIPETO IL RAGIONAMENTO: $\exists\ E \subset \bigcap_n E_n$ TALE CHE $\nu(E) \geq \nu(\bigcap_n E_n) + \varepsilon$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow \varepsilon > \varepsilon_n$ PER QUALCHE n, $E \subset E_n$

$\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE CON DEF. DI E_n, ε_n

N DEV'ESSERE NEGATIVO.