Metodi Variazionali

Prof. Malchiodi - Anno Accademico $2011 - 2012$

Lezione $1 - 12/10/2011$

Definizione 1.
Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ aperto e $F : U \to Y$.
F è **differenziabile secondo Fréchet** se esiste $A \in L(X, Y)$ tale che $F(u + h) - F(u) - A(h) = o(h)$;
A è detto **differenziale (di Fréchet)** di F in u e si indica con $A = dF(u)$ oppure
$A = F'(u)$.

Osservazione 1.

1. Il differenziale è unico, perché se esistessero due operatori $A_1 = A_2$ aventi quella proprietà con $A_1(h^*) \neq A_2(h^*)$ per qualche h^*, allora per $h = th^*$ si avrebbe
$$F(u + h) = F(u) + A_1(h) + o_1(h) = F(u) + A_2(h) + o_2(h)$$
e dunque $t(A_1 - A_2)h^* = o(t)$ che è assurdo.

2. Se F è differenziabile, allora F è continua.

3. La nozione di differenziabilità è indipendente dalla scelta di norme equivalenti.

Esempio 1.

1. $F(u) \equiv c$ è differenziabile con $dF(u) \equiv 0$

2. $F(u) = Au$ per $A \in L(X, Y)$ è differenziabile con $dF(u) = A$

3. $B(u, v) : X \times Y \to Z$ bilineare continua è differenziabile con $dB(u, v) : (h, k) \to B(u, k) + B(h, v)$, perché
$$B(u + h, v + k) = B(u, v) + B(h, v) + B(u, k) + B(h, k)$$
e $B(h, k) \leq C\|h\|\|k\| = o(\|h\| + \|k\|)$

4. Se $X = H$ è uno spazio di Hilbert e $Y = \mathbb{R}$, allora $F(u) = \|u\|^2$ è differenziabile con $dF(u) : h \to 2\langle u, h\rangle_H$, perché
$$\|u + h\|^2 - \|u\|^2 = 2\langle u, h\rangle_H + \|h\|^2 = 2\langle u, h\rangle_H + o(h)$$

Osservazione 2.

1. Se $F, G : U \subset X \to Y$ sono differenziabili, allora per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ $aF + bG$ è differenziabile e $d(aF + bG) = adF + bdG$.

2. Se $F : U \subset X \to Y$ e $G : V \subset Y \to Z$ sono differenziabili e $G(U) \subset V$, allora $G \circ F$ è differenziabile e $d(G \circ F) : h \to dG(F(u))(dF(u)h)$

Definizione 2.
Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset Y$ aperto e $F : U \subset X \to Y$ differenziabile su tutto U tale che $u \to dF(u)$ è continua.
F si dice **di classe** C^1.

Definizione 3.
Sia H uno spazio di Hilbert e $F : H \to \mathbb{R}$ differenziabile secondo Fréchet e $f \in H$ tale che $dF(u) : h \to \langle f, h \rangle_H$, la cui esistenza e unicità seguono dal teorema di Riesz.
f è detta **gradiente** di F in u, e si indica con $\nabla J(u)$.
Se $F : U \subset H \to H$ è tale che $F = \nabla J$ per qualche $J : U \to \mathbb{R}$, allora F è detto **operatore variazionale**.

Definizione 4.
Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X$ aperto e $F : U \to Y$.
F è **differenziabile secondo Gâteaux** se esiste $A \in L(X, Y)$ tale che, per ogni $h \in X$,

$$\frac{F(u + th) - F(u)}{t} \underset{t \to 0}{\to} Ah$$

A è detto **differenziale di Gâteaux** di F in u e si indica con $A = d_G F(u)$ oppure $A = F'_G(u)$.

Osservazione 3.
Se F è differenziabile secondo Fréchet, è anche differenziabile secondo Gâteaux, ma il viceversa è falso: basti considerare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(s,t) = \begin{cases} \left(\frac{s^2 t}{s^4 + t^2}\right)^2 & \text{se } (s,t) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (s,t) = (0,0) \end{cases}$.

Teorema 1 (Valor medio)**.**
Sia $U \subset X$ un aperto, $F : U \to Y$ differenziabile secondo Gâteaux e $u, v \in U$ tali che $[u, v] := \{tu + (1-t)v : t \in [0,1]\} \subset U$.
Allora

$$\|F(u) - F(v)\| \leq \sup_{[u,v]} \|d_G F\| \|u - v\|$$

Dimostrazione.
Se $F(u) \neq F(v)$, allora per il teorema di Hahn-Banach esiste $\Psi \in Y^*$ tale che $\|\Psi\| = 1$ e $\Psi(F(u) - F(v)) = \|F(u) - F(v)\|$; la funzione

$$h(t) = \Psi(F(tu + (1-t)v))$$

è derivabile con

$$h'(t) = \Psi(d_G F(tu + (1-t)v)(u - v))$$

e dunque, per qualche $\theta \in [0,1]$, si ha

$$\|F(u) - F(v)\| = \Psi(u) - \Psi(v) = h(1) - h(0) = h'(\theta) =$$

$$= \Psi(d_G F(\theta u + (1-\theta)v)(u-v)) \leq \|\Psi\| \|d_G F(\theta u + (1-\theta)v)\| \|u - v\| \leq$$

$$\leq \sup_{[u,v]} \|d_G F(w)\| \|u - v\|$$

□

Lezione 2 – 13/10/2011

Teorema 2.
Sia $F : U \subset X \to Y$ differenziabile secondo Gâteaux tale che $F'_G : U \to L(X, Y)$ è continua in $u \in U$.
Allora F è differenziabile secondo Fréchet.

Dimostrazione.
La funzione $R(h) = F(u + h) - F(u) - d_G F(u)h$ è differenziabile secondo Gâteaux con $d_G R(h)k = d_G F(u + h)k - d_G F(u)k$ e dunque dal teorema del valor medio con $[u, v] = [0, h]$ si ottiene

$$\|R(h)\| = \|R(h) - R(0)\| \leq \sup_{[0,h]} \|d_G R\| \|h\| =$$

$$= \sup_{w \in [0,h]} \|d_G F(u + w) - d_G F(u)\| \|h\| = o(h)$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che, per la continuità di $d_G F(u)$ in u, si ha $\sup_{w \in [0,h]} \|d_G F(u + w) - d_G F(u)\| \underset{h \to 0}{\to} 0$ □

Definizione 5.
Siano $a < b \in \mathbb{R}$ e $F \in C([a, b], X)$ e $\Phi(t) := \int_a^t F(\xi) d\xi$ (integrale di Riemann).
Φ è detta **primitiva di** F.

Osservazione 4.
Se $F : U \subset X \to Y$ è di classe C^1 e $[u, v] \subset U$, ponendo $\gamma(t) = tu + (1 - t)v$ si ha $F \circ \gamma \in C^1(U, Y)$ con $(F \circ \gamma)' = F'(tu + (1 - t)v)(u - v)$, dunque

$$F(u) - F(v) = \int_0^1 F'(tu + (1-t)v)(u - v) dt = \left(\int_0^1 F'(tu + (1 - t)v) dt \right) (u - v)$$

Definizione 6.
Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\begin{cases} s \to f(x, s) \text{ è continua per q.o. } x \in \Omega \\ x \to f(x, s) \text{ è misurabile per ogni } s \in \mathbb{R} \end{cases}$.
f è detta **di Carathéodory**.

Definizione 7.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory e $M(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili}\}$.
L'**operatore di Nemitski** associato a F è la mappa definita su $M(\Omega)$ come $f : u(x) \to f(x, u(x))$.

Osservazione 5.
Se f è di Carathéodory, allora $f(u) \in M(\Omega)$.
Infatti, esiste una successione di funzioni semplici $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u$ q.o., ed essendo f di Carathéodory allora $f(u_k) \in M(\Omega)$ è misurabile, e dunque anche $f(u)$ lo è, perché $f(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} f(u)$ q.o..

Lemma 3.
Sia $p \in [1, +\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e $u_k \in L^p(\Omega)$ una successione convergente a u.
Allora, a meno di estratte, $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u$ q.o. e $|u_k| \le h$ q.o. per qualche $h \in L^p(\Omega)$.

Dimostrazione.
A meno di estratte, si può supporre $|u_{k+1} - u_k| \le \dfrac{1}{2^k}$ e porre $v_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} |u_{j+1} - u_j|$; per monotonia, $v_k \underset{k\to+\infty}{\to} v$ q.o., e inoltre grazie al teorema di convergenza monotona la convergenza è anche in $L^p(\Omega)$ e dunque in particolare $v \in L^p(\Omega)$.
Inoltre, per ogni $k \ge j$,

$$|u_k(x) - u_j(x)| \le |u_k(x) - u_{k-1}(x)| + \cdots + |u_{j+1}(x) - u_j(x)| \le v(x) - v_j(x)$$

e dunque $u_k(x)$ è di Cauchy per q.o. x, e dunque convergerà q.o. a u^*; infine, essendo $|u^* - u_k| \le v$, si ottiene che $u^* \in L^p(\Omega)$ e, per il teorema di convergenza dominata, che $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u^*$ in $L^p(\Omega)$, e perciò dev'essere $u = u^*$; la maggiorante in $L^p(\Omega)$ si ottiene ponendo $h = u + v$. □

Teorema 4.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory tale che $|f(x, s)| \le a + |s|^{\frac{p}{q}}$ per $p, q \in [1, +\infty)$.
Allora, l'operatore di Nemitski associato a f è continuo da $L^p(\Omega)$ a $L^q(\Omega)$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, se $u \in L^p$, allora $f(u) \in L^q$, perché

$$\int_\Omega |f(x, u(x))|^q dx \le \int_\Omega \left(a + b|u|^{\frac{p}{q}}\right)^q \le \int_\Omega C(p, q)\,(a^p + b^q |u|^p) =$$

$$= C(p, q) \left(a^p |\Omega| + b^q \int_\Omega |u|^p\right) < +\infty$$

Presa $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$, per il lemma 3 la convergenza è anche q.o. (a meno di estratte), e dunque $f(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} f(u)$ q.o., e inoltre, prendendo $h \in L^p(\Omega)$

come nel lemma precedente,

$$|f(u_k)| \leq a + b|u_k|^{\frac{p}{q}} \leq a + bh^{\frac{p}{q}} \in L^q(\Omega)$$

dunque si può applicare il teorema di convergenza dominata per avere che $f(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} f(u)$ anche in $L^q(\Omega)$; infine, poiché un'estratta con queste proprietà si può trovare per ogni successione $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u$, la convergenza non dipende dalla scelta della sottosuccessione e dunque F è continua. $\square$

Teorema 5.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory tale che

$$\begin{cases} f_s \text{ è di Carathéodory} \\ |f_s(x,s)| \leq a + b|s|^{p-2} \text{ per qualche } p > 2, a, b > 0 \\ f(x,0) \text{ è limitata} \end{cases}$$

Allora l'operatore di Nemitski associato a f è differenziabile da $L^p(\Omega)$ a $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ con $df(u) : v \to f_s(u)v$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, se $v \in L^p(\Omega)$ allora $f_s(u)v \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, perché dalla disuguaglianza di Hölder

$$\int_\Omega |f_s(\cdot,u)v|^{\frac{p}{p-1}} \leq \left(\int_\Omega |f_s(\cdot,u)|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left(a + b|u|^{p-2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \|v\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{p-1}} \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega A + B|u|^p\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \|v\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{p-1}} < +\infty$$

La continuità di f segue da

$$|f(x,s)| = \left| f(x,0) + \int_0^s f_s(x,\sigma)d\sigma \right| \leq |f(x,0)| + \int_0^s \left(a + b|\sigma|^{p-2}\right) d\sigma \leq$$

$$\leq C + as + \frac{b}{p-1}|s|^{p-1} \leq A + B|s|^{p-1}$$

e dal teorema 4; per la differenziabilità è sufficiente mostrare che

$$\omega(u,v) := \|f(u+v) - f(u) - f_s(u)v\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} = o\left(\|v\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

ma questo segue da

$$\omega(u,v)^{\frac{p}{p-1}} =$$

$$= \int_\Omega |f(x,u(x)+v(x)) - f(x,u(x)) - f_s(x,u(x))v(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx =$$

$$= \int_\Omega dx \left| \int_0^1 dt (f_s(x, u(x) + tv(x)) - f_s(x, u(x)))v(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq$$

$$\leq \int_\Omega dx \int_0^1 dt |f_s(x, u(x) + tv(x)) - f_s(x, u(x))v(x)|^{\frac{p}{p-1}} \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega dx \int_0^1 dt |f_s(x, u(x) + tv(x)) - f_s(x, u(x))|^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega dx \int_0^1 dt |v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} =$$

$$= \left(\int_0^1 dt \|f_s(u + tv) - f_s(u)\|^{\frac{p}{p-2}}_{L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \|v\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^p(\Omega)} = o\left(\|v\|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

perché il primo fattore tende a 0, per la continuità di $f_s : L^p(\Omega) \to L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$, che a sua volta segue dal teorema 4. $\square$

Osservazione 6.
Il teorema 4 non è più valido nel caso $p = 2$; infatti, se $f, f_s : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono di Carathéodory e f_s è limitata, l'operatore di Nemitski associato a f è continuo da $L^2(\Omega)$ in sé, differenziabile secondo Gâteaux con $d_G f(u) : v \to f_s(u)v$, ma è differenziabile secondo Fréchet in qualche u^* se e solo se $f(x, s) = a(x) + b(x)s$ per opportune $a, b \in M(\Omega)$

Lezione 3 – 19/10/2011

Teorema 6.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory tale che $|f(x, s)| \leq a + b|s|^\sigma$ per $\sigma \in \left(0, \dfrac{N+2}{N-2}\right]$ ($\sigma > 0$ se $N = 2$).
Allora, l'operatore di Nemitski associato a f è continuo da $H^1_0(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ per $q = \dfrac{2N}{(N-2)\sigma} \geq \dfrac{2N}{N+2}$ (per ogni $q > 1$ se $N = 2$), e inoltre $f(u)v \in L^1(\Omega)$ per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione.
Se $N \geq 3$, il teorema 4 garantisce che $f \in C\left(L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega), L^q(\Omega)\right)$ e dunque, essendo continua l'immersione $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$, si ha anche $f \in C\left(H^1_0(\Omega), L^q(\Omega)\right)$; in particolare, $f(u) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, dunque

$$\|f(u)v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f(u)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \|v\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} < +\infty$$

Se invece $N = 2$, si ha $f \in C(L^{\sigma q}(\Omega), L^q(\Omega))$ e dunque, essendoci l'immersione continua $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$, vale anche $f \in C\left(H^1_0(\Omega), L^q(\Omega)\right)$ e dunque

$$\|f(u)v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f(u)\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} < +\infty$$

$\square$

Osservazione 7.
Per quanto appena visto, $v \to \int_\Omega f(u)v$ è un funzionale lineare continuo su $H_0^1(\Omega)$ e dunque, essendo quest'ultimo uno spazio di Hilbert, esisterà $N(u) \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\langle N(u), v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(u)v$.

Teorema 7.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory tale che $|f(x,s)| \leq a + b|s|^\sigma$ per $\sigma \in \left[0, \frac{N+2}{N-2}\right]$ ($\sigma \geq 0$ se $N = 2$) e $N : X \to X$ tale che $\langle N(u), v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(u)v$. Allora, N è continuo.

Dimostrazione.
Se $N \geq 3$, per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\|N(u) - N(v)\|_{H_0^1(\Omega)} = \sup_{w \in H_0^1(\Omega), \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle N(u) - N(v), w\rangle_{H_0^1(\Omega)}| =$$

$$= \sup_{w \in H_0^1(\Omega), \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left| \int_\Omega (f(u) - f(v))w \right| \leq$$

$$\leq \sup_{w \in H_0^1(\Omega), \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|w\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \leq$$

$$\leq C\|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \underset{\|u-v\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0}{\to} 0$$

mentre se $N = 2$ si procede allo stesso modo applicando la disuguaglianza di Hölder con esponenti $p, \frac{p}{p-1}$ per un qualsiasi $p > 1$. □

Definizione 8.
Sia $F : U \subset X \to Y$ differenziabile tale che $dF : U \to L(X, Y)$ è a sua volta differenziabile in $u^* \in U$.
F si dice **due volte differenziabile** in u^* e l'operatore

$$F''(u^*) = d^2F(u^*) := d(dF(u^*)) \in L(X, L(X, Y))$$

è detto **secondo differenziale** di F in u^*.

Osservazione 8.
Si può identificare $L(X, L(X, Y))$ con lo spazio $L_2(X, Y)$ delle mappe bilineari da X a Y; infatti, data $A \in L(X, L(X, Y))$ si può considerare

$$\varphi_A \in L_2(X, Y) : (u_1, u_2) \to A(u_1)u_2$$

viceversa, data $\varphi \in L_2(X, Y)$ si può prendere

$$A_\varphi \in L(X, L(X, Y)) : x \to \varphi(x, \cdot) \quad \text{dove } \varphi(x, \cdot) : y \to \varphi(x, y)$$

Chiaramente si ha $\varphi_{A_\varphi} = \varphi$ e $A_{\varphi_A} = A$ per ogni $\varphi \in L_2(X,Y), A \in L(X, L(X,Y))$; inoltre, questa è un'isometria perché

$$\|A_\varphi\|_{L(X,L(X,Y))} = \sup_{\|u\|\leq 1} \|\varphi(u)\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|u\|\leq 1} \sup_{\|v\|\leq 1} \|\varphi(u,\cdot)v\| =$$

$$= \sup_{\|u\|\leq 1} \sup_{\|v\|\leq 1} \|\varphi(u,v)\| = \|\varphi\|_{L_2(X,Y)}$$

In particolare, per ogni $F : U \subset X \to Y$ due volte differenziabile è possibile vedere $F''(u)$ come un operatore bilineare da X a Y.

Definizione 9.
Sia $F : U \subset X \to Y$ due volte differenziabile e tale che $F'' : U \to L_2(X,Y)$ è continua.
Allora, si dice che $\mathbf{u} \in \mathbf{C^2}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$.

Proposizione 8.
Sia $F : U \subset X \to Y$ due volte differenziabile in $u^* \in U$.
Allora, per ogni $h \in X$, la funzione $F_h(u) = dF(u)h$ è differenziabile in u^* e $dF_h(u^*)k = d^2F(u^*)(h,k)$.

Dimostrazione.
Essendo $F_h = E_h \circ dF$, dove $E_h(L) = Lh$, la regola di derivazione per funzioni composte da

$$dF_h(u^*)k = dE_h(dF(u^*))\left(d^2F(u^*)k\right) = \left(d^2F(u^*)k\right)h = d^2F(u^*)(h,k)$$

$\square$

Teorema 9 (Lemma di Schwarz)**.**
Sia $F : U \subset X \to Y$ due volte differenziabile in $u^* \in U$.
Allora, $F''(u^*) \in L_2(X,Y)$ è simmetrica.

Dimostrazione.
Fissati $h, k \in U$ sufficientemente vicini a u^* considero

$$\Psi(h,k) := F(u+h+k) - F(u+h) - F(u+k) + F(u)$$

per ipotesi è una funzione differenziabile in k per ogni h fissato, con

$$d\Psi(h,k)y = (F'(u+h+k) - F'(u+k))y$$

e inoltre, essendo F due volte differenziabile in u^*,

$$F'(u^* + h + tk) = F'(u^*) + F''(u^*)(h+tk) + o(\|h+tk\|)$$

e

$$F'(u^* + tk) = F'(u^*) + F''(u^*)(tk) + o(\|tk\|)$$

e pertanto, dal teorema del valor medio 1, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\|\Psi(h,k) - F''(u)(h,k)\| = \|\Psi(h,k) - F''(u)(h,k) - \Psi(h,0) - F''(u)(h,0)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \|F'(u+h+tk) - F'(u+tk) - F''(u)h\|\|k\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \|o(\|h+tk\|) - o(\|tk\|)\|\|k\| \leq \varepsilon \sup_{t\in[0,1]} \|(\|h\| + \|tk\|)\|k\| \leq$$

$$\leq \varepsilon(\|h\| + 2\|k\|)\|k\|$$

analogamente, invertendo il ruolo di h e k,

$$\|\Psi(h,k) - F''(u)(k,h)\| = \|\Psi(k,h) - F''(u)(k,h)\| \leq \varepsilon(2\|h\| + \|k\|)\|h\|$$

e dunque

$$\|F''(u)(h,k) - F''(u)(k,h)\| \leq$$

$$\leq \|F''(u)(h,k) - \Psi(h,k)\| + \|\Psi(h,k) - F''(u)(k,h)\| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\left(\|h\|^2 + \|h\|\|k\| + \|k\|^2\right) \leq 3\varepsilon\left(\|h\|^2 + \|k\|^2\right)$$

pertanto, essendo $F''(u)$ bilineare, dev'essere $F''(u)(h,k) = F''(u)(k,h)$. □

Definizione 10.
Sia $F : U \subset X \to T$ n-volte differenziabile in $u^* \in U$ con differenziale $d^{(n)}F(u^*)$ oppure $F^{(n)}(u^*)$ e tale che $d^{(n)}F(u^*) : U \to L_n(X,Y)$ è differenziabile.
F si dice $(\mathbf{n+1})$**-volte differenziabile** in $u^* \in U$, e l'operatore

$$F^{(n+1)}(u^*) = d^{(n+1)}F(u^*) := d\left(d^{(n)}F(u^*)\right) \in L(X, L_n(X,Y)) \simeq L_{n+1}(X,Y)$$

si dice $(\mathbf{n+1})$**-esimo differenziale** di F.
Se inoltre $F^{(n)} : U \to L_n(X,Y)$ è continua, si dice che $\mathbf{u} \in \mathbf{C^{(n)}(U,Y)}$.

Proposizione 10.
Sia $G : U \to L^n(X,Y)$ differenziabile in $u^* \in U$ e, per ogni $h = (h_1,\dots,h_n) \in X^n$, $G_h(U) := G(u)(h_1,\dots,h_n) \in Y$.
Allora G_h è differenziabile in u^* e $dG_h(u^*)k = dG(u^*)(h_1,\dots,h_n,k)$

Dimostrazione.
Analogamente alla proposizione 8, $G_h = G \circ E_h$ con $E_h(L) = Lh$, e dunque per la regola di derivazione per funzioni composte

$$dG_h(u^*)k = dE_h(G(u^*))(dG(u^*)k) = (dG(u^*)k)h = dG(u^*)(h,k)$$

□

Teorema 11.
Sia $F : U \subset X \to Y$ n-volte differenziabile in u^*.
Allora $F^{(n)} \in L_n(X,Y)$ è simmetrica.

Dimostrazione.
Procediamo per induzione: il teorema 9 è la base dell'induzione; supponiamo che sia vero per $n-1$, cioè che per ogni $1 \le i, j \le n-1$ valga

$$d^{(n-1)}F(u^*)(h_1, \dots, h_i, \dots, h_j, \dots h_{n-1}) =$$

$$= d^{(n-1)}F(u^*)(h_1, \dots, h_j, \dots, h_i, \dots h_{n-1})$$

In particolare si avrà

$$d^{(n)}F(u^*)(h_1, \dots, h_i, \dots, h_j, \dots h_n) =$$

$$= d\left(d^{(n-1)}F(u^*)(h_1, \dots, h_i, \dots, h_j, \dots h_{n-1})\right) h_n =$$

$$= d\left(d^{(n-1)}F(u^*)(h_1, \dots, h_j, \dots, h_i, \dots h_{n-1})\right) h_n =$$

$$= d^{(n)}F(u^*)(h_1, \dots, h_j, \dots, h_i, \dots h_n)$$

Resta da vedere che si può scambiare anche l'ultima coordinata: la mappa $G(u^*) = d^{(n-2)}F(u^*)(h_1, \dots, h_{n-2})$ è di classe C^2, dunque applicando il teorema 9 e la proposizione 10 si ottiene

$$d^{(n)}F(u^*)(h_1, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) = d\left(d^{(n-1)}F(u^*)(h_1, \dots, h_{n-2}, h_{n-1})\right) h_n =$$

$$= d^2G(u^*)(h_{n-1}, h_n) = d^2G(u^*)(h_n, h_{n-1}) =$$

$$= d\left(d^{(n-1)}F(u^*)(h_1, \dots, h_{n-2}, h_n)\right) h_{n-1} = d^{(n)}F(u^*)(h_1, \dots, h_{n-2}, h_n, h_{n-1})$$

□

Lezione 4 – 20/10/2011

Definizione 11.
Siano X, Y, Z spazi di Banach, $Q \subset X \times Y$, $(u^*, v^*) \in Q$ aperto, $F : Q \to Z$ e $\sigma_{u*} : v \to (u^*, v)$ tali che $F \circ \sigma_{u^*}$ è differenziabile in u^*.
$F : Q \to Z$ è detta **differenziabile rispetto a u** in (u^*, v^*) e $d(F \circ \sigma_{u^*}) \in L(X, Z)$ è detta **derivata parziale di F rispetto a u** e si indica $d_uF(u^*, v^*)$.

Osservazione 9.
La definizione di differenziabilità rispetto a u equivale a richiedere l'esistenza di $A_u \in L(X, Z)$ tale che $F(u^* + h, v^*) = F(u^*, v^*) + A_u h + o(h)$.

Osservazione 10.
Se $F : Q \subset X \times Y \to Z$ è differenziabile in (u^*, v^*), ha derivate parziali rispetto a u e v in u^* e v^* rispettivamente, e si ha $d_uF(u^*, v^*) : h \to dF(u^*, v^*)(h, 0)$ e $d_vF(u^*, v^*) : k \to dF(u^*, v^*)(0, k)$.

Definizione 12.
Sia $d_u F(u^*, v^*)$ differenziabile rispetto a v.
Si definisce

$$d^2_{uv}F(u^*, v^*) := d_v(d_u F(u^*, v^*))$$

e, induttivamente,

$$d^m_{u^l v^{m-l}}F(u^*, v^*) = d^l_{u^l}\left(d^{m-l}_{v^{m-l}}F(u^*, v^*)\right)$$

Osservazione 11.
Se $F : Q \subset X \times Y \to Z$ ha derivate rispetto u e v continue in un intorno di u e v, è differenziabile in (u^*, v^*).
Se F è differenziabile due volte, allora $d^2_{uv}F(u^*, v^*) = d^2_{vu}F(u^*, v^*)$

Proposizione 12 (Formula di Taylor)**.**
Sia $F : U \subset X \to Y$ di classe C^n tale che $[u, v] \subset U$. Allora

$$F(u+v) =$$

$$= F(u) + dF(u)v + \frac{d^2F(u)(v,v)}{2} + \cdots + \frac{d^{(n-1)}F(u)(v,\ldots,v)}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{\int_0^1 (1-t)^{n-1} d^{(n)}F(u+tv)(v,\ldots,v)dt}{(n-1)!} =$$

$$= F(u) + dF(u)v + \frac{d^2F(u)(v,v)}{2} + \cdots + \frac{d^{(n-1)}F(u)(v,\ldots,v)}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{d^{(n)}F(u)(v,\ldots,v)}{n!} + o\left(\|v\|^n\right)$$

Dimostrazione.
Posta $\varphi(t) := F(u+tv)$, si ha

$$\varphi'(t) = dF(u+tv)v \quad \varphi''(t) = d^2F(u+tv)(v,v) \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \varphi^{(n)}(t) = d^{(n)}F(u+tv)(v,\ldots,v)$$

e dunque, dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile,

$$F(u+v) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt}{(n-1)!} =$$

$$= F(u) + dF(u)v + \frac{d^2F(u)(v,v)}{2} + \cdots + \frac{d^{(n-1)}F(u)(v,\ldots,v)}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{\int_0^1 (1-t)^{n-1} d^{(n)}F(u+tv)(v,\ldots,v)dt}{(n-1)!}$$

e, dalla continuità di $d^n F(u)$,

$$\frac{\int_0^1 (1-t)^{n-1} d^{(n)} F(u+tv)(v,\dots,v)dt}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{d^{(n)}F(u)(v,\dots,v)}{n!} + \frac{\int_0^1 (1-t)^{n-1} d^{(n)} (F(u+tv)-F(u))(v,\dots,v)dt}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{d^{(n)}F(u)(v,\dots,v)}{n!} + o\left(\|v\|^n\right)$$

$\square$

Definizione 13.
Sia $A \in L(X,Y)$ tale che esiste $B \in L(Y,X)$ che verifica $B \circ A = \mathrm{Id}_X$ e $A \circ B = \mathrm{Id}_Y$.
A si dice **invertibile**.
L'insieme degli operatori invertibili da X a Y si denota con $\mathrm{Inv}(X,Y)$.

Osservazione 12.

1. Per il teorema della mappa aperta, se $A \in L(X,Y)$ è iniettivo e $\mathrm{r}(A) = Y$, allora $A \in \mathrm{Inv}(X,Y)$.
2. L'operatore $B \in L(Y,X)$ descritto in precedenza è unico e si indica con A^{-1}.
3. $\mathrm{Inv}(X,Y) \subset L(X,Y)$ è aperto: se $A \in \mathrm{Inv}(X,Y)$ e $T \in L(X,Y)$ verifica $\|T-A\|_{L(X,Y)} \leq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}}$, allora $T \in \mathrm{Inv}(X,Y)$.
4. La mappa $J : A \to A^{-1}$ è di classe C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$, e $dJ(A) : B \to A^{-1}BA^{-1}$.

Definizione 14.
Siano X, Y spazi di Banach, $U \subset X, V \subset Y$ aperti e $F : U \subset X \to Y \supset V$ tale che esiste $G : V \to U$ che verifica $G \circ F = \mathrm{Id}_U$ e $F \circ G = \mathrm{Id}_V$.
Si indicherà $F \in \mathrm{Hom}(U,V)$.
Se $F \in C(X,Y)$ ed esistono due intorni U di u^* e V di $F(u^*)$ tali che $F \in \mathrm{Hom}(U,V)$, allora F si dice **localmente invertibile** in $u^* \in U$

Osservazione 13.

1. Se $F_1 : X_1 \to X_2$ è localmente invertibile in u^* e $F_2 : X_2 \to Y$ lo è in $F_1(u^*)$, allora $F_2 \circ F_1$ è localmente invertibile in u.
2. Se F è localmente invertibile in u^*, lo è in un suo intorno.
3. Se F è localmente invertibile e differenziabile in u^*, allora lo è anche $G := F^{-1}$; infatti, differenziando l'identità $G(F(u^*)) = u$ si ottiene

$$G'(F(u^*))F'(u^*) = \mathrm{Id} \quad G'(F(u^*)) = (F'(u^*))^{-1}$$

in particolare $F'(u^*) \in \mathrm{Inv}(X,Y)$ e $G'(F(u^*)) \in \mathrm{Inv}(Y,X)$.

Lezione 5 – 26/10/2011

Teorema 13 (Inversa locale)**.**
Sia $F \in C^1(X, Y)$ *e* $u^* \in U$ *tale che* $F'(u^*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$.
Allora, F *è localmente invertibile in* U*; più precisamente, esistono due intorni* $U \ni u^*$ *e* $V \ni F(u^*)$ *tali che* $F \in \mathrm{Hom}(U, V)$ *e* $F^{-1} \in C^1(X, Y)$ *con* $d\left(F^{-1}\right)(v) = \left(F'\left(F^{-1}(v)\right)\right)^{-1}$ *per ogni* $v \in V$.
Inoltre, se $F \in C^k(X, Y)$ *per qualche* $k > 1$*, allora* $F^{-1} \in C^k(V, X)$.

Dimostrazione.
A meno di traslazioni, si può supporre $u^* = 0 = F(u^*)$ e, a meno di cambiare F con $(F'(0))^{-1} \circ F$, si può supporre $F : X \to X$ con $F'(0) = \mathrm{Id}_X$, ovvero $F = \mathrm{Id}_X + \Psi$ con $\Psi(0) = 0$ e $\Psi'(0) = 0$; dunque, prendendo $r > 0$ tale che $\sup\limits_{B_r(0)} \|\Psi'\| \le \dfrac{1}{2}$ e definendo, per $u \in B_r(0)$ e $v \in B_{\frac{r}{2}}(0)$, $\varphi_v(u) = v - \Psi(u)$, si ha, dal teorema del valor medio 1 si ottiene

$$\|\varphi_v(u_1) - \varphi_v(u_2)\| = \|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)\| \le \sup_{[u_1,u_2]} \|\Psi'\| \|u_1 - u_2\| \le \frac{\|u_1 - u_2\|}{2}$$

e

$$\|\varphi_v(u)\| \le \|v\| + \|\Psi(u)\| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \le r$$

e dunque φ_v è una contrazione, ma $u = \varphi_v(u)$ se e solo se $F(u) = v$, dunque $F \in \mathrm{Hom}(U, V)$ per $U = B_r(0)$ e $V = B_{\frac{r}{2}}(0) \cap F^{-1}(U)$.
F^{-1} è continua perché se $v, z \in U$ allora

$$\left\|F^{-1}(v) - F^{-1}(z)\right\| = \left\|v - \Psi\left(F^{-1}(v)\right) - \left(z - \Psi\left(F^{-1}(z)\right)\right)\right\| \le$$

$$\le \|v - z\| + \left\|\Psi\left(F^{-1}(v)\right) - \Psi\left(F^{-1}(z)\right)\right\| \le \|v - z\| + \frac{\left\|F^{-1}(v) - F^{-1}(z)\right\|}{2}$$

e dunque $\left\|F^{-1}(v) - F^{-1}(z)\right\| \le 2\|v - z\|$; F^{-1} è derivabile in 0 perché $F^{-1}(v) = v - \Psi\left(F^{-1}(v)\right)$ con $\Psi\left(F^{-1}(v)\right) = o\left(\left\|F^{-1}(v)\right\|\right) = o(\|v\|)$ e analogamente, componendo con una traslazione, si dimostra la derivabilità in ogni $u \in U$; F è di classe C^1 perché, per la regola di derivazione dell'inversa, $\left(F^{-1}\right)'(v) = \left(F'\left(F^{-1}(v)\right)\right)^{-1}$ è composizione di funzioni continue; infine, F^{-1} ha la stessa regolarità di F perché, procedendo per induzione, se $F^{-1} \in C^{k-1}(V, Y)$ e $F \in C^k(X, Y)$ allora $\left(F^{-1}\right)^{-1}(v) = \left(F'\left(F^{-1}(v)\right)\right)^{-1}$ è composizione di funzioni di classe C^{k-1}, e dunque $\left(F^{-1}\right)' \in C^{k-1}(V, Y)$. □

Osservazione 14.
L'ipotesi $f \in C^1(X, Y)$ è essenziale; infatti, prendendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non-decrescente tale che $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \frac{1}{k} - \frac{1}{4k^2} \le t \le \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} \\ t + O\left(t^2\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$ si nota facilmente che φ è derivabile in 0 con $\varphi'(0) = 1$, ma φ non è iniettiva intorno a 0.
In dimensione infinita, si può prendere come controesempio $X = Y = C([-1, 1])$

e $F : u \to \varphi \circ u$: la successione $v_k = \dfrac{1}{k} + \dfrac{t}{k^2} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ non può appartenere all'immagine di F perché se fosse $v_k = F(u_k) = \varphi \circ u_k$, allora $\begin{cases} \varphi(u_k(t)) > \frac{1}{k} & \text{se } t > 0 \\ \varphi(u_k(t)) < \frac{1}{k} & \text{se } t < 0 \end{cases}$ dunque, per la monotonia di φ, $\begin{cases} u_k(t) \geq \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} & \text{se } t > 0 \\ u_k(t) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{4k^2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$, che contraddice la continuità delle u_k.

Corollario 14.
Sia $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ periodica di periodo T e $g(u, u') \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ con $g(0,0) = 0$ e tale che $w'' + g_u(0,0)w + g_{u'}(0,0)w'$ ha come unica soluzione T-periodica quella banale $w \equiv 0$.
Allora, esistono $\widetilde{\varepsilon}, \delta > 0$ tali che per $|\varepsilon| \leq \widetilde{\varepsilon}$ il problema $u''(t) + g(u(t), u'(t)) = h(t)$ ha un'unica soluzione u periodica di periodo T con $\|u\|_{C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \delta$.

Dimostrazione.
È sufficiente applicare il teorema dell'inversa locale 13 con

$$X = \left\{ x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : u(t+T) = u(t) \ \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Y = \{ h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : h(t+T) = h(t) \ \forall t \in \mathbb{R} \}$$

e $F(u) = u'' + g(u, u')$ e $u^* = 0$; infatti, $F(u^*) = g(0,0) = 0$ e $F'(0)w = w'' + g_u(0,0)w + g_{u'}(0,0)w'$ è invertibile perché ha nucleo banale e per la teoria degli operatori di Fredholm. □

Corollario 15.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e λ non un autovalore di Δ su Ω.
Allora, esistono $\varepsilon, \delta > 0$ tali che per $h \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ con $\|h\|_{C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)} \leq \varepsilon$ il problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda u(x) - u^3(x) = h(x) & \textit{su } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ con $\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq \delta$.

Dimostrazione.
È sufficiente applicare il teorema dell'inversa locale 13 con $X = C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $Y = C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, $F(u) = \Delta u + \lambda u - u^3 \quad u^* = 0$; infatti, $F \in C^1(X, Y)$ per le stime di Schauder, $F(u^*) = 0$ e $F'(0)w = \Delta w + \lambda w$ è invertibile perché λ non è autovalore di Δ e per la teoreia degli operatori di Fredholm. □

Corollario 16 (Problema di Plateau)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e $\gamma : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ liscia.
Allora esistono $\varepsilon, \delta > 0$ tali che se $\gamma \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ con $\|\gamma\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon$ il problema

$$\begin{cases} M(u) := \left(1 + u_y^2\right) u_{xx} + \left(1 + u_x^2\right) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 & \textit{su } \Omega \\ u = \gamma & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ con $\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq \delta$.

Dimostrazione.
È sufficiente applicare il teorema dell'inversa locale 13 con $X = C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $Y = C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $F(u) = (M(u), u|_{\partial\Omega}) \quad u^* = 0$; infatti, $F(u^*) = 0$ e $F'(0)w = (\Delta w, w|_{\partial\Omega})$ è invertibile perché il problema $\begin{cases} \Delta w = h & \text{su } \Omega \\ w = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ ha un'unica soluzione per h, φ assegnate, e $\|w\|_X \leq \|(h, \varphi)\|_Y$ per le stime di Schauder. $\square$

Lezione 6 – 25/10/2011

Lemma 17.
Siano X, T, Y spazi di Banach, $U \subset X$ e $\Lambda \subset T$ aperti, $(\lambda^*, u^*) \in \Lambda \times U$ e $F \in C(\Lambda \times U, Y)$ tale che $F_u : \Lambda \times U \to L(X, U)$ è continua e $F_u(\lambda^*, u^*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$.
Allora la mappa $\Psi(\lambda, u) = (\lambda, F(\lambda, u))$ è localmente invertibile in (λ^*, u^*) e la sua inversa Φ è continua.
Inoltre, se $F \in C^1(\Lambda \times U, Y)$, allora anche Φ è di classe C^1.

Dimostrazione.
L'invertibilità locale di Ψ segue applicando il teorema dell'inversa locale 13 a $u \to F(\lambda, u)$.
Se poi $F \in C^1(\Lambda \times U, Y)$, allora

$$\Psi'(\lambda^*, u^*)(\xi, v) = (\xi, F_\lambda(\lambda^*, u^*)\xi + F_u(\lambda^*, u^*)v) = (\eta, w) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \xi = \eta \\ v = (F_u(\lambda^*, u^*))^{-1}(w - F_\lambda(\lambda^*, u^*))\eta \end{cases}$$

e dunque $\Psi'(\lambda^*, u^*)$ è invertibile e quindi si può applicare il teorema dell'inversa locale 13 a Ψ. $\square$

Osservazione 15.

1. Se Φ è l'inversa locale di Ψ, allora la sua prima componente è necessariamente l'identità, dunque $\Phi(\lambda, v) = (\lambda, \varphi(\lambda, v))$, ovvero $F(\lambda, \varphi(\lambda, v)) = v$; derivando quest'ultima identità si ottiene

$$\begin{cases} F_\lambda(\lambda, \varphi(\lambda, v)) + F_u(\lambda, \varphi(\lambda, v))\varphi_\lambda(\lambda, v) = 0 \\ F_u(\lambda, \varphi(\lambda, v))\varphi_v(\lambda, v) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

   e dunque

$$\begin{cases} \varphi_\lambda(\lambda, v) = -\left(F_u(\lambda, \varphi(\lambda, v))\right)^{-1} F_\lambda(\lambda, \varphi(\lambda, v)) \\ \varphi_v(\lambda, v) = \left(F_u(\lambda, \varphi(\lambda, v))\right)^{-1} \end{cases}$$

2. Le conclusioni del lemma 17 valgono anche se T è soltanto uno spazio topologico.

Teorema 18 (Funzione implicita)**.**
Siano X, T, Y spazi di Banach, $U \subset X$ e $\Lambda \subset T$ aperti, $(\lambda^*, u^*) \in \Lambda \times U$ e $F \in C^k(\Lambda \times U, Y)$ tale che $F(\lambda^*, u^*) = 0$ e $F_u(\lambda^*, u^*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$.
Allora esistono due intorni Θ di λ^* e U^* di u^* e $g \in C^k(\Theta, X)$ tale che

1. $F(\lambda, g(\lambda)) \equiv 0$ *per ogni* $\lambda \in \Theta$.
2. *Se* $F(\lambda, u) = 0$ *e* $(\lambda, u) \in \Theta \times U^*$, *allora* $u = g(\lambda)$.
3. $g'(\lambda) = -(F_u(\lambda, g(\lambda)))^{-1} F_\lambda(\lambda, g(\lambda))$ *per ogni* $\lambda \in \Theta$.

Dimostrazione.
Per il lemma 17 la mappa $\Phi(\lambda, u) = (\lambda, F(\lambda, u))$ è localmente invertibile in (λ^*, u^*) con $\Psi(\lambda^*, u^*) = (\lambda^*, F(\lambda^*, u^*)) = (\lambda^*, 0)$ e la sua inversa è del tipo $\Phi(\lambda, v) = (\lambda, \varphi(\lambda, v))$; dunque, ponendo $g(\lambda) = \varphi(\lambda, 0)$, si ottiene

$$F(\lambda, g(\lambda)) = F(\lambda, \varphi(\lambda, 0)) = 0$$

per ogni $\lambda \in \Theta$; la seconda proprietà segue dall'iniettività di Φ e la terza dalle regole di derivazione. $\square$

Teorema 19.
Sia $f(\varepsilon, t, x) \in C^1\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$ *periodica nella variabile* t *con periodo* T *tale che l'equazione* $y'(t) = f(0, t, y(t))$ *ha una soluzione* y *periodica di periodo* T, *e sia* $\alpha(\varepsilon, t, \xi)$ *la soluzione di* $\begin{cases} \frac{\partial\alpha}{\partial t}(\varepsilon, t, \xi) = f(\varepsilon, t, \alpha(\varepsilon, t, \xi)) \\ \alpha(0) = \xi \end{cases}$.
Se $\lambda = 1$ *non è un autovalore di* $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi}(0, T, y(0))$, *allora esistono* $\delta > 0$ *e una funzione continua* $\xi : B_\delta(0) \to \mathbb{R}^N$ *con* $\xi(0) = y(0)$ *tale che per* $|\varepsilon| < \delta$ *il problema* $\begin{cases} y_\varepsilon'(t) = f(\varepsilon, t, y_\varepsilon(t)) \\ y_\varepsilon(0) = \xi(\varepsilon) \end{cases}$ *ha un'unica soluzione* y_ε *periodica di periodo* T.

Dimostrazione.
Poiché una soluzione α è periodica se e solo se $\alpha(\varepsilon, T, \xi) = \xi$, è sufficiente applicare il teorema della funzione implicita 18 alla mappa $F(\varepsilon, \xi) = \alpha(\varepsilon, T, \xi) - \xi$; infatti,

$$F(0, y(0)) = \alpha(0, T, y(0)) - y(0) = y(T) - y(0) = 0$$

e, siccome 1 non è autovalore di $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi}(0, T, y(0))$,

$$F_\xi(0, y(0)) = \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}(0, T, y(0)) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} \in \mathrm{Inv}\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$$

$\square$

Definizione 15.
Sia X uno spazio di Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ un funzionale.
Se $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty$, J si dice **coercitivo**.
Se $f(\widetilde{u}) \leq \liminf\limits_{u \rightharpoonup \widetilde{u}} f(u)$ per ogni $\widetilde{u} \in X$, J si dice **debolmente inferiormente semi-continuo**.

Teorema 20 (Tonelli)**.**
Sia X *uno spazio di Banach riflessivo e* $J : X \to \mathbb{R}$ *un funzionale coercitivo e debolmente inferiormente semi-continuo.*
Allora X *ammette minimo globale, cioè esiste* $u \in X$ *tale che* $J(u) = \inf\limits_X J$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, J è inferiormente limitato, perché se esistesse una successione u_k tale che $J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} -\infty$, allora per coercitività u_k dovrà essere limitata, e dunque a meno di estratte $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u_0$, ma dalla semicontinuità seguirebbe $J(u_0) \le \liminf_{k\to+\infty} J(u_k) = -\infty$, che è assurdo; presa una successione minimizzante $\widetilde{u}_k$, essendo $J(\widetilde{u}_k) \underset{k\to+\infty}{\to} \inf_X J$, anche $\widetilde{u}_k$ dovrà essere limitata per la coercitività di J, e dunque a meno di estratte si avrà $\widetilde{u}_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} \widetilde{u}_0$ e, per semicontinuità, $J(\widetilde{u}_0) \le \liminf_{k\to+\infty} J(\widetilde{u}_k) = \inf_X J \le J(\widetilde{u}_0)$, e dunque $J(\widetilde{u}_0) = \inf_X J$. □

Osservazione 16.
Con le stesse ipotesi del teorema di Tonelli 20, il funzionale $-J$ ammette massimo globale.

Lezione 7 – 30/11/2011

Teorema 21.
Sia X uno spazio di Hilbert e $J : X \to \mathbb{R}$ un funzionale della forma $J(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \Phi(u)$ con $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ debolmente continuo e tale che $|\Phi(u)| \le a_1 + a_2\|u\|^\alpha$ per $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha < 2$.
Allora, J ammette minimo globale su X.

Dimostrazione.
J è coercitivo perché $J(u) \ge \frac{\|u\|^2}{2} - a_1 - a_2\|u\|^\alpha \underset{\|u\|\to+\infty}{\to} +\infty$ ed è debolmente inferiormente semi-continuo perché $\|u\|^2$ è debolmente inferiormente semi-continuo e Φ è debolmente continuo; dunque, per il teorema di Tonelli 20, J ammette minimo. □

Esempio 2.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory e $|f(\cdot, u)| \le a_1 + a_2|u|^q$ per qualche $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, q \in (0, 1)$, allora l'equazione $-\Delta u = f(\cdot, u)$ ha una soluzione in $H^1_0(\Omega)$; infatti, le soluzioni dell'equazione sono i punti critici del funzionale $J(u) = \frac{\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2} - \Phi(u)$, dove $\Phi(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(x, s)ds$, e il funzionale Φ è continuo per il teorema 6 e coercitivo perché

$$|\Phi(u)| \le \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} |f(x, s)|ds \le \int_\Omega \left(a_1|u| + \frac{a_2}{q+1}|u|^{q+1}\right) \le$$

$$\le C_\Omega \left(\|u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u\|^{q+1}_{H^1_0(\Omega)}\right)$$

Esempio 3.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare, $\lambda > \lambda_1(\Omega)$ e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è localmente Hölderiana e tale che $\dfrac{f(u)}{u} \underset{u \to 0}{\to} 0$ e $\dfrac{f(u)}{u} \underset{u \to +\infty}{\to} +\infty$, allora l'equazione $-\Delta u = \lambda u - f(u)$ ha una soluzione non banale su $H_0^1(\Omega)$; infatti, indicando con ξ_s il primo zero di $g(u) = \lambda u - f(u)$ e ponendo $\widetilde{g}_\lambda(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s = 0 \\ \lambda s - f(s) & \text{se } 0 < s \leq \xi_s \\ 0 & \text{se } s > \xi_s \end{cases}$, l'equazione $-\Delta v = \widetilde{g}_\lambda(v)$ soddisfa le limitazioni di crescita dell'osservazione precedente e dunque ammette una soluzione $v \in H_0^1(\Omega)$, che per il principio del massimo assume valori in $[0, \xi_s]$ e dunque risolve l'equazione di partenza; infine, c'è una soluzione non nulla perché il funzionale

$$J(u) = \frac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \int_\Omega dx \left(\frac{\lambda}{2} u(x)^2 - \int_0^{u(x)} f(x, s) ds \right)$$

verifica $\inf\limits_{H_0^1(\Omega)} J < 0 = J(0)$ in quanto, indicando con φ_1 la prima autofunzione di $-\Delta$ su Ω,

$$J(t\varphi_1) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega \|\nabla \varphi_1\|^2 - \lambda \frac{t^2}{2} \int_\Omega \varphi^2 + o\left(t^2\right) = \underbrace{(\lambda_1(\Omega) - \lambda)}_{<0} \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$$

Definizione 16.
Sia H uno spazio di Hilbert e $G \in C^1(H, \mathbb{R})$ tale che $dG(u) \neq 0$ per ogni $u \in H$. L'insieme $\{u \in H : G(u) = 0\}$ è detta **sottovarietà di codimensione 1** e si indica, per ogni $p \in M$, $T_pM = \{v \in H : \langle dG(u), v \rangle_H = 0\}$.

Definizione 17.
Sia M una sottovarietà di codimensione 1 e $J \in C^1(H, \mathbb{R})$.
Un **punto critico vincolato** a M per J è un punto $z \in M$ tale che $d(J|_M) = 0$, ovvero $dJ(z)v = 0$ per ogni $v \in T_zM$.

Osservazione 17.

1. Se M è una sottovarietà di codimensione 1 e z è un punto critico vincolato a M per J, allora per ogni curva $\gamma : (-1, 1) \to M$ tale che $\gamma(0) = z$ la mappa $t \to J(\gamma(t))$ ha un punto critico in $t = 0$.

2. Vale il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero se p è un punto critico vincolato a M per J allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla J(p) = \lambda \nabla G(p)$, in particolare $\lambda = \dfrac{\langle \nabla J(p), \nabla G(p) \rangle_H}{\|\nabla G(p)\|^2}$.

Esempio 4.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory e tale che $|f(\cdot, u)| \leq a_1 + a_2 |u|^p$ per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p \in \left(0, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$ e

$M = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1 \right\}$, allora i punti critici vincolati a M per $\Phi(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(x,s)ds$ verificano

$$\int_\Omega f(\cdot,u)v = \langle \nabla\Phi(u), v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda \left\langle \nabla \left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right), v \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda\langle 2u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= 2\lambda \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle$$

e dunque u risolve $-2\lambda\Delta u = f(\cdot,u)$; se inoltre f è omogenea di grado p, allora $\widetilde{u} := (2\lambda)^{\frac{1}{p-1}} u$ risolve $-\Delta\widetilde{u} = f(\cdot,\widetilde{u})$.

Definizione 18.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H,\mathbb{R})$ e M una sottovarietà di codimensione 1.
M è detta **vincolo naturale** per J se esiste $\widetilde{J} \in C^1(H,\mathbb{R})$ tale che ogni punto critico vincolato a M per J è un punto critico per $\widetilde{J}$.

Definizione 19.
Sia H uno spazio di Hilbert e $J \in C^1(H,\mathbb{R})$.
La sottovarietà di codimensione 1 $M = \{u \in H\backslash\{0\} : \langle J'(u), u\rangle_H = 0\}$ è detta **varietà di Nehari**.

Proposizione 22.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^2(H,\mathbb{R})$ e M la sua varietà di Nehari tale che

1. *Esiste $r > 0$ tale che $B_r(0) \cap M = \emptyset$.*
2. *$\langle J''(u)u, u\rangle_H \neq 0$ per ogni $u \in M$.*

Allora M è un vincolo naturale per J.

Dimostrazione.
È sufficiente mostrare che ogni punto critico vincolato a M per J è in realtà un punto critico per $\widetilde{J} = J$; mostriamo innanzi tutto che M è effettivamente una sottovarietà di codimensione 1: posto $G(u) = \langle J'(u), u\rangle_H$, $\nabla G(u) \neq 0$ perché $G'(u) : v \to \langle J''(u)v, u\rangle_H + \langle J'(u), v\rangle_H$ e dunque se $u \in M$ allora

$$G'(u)u = \langle J''(u)u, u\rangle_H + \langle J'(u), u\rangle_H = \langle J''(u)u, u\rangle_H \neq 0$$

Se poi u è un punto critico vincolato a M, allora $\nabla J(u) = \lambda\nabla G(u)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, dunque

$$0 = \langle J'(u), u\rangle_H = \lambda\langle G'(u), u\rangle_H = \lambda \underbrace{\langle J''(u)u, u\rangle_H}_{\neq 0}$$

quindi dev'essere $\lambda = 0$ e cioè u è un punto critico per J. $\square$

Lezione 8 – 1/12/2011

Esempio 5.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare allora l'equazione $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ ha una soluzione non banale per $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$, nonostante il funzionale associato $J(u) = \frac{\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}$ sia illimitato superiormente e inferiormente, perché prendendo $u_0 \not\equiv 0$ si ha

$$J(tu_0) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega \|\nabla u_0\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |u_0|^{p+1} \underset{k\to+\infty}{\to} -\infty$$

mentre se $B_R(x_0) \subset \Omega$ e $\chi \in C^\infty_0(B_R(x_0))$ è tale che $0 \le \chi \le 1$ e $\chi|_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \equiv 1$, allora ponendo $u_k(x) = \chi(x)\sin(kx_1)$ si ottiene

$$J(u_k) \ge \frac{1}{2}\int_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \|\nabla u_k\|^2 - \frac{|\Omega|}{p+1} =$$

$$= k^2 \int_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \cos(kx_1)^2 dx - \frac{|\Omega|}{p+1} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$$

Per mostrare l'esistenza di un punto critico per J è sufficiente far vedere ammette minimo sulla varietà di Nehari $M = \left\{u \in H\backslash\{0\} : \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega |u|^{p+1}\right\}$ e che quest'ultima soddisfa le ipotesi della proposizione 22: applicando la disuguaglianza di Sobolev a $u \in M$ si ottiene

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega |u|^{p+1} \le C\|u\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}$$

che non può accadere se $0 \not\equiv u$ è troppo vicino a 0, e dunque per $r > 0$ sufficientemente piccolo si ha $M \cap B_r(0) = \emptyset$, e inoltre essendo

$$\langle J''(u)v, w\rangle_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \langle\nabla v, \nabla w\rangle - p\int_\Omega |u|^{p-1}vw$$

per $u = v = w \in M$ si ottiene

$$\langle J''(u)u, u\rangle_{H^1_0(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - p\int_\Omega |u|^{p+1} = -(p-1)\int_\Omega |u|^{p+1} \ne 0$$

Il funzionale J è inoltre limitato su M perché $J|_M = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|\cdot\|^2_{H^1_0(\Omega)}$, dunque ogni successione minimizzante u_k è limitata e quindi, a meno di estratte converge a u debolmente in $H^1_0(\Omega)$ e fortemente in $L^p(\Omega)$, pertanto

$$r^2 \le \|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega |u_k|^{p+1} \underset{k\to+\infty}{\to} \int_\Omega |u|^{p+1}$$

e dunque $u \neq 0$; se per assurdo $u \notin M$, allora $\widetilde{u} = \mu u \in M$ con $\mu = \dfrac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{2}{p-1}}}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}} < 1$ per l'inferiore semicontinuità debole della norma, ma allora

$$J(\widetilde{u}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\widetilde{u}|^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \mu^{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} =$$

$$= \mu^{p+1} \lim_{k \to +\infty} J(u_k) = \mu^{p+1} \inf_M J < \inf_M J$$

Definizione 20.
Sia H uno spazio di Hilbert, $M \subset H$ una sottovarietà di codimensione 1 e $a \in \mathbb{R}$. Si denota $J^a = \{u \in H : J(u) \leq a\}$ e $M^a = \{u \in M : J(u) \leq a\}$.

Definizione 21.
Sia H uno spazio di Hilbert e $M \subset H$ una sottovarietà di codimensione 1, $A \subset M$ e $\eta \in C(A, M)$ una mappa omotopa all'identità, cioè tale che esiste $H \in C([0,1] \times A, M)$ tale che $H(0,u) = u$ e $H(1,u) = \eta(u)$ per ogni $u \in A$. η è detta **deformazione** di A.

Esempio 6.

1. Se $M \subset \mathbb{R}^N$ è un'ipersuperficie compatta e $b \in \mathbb{R}$ non è un valore critico per J su M, allora per il teorema della funzione implicita l'insieme $\{p \in M : J(p) = b\}$ è una sottovarietà di dimensione 1 e dunque si può deformare M^b in $M^{b-\varepsilon}$ se ε è sufficientemente piccolo; se poi non ci sono punti critici in $[a,b]$, si può ripetere il procedimento per ogni $c \in [a,b]$ e dunque, per compattezza, si deforma M^b in M^a in un numero finito di passi; se ci sono livelli critici questo procedimento potrebbe non funzionare, ad esempio se $a < \inf\limits_M J$ allora $M^a = \emptyset$

2. Considerando il toro $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(2 - \sqrt{x^2+z^2}\right)^2 + y^2 = 1\right\}$ e la funzione altezza $J(x,y,z) = z$, M^0 è omeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ mentre M^{-2} è omeomorfo al disco chiuso $\mathbb{B}^1$, dunque si possono deformare uno nell'altro, e infatti c'è il punto critico $(0,0,-1)$ tra questi due valori.

3. Prendendo $H = \mathbb{R}$ e $J(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ si può notare che in mancanza di compattezza l'assenza di punti critici può non essere sufficiente a garantire l'esistenza di deformazioni: infatti, per $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, J^ε è sconnesso mentre $J^{-\varepsilon}$ è connesso e dunque non è possibile deformare uno nell'altro.

Lemma 23.
Sia H uno spazio di Hilbert, $W \in \mathrm{Lip}(H,H)$, $\alpha(t,u)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \alpha'(t,u) = W(\alpha(t,u)) \\ \alpha(0,u) = u \end{cases}$ e $\left(t_u^-, t_u^+\right)$ il suo intervallo massimale di esistenza.
Se $t_u^+ < +\infty$, allora $\alpha(t,u)$ non ha limite finito per $t \to +\infty$.

Dimostrazione.
Se per assurdo esistesse $\lim\limits_{t\to t_u^+}\alpha(t,u)=v$, allora il problema di Cauchy $\begin{cases}\beta'(t,u)=W(\alpha(t,v))\\ \beta\left(t_u^+,v\right)=v\end{cases}$ avrebbe un'unica soluzione in $\left(t_u^+-\varepsilon,t_u^++\varepsilon\right)$ per $\varepsilon>0$ sufficientemente piccolo,
e dunque $\widetilde{\alpha}(t,u)=\begin{cases}\alpha(t,u) & \text{se } t\in\left(t_u^-,t_u^+\right)\\ \beta(t,v) & \text{se } t\in\left[t_u^+,t_u^++\varepsilon\right)\end{cases}$ è una soluzione su $\left(t_u^-,t_u^++\varepsilon\right)$,
in contraddizione con la massimalità di t_u^+. $\square$

Osservazione 18.
Analogamente, se $t_u^->-\infty$, allora $\alpha(t,u)$ non ha limite finito per $t\to-\infty$.

Lemma 24.
Sia H uno spazio di Hilbert, $A\subset H$ chiuso, $W\in\mathrm{Lip}(H,H)$, $\alpha(t,u)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases}\alpha'(t,u)=W(\alpha(t,u))\\ \alpha(0,u)=u\end{cases}$ e $\left(t_u^-,t_u^+\right)$ il suo intervallo massimale di esistenza.
Se W è limitata su A e $u\in A$ è tale che $\alpha(t,u)\in A$ per ogni $t\in\left[0,t_u^+\right)$, allora $t_u^+=+\infty$.

Dimostrazione.
Se per assurdo fosse $t_u^+<+\infty$, allora per ogni successione $t_k\underset{k\to+\infty}{\to}t_u^+$ si avrebbe

$$\|\alpha(t_i,u)-\alpha(t_j,u)\|=\left|\int_{t_i}^{t_j}W(\alpha(s,u))ds\right|\leq\sup_A\|W\||t_i-t_j|$$

e dunque $\alpha(t_k,u)$ sarebbe di Cauchy e quindi ammetterebbe limite per $t\to t_u^+$, in contraddizione con il lemma 23. $\square$

Lezione 9 – 7/12/2011

Definizione 22.
Sia H uno spazio di Hilbert e $G\in C^{1,1}(H,\mathbb{R})$ tale che $G'(u)\neq0$ per ogni $u\in M=G^{-1}(\{0\})$ e $J\in C^{1,1}(H,\mathbb{R})$ e $\alpha(t,u)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases}\alpha'(t,u)=-\nabla_M J(\alpha(t,u))=-\left(J'(\alpha(t,u))-\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}G'(\alpha(t,u))\right)\\ \alpha(0,u)=u\end{cases}$.
α è detto **flusso di massima pendenza** di J su M.

Osservazione 19.
Se $u\in M$, allora il relativo flusso di massima pendenza $\alpha(t,u)$ appartiene a M; infatti,

$$\frac{d}{dt}G(\alpha(t,u))=\langle G'(\alpha(t,u)),W(\alpha(t,u))\rangle_H=$$

$$=\left\langle G'(\alpha(t,u)),-\left(J'(\alpha(t,u))-\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}G'(\alpha(t,u))\right)\right\rangle_H=$$

$$=-\langle G'(\alpha(t,u)),J'(\alpha(t,u))\rangle_H+$$

$$+\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}\langle G'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H=0$$

e dunque $G(\alpha(t,u))\equiv G(u)\equiv 0$

Lemma 25.
Sia H uno spazio di Hilbert e $G\in C^{1,1}(H,\mathbb{R})$ tale che $G'(u)\neq 0$ per ogni $u\in M=G^{-1}(\{0\})$, $J\in C^{1,1}(H,\mathbb{R})$ e $\alpha(t,u)$ il flusso di massima pendenza di J su M $\alpha(t,u)$.
Allora:

1. *$t\to J(\alpha(t,u))$ è non crescente per $t\in\left[0,t_u^+\right)$.*
2. *Per ogni $t,\tau\in\left[0,t_u^+\right)$ si ha $J(\alpha(t,u))-J(\alpha(\tau,u))=-\displaystyle\int_\tau^t\|\nabla_M J(\alpha(s,u))\|^2ds$.*
3. *Se J è limitato dal basso su M, allora $t_u^+=+\infty$ per ogni $u\in M$.*

Dimostrazione.

1.
$$\frac{d}{dt}J(\alpha(t,u))=\langle J'(\alpha(t,u)),W(\alpha(t,u))\rangle_H=$$
$$=\left\langle J'(\alpha(t,u)),-\left(J'(\alpha(t,u))-\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}G'(\alpha(t,u))\right)\right\rangle_H=$$
$$=\left\langle\left(J'(\alpha(t,u))-\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}G'(\alpha(t,u))\right),\right.$$
$$\left.-\left(J'(\alpha(t,u))-\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}G'(\alpha(t,u))\right)\right\rangle_H+$$
$$+\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}\left\langle G'(\alpha(t,u)),-\left(J'(\alpha(t,u))-\frac{\langle J'(\alpha(t,u)),G'(\alpha(t,u))\rangle_H}{\|G'(\alpha(t,u))\|^2}G'(\alpha(t,u))\right)\right\rangle_H=$$
$$=-\|\nabla_M J(\alpha(t,u))\|^2\leq 0$$

2.
$$J(\alpha(t,u))-J(\alpha(\tau,u))=\int_\tau^t\alpha'(s,u)ds-\int_\tau^t\|\nabla_M J(\alpha(s,u))\|^2ds$$

3. Se J è limitato dal basso, si ha
$$\int_0^t\|\nabla_M J(\alpha(s,u))\|^2ds=J(u)-J(\alpha(t,u))\leq J(u)-\inf_M J<+\infty$$
e dunque, se per assurdo fosse $t_u^+<+\infty$, allora per ogni successione $t_i\underset{i\to+\infty}{\nearrow}\to t_u^+$ si avrebbe
$$\|\alpha(t_i)-\alpha(t_j)\|\leq\int_{t_i}^{t_j}\|\nabla_M J(\alpha(s,u))\|ds\leq$$

$$\leq \sqrt{|t_i - t_j|}\sqrt{\int_{t_i}^{t_j} \|\nabla_M J(\alpha(s,u)\|^2 ds} \leq \sqrt{|t_i - t_j|}\sqrt{J(u) - \inf_M J}$$

e dunque $\alpha(t_i)$ sarebbe di Cauchy, in contraddizione con il lemma 23.

$\square$

Definizione 23.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H,\mathbb{R})$, $H_0 = \{u \in H : \nabla J(u) \neq 0\}$ e $V \in C^1(H_0, H)$ tale che $\|V(u)\| \leq 2\|J'(u)\|$ e $\langle J'(u), V(u)\rangle_H \geq \|J'(u)\|^2$ per ogni $u \in H_0$.
V è detto **campo vettoriale pseudo-gradiente**.

Osservazione 20.
Un campo vettoriale pseudo-gradiente si può definire nel seguente modo: preso $u \in H_0$, esiste $w(u)$ tale che $\|w(u)\| = 1$ e $\langle J'(u), w(u)\rangle_H > \frac{2}{3}\|J'(u)\|$, dunque ponendo $\widetilde{V}(u) = \frac{3}{2}\|\nabla J(u)\| w(u)$ si ha $\left\|\widetilde{V}(u)\right\| = \frac{3}{2}\|J'(u)\|$ e

$$\left\langle J'(u), \widetilde{V}(u)\right\rangle_H = \frac{3}{2}\|J'(u)\|\langle J'(u), w(u)\rangle_H > \|J'(u)\|^2$$

Per la continuità di J', esiste $r(u) > 0$ tale che $\left\|\widetilde{V}(u)\right\| < 2\|J'(z)\|$ e $\left\langle \widetilde{V}(u), J'(z)\right\rangle_H > \|J'(z)\|^2$ per ogni $z \in B_{r(u)}(u)$, dunque estraendo un sottoricoprimento finito da $\{B_{r(u)}(u)\}_{u \in H_0}$ la mappa $V(u) = \dfrac{\sum_{i=1}^n d\left(u_i, H \backslash B_{r(u_i)}(u_i)\right)\widetilde{V}(u_i)}{\sum_{j=1}^n d\left(u_j, H \backslash B_{r(u_j)}(u_j)\right)}$ ha le proprietà desiderate.

Osservazione 21.
Il flusso pseudo-gradiente ha le stesse proprietà del flusso di massima pendenza enunciate nel lemma 25.

Lemma 26.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1 e $J \in C^1(M,\mathbb{R})$ tale che $\|\nabla_M J\| \geq \delta$ su $M^{c+\delta} \backslash M^{c-\delta}$ per opportuni $c \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Allora esiste una deformazione η su M tale che $\eta(M^{c+\delta}) \subset M^{c-\delta}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, si può supporre J limitataìo dal basso, a meno di sostituirlo con $\hat{J} = h \circ J$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ strettamente crescente e limitato dal basso tale che $h(s) = s$ per ogni $s \geq c - \delta$, perché $J(u) \leq a \iff \hat{J}(u) \leq a$ per ogni $u \in M, a \geq c - \delta$; è sufficiente porre $\eta(u) = \alpha\left(\frac{2}{\delta}, u\right)$, dove α è un flusso di massima pendenza per uno pseudo-gradiente V di J; infatti, $(u,s) \to \eta(su)$ è una omotopia tra η e l'identità, e inoltre se esistesse $u \in M^{c+\delta}$ tale che $J(\eta(u)) > c - \delta$ allora per la decrescenza di J su M si ha $J(\alpha(t,u)) \in [c-\delta, c+\delta]$ per ogni $t \in \left[0, \frac{2}{\delta}\right]$, e dunque $\|\nabla_M J(\alpha(t,u))\| \geq \delta$ per ogni $t \in \left[0, \frac{2}{\delta}\right]$, pertanto

$$J(\eta(u)) - c - \delta \leq J\left(\alpha\left(\frac{2}{\delta}, u\right)\right) - J(\alpha(0,u)) =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{\delta}} \langle \nabla_M J(\alpha(s,u)), V(\alpha(s,u)) \rangle_H ds \leq - \int_0^{\frac{2}{\delta}} \|\nabla_M J(\alpha(s,u))\|^2 ds \leq -2\delta$$

cioè $J(\eta(u)) \leq c - \delta$, che è assurdo. $\square$

Definizione 24.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ e $u_k \in M$ tale che $J(u_k)$ è limitata e $\nabla_M J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$. u_k si dice **di Palais-Smale** o **PS**.
Se $J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} c$, allora u_k si dice **PS-c**.

Definizione 25.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1 e $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ tale che ogni successione di Palais-Smale ha un'estratta convergente.
Si dice che J **soddisfa la condizione di Palais-Smale** o che J è **PS**.
Se ogni successione PS-c ha un'estratta convergente, si dice che J è **PS-c**.

Osservazione 22.

1. Se J è PS-c e c'è una sottosuccessione convergente a u^*, allora per continuità $\nabla_M J(u^*) = 0$, dunque c'è almeno un punto critico; inoltre, l'insieme $Z_c := \{z \in M : J(z) = c, \nabla_M J(z) = 0\}$ è compatto.

2. Se $J \in C^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ è coercitivo e limitato dal basso allora vale PS-c, perché se $J(u_k)$ è limitato allora lo è anche u_k e dunque converge a meno di estratte, ma in dimensione infinita questo non è vero; infatti, prendendo $g(s) \in C^\infty([0, +\infty), \mathbb{R})$ tale che $g(s) = 0$ per $s \in [0, 2]$ e $g(s) = s$ per $s \geq 3$, allora $J(u) = g(\|u\|)$ è limitata dal basso e coercitiva, ma ogni successione che verifica $\|u_k\| = 1$ è PS-0, anche se non ha estratte convergenti; inoltre, in dimensione finita la coercitività è essenziale: prendendo $J(u) = \dfrac{u}{u^2+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ogni successione con $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ è PS-0 ma non converge.

Lezione 10 – 7/12/2011

Lemma 27.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ non critico per J tale che J è PS-c.
Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|\nabla_M J\| \geq \delta$ su $M^{c+\delta} \setminus M^{c-\delta}$.

Dimostrazione.
Se $u_k \in M$ è tale che $J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} c$ e $\nabla_M J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, allora essendo J PS-c si avrà $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u^*$ a meno di estratte, dunque per continuità si ha $J(u^*) = 0$ e $\nabla_M J(u^*) = 0$, che è assurdo. $\square$

Lemma 28.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che J è PS-c.
Allora esiste $\delta > 0$ e una deformazione η su M tale che $\eta(M^{c+\delta}) \subset M^{c-\delta}$.

Dimostrazione.
Per il lemma 27 esiste $\delta > 0$ tale che $\|\nabla_M J\| \geq \delta$ su $M^{c+\delta} \backslash M^{c-\delta}$, dunque si può applicare il lemma 26 per ottenere l'esistenza della deformazione. $\square$

Lemma 29.
Siano $a < b \in \mathbb{R}$, M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ non critico per J tale che J non ha livelli critici in $[a, b]$ ed è PS-c per ogni $c \in [a, b]$.
Allora esiste una deformazione η tale che $\eta(M^b) \subset M^a$.

Dimostrazione.
Per ogni $c \in [a, b]$ si può applicare il lemma 28 ed estrarre un sottoricoprimento finito da $\{[c - \delta(c), c + \delta(c)]\}_{c \in [a,b]}$; allora $\|\nabla_m J\| \geq \widetilde{\delta} := \min\{\delta(c_1), \ldots, \delta(c_n)\} > 0$ su $M^b \backslash M^a$; a questo punto è sufficiente considerare il flusso pseudo-gradiente e ragionare come nel lemma 26 con $\dfrac{b-a}{\widetilde{\delta}^2}$ al posto di $\dfrac{2}{\delta}$. $\square$

Teorema 30.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sua sottovarietà C^1 di codimensione 1 e $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ limitato dal basso e PS-$\inf\limits_M J$.
Allora $\inf\limits_M J$ è raggiunto.

Dimostrazione.
Se u_k è una successione minimizzante per J, allora dev'essere $\nabla_M J(u_k) \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, perché altrimenti esisterebbe una deformazione tra $M^{\inf_M J + \delta}$ e $M^{\inf_M J - \delta} = \emptyset$; dunque, u_k è PS-$\inf\limits_M J$ e quindi converge a meno di estratte a $z \in M$ e dunque per continuità $J(z) = \inf\limits_M J$ e $\nabla_M J(z) = 0$, cioè $\inf\limits_M J$ è raggiunto. $\square$

Lemma 31.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato regolare e $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $\max\{|f(u)|, |uf'(u)|, \} \leq a_1 + a_2|u|^p$ per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$ e inoltre, posta $h(u) = \dfrac{f(u)}{u}$, si abbia

$$\begin{cases} h(su) \leq s^\alpha h(u) \text{ per qualche } \alpha > 0, \text{ per ogni } s \in (0,1) \\ uh'(u) > 0 \\ h(0) = 0 \\ h(u) \underset{u \to +\infty}{\to} +\infty \end{cases}.$$

$J(u) = \dfrac{\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2} - \displaystyle\int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$ *e* $M = \left\{u \in H^1_0(\Omega) \backslash \{0\} : \langle J'(u), u\rangle_{H^1_0(\Omega)} = 0\right\}$.
Allora:

1. $M \neq \emptyset$.

2. *Esiste $\rho > 0$ tale che $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \rho$ per ogni $u \in M$.*

3. *$\langle J''(u)u, u\rangle_{H_0^1(\Omega)} < 0$ per ogni $u \in M$.*

4. *M è un vincolo naturale per J.*

Dimostrazione.

1. Posto $G(u) = \langle J'(u), u\rangle_{H_0^1(\Omega)}$, per ogni $0 < u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ con $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ si ha $G(tu) = t^2 - t^2 \displaystyle\int_\Omega u^2 h(tu)$, dunque $\dfrac{G(tu)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$ e $\dfrac{G(tu)}{t^2} \underset{t\to 0}{\to} 1$, dunque esiste $t(u)$ tale che $\dfrac{G(t(u)u)}{t(u)^2} = 0$, cioè $t(u)u \in M$.

2. È sufficiente mostrare che per $\|u\|$ sufficientemente piccola si ha $G(u) > 0$, ma essendo $G(u) = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \displaystyle\int_\Omega u^2 h(u)$ basterà far vedere che $\Psi(u) := \displaystyle\int_\Omega u^2 h(u) = o\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)$; posto $A_1 := \left\{x \in \Omega : |u(x)| \leq \sqrt{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}\right\}$, si ha

$$\sqrt{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}|\Omega\backslash A_1| \leq \int_{\Omega\backslash A_1} |u| \leq C_\Omega \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

quindi $|\Omega\backslash A_1| \leq \sqrt{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$; dunque,

$$\int_\Omega u^2 h(u) = \int_{A_1} u^2 h(u) + \int_{\Omega\backslash A_1} u^2 h(u) = o(1)\int_\Omega u^2 + \int_{\Omega\backslash A_1} u f(u) \leq$$

$$\leq o\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) + \int_{\Omega\backslash A_1}\left(a_3 u^2 + a_4|u|^{p+1}\right) \leq$$

$$\leq o\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) + \widetilde{C}_\Omega \|u\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)} + a_3 \int_{\Omega\backslash A_1} u^2 \leq$$

$$\leq o\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) + a_3 \left(\int_{\Omega\backslash A_1} |u|^q\right)^{\frac{2}{q}} |\Omega\backslash A_1|^{\frac{q-2}{q}} \leq$$

$$\leq o\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) + C\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{q-2}{2q}}_{H_0^1(\Omega)} = o\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)$$

3. Per ogni $u \in M$ si ha

$$\langle G'(u), u\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 2\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \langle \Psi'(u), u\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= 2\Psi(u) - \langle \Psi'(u), u\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 2\int_\Omega u f(u) - \left(\int_\Omega u f(u) + \int_\Omega u^2 f'(u)\right) =$$

$$= \int_\Omega u^2 h(u) - \int_\Omega u^2(h(u) + u h'(u)) = -\int_\Omega u^3 h'(u) < 0$$

4. Posti $\Phi(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$ e $\widetilde{J}(u) = \dfrac{\Psi(u)}{2} - \Phi(u)$, si ha $\widetilde{J}|_M = J|_M$, dunque basterà mostrare che se $\nabla_M \widetilde{J}(u) = 0$ allora $J'(u) = 0$:

$$\lambda\langle G'(z), z\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \widetilde{J}'(z), z\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \frac{\langle \Psi'(z), z\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \langle \Phi'(z), z\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \frac{\langle \Psi'(z), z\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \Psi(z) = -\frac{\langle G'(z), z\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{2}$$

ma essendo $\langle G'(z), z\rangle_{H_0^1(\Omega)} < 0$, si deve avere$\lambda = -\dfrac{1}{2}$, dunque

$$\frac{\Psi'(z)}{2} - \Phi'(z) = \widetilde{J}'(z) = -\frac{G'(z)}{2} = -z + \frac{\Psi'(z)}{2}$$

e cioè $J'(z) = z - \Phi'(z) = 0$.

$\square$

Lezione 11 – 14/12/2011

Lemma 32.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato regolare e $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $\max\{|f(u)|, |uf'(u)|,\} \le a_1 + a_2|u|^p$ per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$ e inoltre, posta $h(u) = \dfrac{f(u)}{u}$, si abbia

$$\begin{cases} h(su) \le s^\alpha h(u) \text{ per qualche } \alpha > 0, \text{ per ogni } s \in (0,1) \\ uh'(u) > 0 \\ h(0) = 0 \\ h(u) \underset{u\to+\infty}{\to} +\infty \end{cases}.$$

Allora, posti $J(u) = \dfrac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$, $\widetilde{J}(u) = \dfrac{\int_\Omega uf(u)}{2} - \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$ e $M = \left\{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \langle J'(u), u\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0\right\}$:

1. *$\widetilde{J}(u) \ge C(\alpha)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0$ per ogni $u \in M$.*

2. *Se $\{u_k\}$ è PS-c per $\widetilde{J}$ su M allora è limitata, $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} \overline{u} \ne 0$ e $\left\|\widetilde{J}(u_k)\right\|_{H_0^1(\Omega)} \ge K(c) > 0$.*

3. *$\widetilde{J}$ è PS-c per ogni $c > 0$*

Dimostrazione.

1.
$$\widetilde{J}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega uf(u) - \int_0^1 ds \int_\Omega uf(su) =$$

$$= \int_0^1 ds \int_\Omega su^2(h(u) - h(su)) \ge$$

$$\geq \int_0^1 ds \int_\Omega su^2 \left(1 - s^\alpha\right) u^2 h(u) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2}\right) \int_\Omega u^2 h(u) = C(\alpha) \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

2. Dal punto precedente, $\|u_k\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \sqrt{\dfrac{\widetilde{J}(u_k)}{C(\alpha)}} \leq \sqrt{\dfrac{c+\varepsilon}{C(\alpha)}}$ e quindi converge debolmente a meno di estratte, inoltre dal lemma 31 si ha $\displaystyle\int_\Omega u_k^2 h(u_k) = \|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} \geq \rho^2 > 0$ e dunque, per la continuità debole del funzionale integrale, $\displaystyle\int_\Omega \overline{u}^2 h(\overline{u}) =\geq \rho^2 > 0$ e cioè $\overline{u} \neq 0$; infine, se per assurdo fosse, a meno di estratte, $\widetilde{J}'(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, allora per la compattezza di $\widetilde{J}'$ dev'essere $\widetilde{J}'(\overline{u}) = 0$ e dunque

$$0 = \langle \widetilde{J}'(\overline{u}), \overline{u} \rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega \overline{u}^3 h(\overline{u}) \neq 0$$

3. Se $u_k \in M$ è tale che $J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} c$ e

$$\widetilde{J}'(u_k) - \frac{\left\langle \widetilde{J}'(u_k), G'(u_k) \right\rangle_{H^1_0(\Omega)}}{\|G'(u_k)\|^2_{H^1_0(\Omega)}} G'(u_k) = \nabla_M J'(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

dove $G(u) = \langle J'(u), u \rangle_{H^1_0(\Omega)}$, allora essendo $\left\|\widetilde{J}'(u_k)\right\|_{H^1_0(\Omega)} \geq K(c) > 0$ e, per le immersioni di Sobolev, $\|G'(u_k)\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C$, dev'essere $\left| \dfrac{\left\langle \widetilde{J}'(u_k), G'(u_k) \right\rangle_{H^1_0(\Omega)}}{\|G'(u_k)\|^2_{H^1_0(\Omega)}} \right| \geq \alpha^* > 0$, dunque

$$u_k = \frac{G'(u_k)}{2} - \int_\Omega \left(f(u_k) + u_k f'(u_k)\right) =$$

$$= \frac{\|G'(u_k)\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2\left\langle \widetilde{J}'(u_k), G'(u_k) \right\rangle_{H^1_0(\Omega)}} \left(\widetilde{J}'(u_k) - \nabla_M J(u_k)\right) - \int_\Omega \left(f(u_k) + u_k f'(u_k)\right)$$

converge, a meno di estratte, perché gli operatori che compaiono nel termine di destra sono compatti.

□

Teorema 33.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato regolare e $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $\max\left\{|f(u)|, |uf'(u)|\right\} \leq a_1 + a_2|u|^p$ per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$ e inoltre, posta $h(u) = \dfrac{f(u)}{u}$, si abbia

$$\begin{cases} h(su) \leq s^\alpha h(u) \text{ per qualche } \alpha > 0, \text{ per ogni } s \in (0,1) \\ uh'(u) > 0 \\ h(0) = 0 \\ h(u) \underset{u \to +\infty}{\to} +\infty \end{cases}.$$

Allora l'equazione $-\Delta u = f(u)$ ha una soluzione non banale $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione.
Posto $J(u) = \dfrac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \displaystyle\int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$, dai lemmi 31 e 32 il funzionale $\widetilde{J}(u) = \dfrac{\int_\Omega uf(u)}{2} - \displaystyle\int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$ è PS-$\inf_M J$ su $M = \left\{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \langle J'(u), u\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0\right\}$, perché $\inf_M J \geq \inf_{u \in M} C(\alpha)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq C(\alpha)\rho^2 > 0$, dunque esiste $0 \neq z \in M$ che soddisfa $\nabla_M \widetilde{J}(z) = 0$ e cioè, per il lemma 31, $J'(z) = 0$, dunque $-\Delta z = f(z)$.
□

Osservazione 23.
Ripetendo il ragionamento con $f^+ = \max\{f, 0\}$ e applicando il principio del massimo si ottiene l'esistenza di una soluzione positiva

Definizione 26.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ tale che $J(0) = 0$, $J|_{S_r(0)} \geq \rho$ per opportuni $r, \rho > 0$ ed esiste e in H con $\|e\| \geq r$ e $J(e) \leq 0$,

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

e $c := \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{[0,1]} J \circ \gamma$.
c è detto **livello critico del passo di montagna**.
I punti dell'insieme $Z_c = \{v \in H : J(v) = c, J'(v) = 0\}$ sono detti **punti critici del passo di montagna**.
Un funzionale che verifica quelle condizioni **ha la struttura (o geometria) del passo di montagna**.

Osservazione 24.
Poiché ogni $\gamma \in \Gamma$ interseca $S_r(0)$, si avrà $c \geq \rho > 0$.

Lemma 34.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ non critico per J tale che valga PS-c.
Allora esiste $\delta \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$ e una deformazione η tale che $\eta\left(J^{c+\delta}\right) \subset J^{c-\delta}$ e $\eta|_{J^{c-2\delta}} = \mathrm{Id}$.

Dimostrazione.
Per il lemma 27 esiste $\delta > 0$ tale che $\|J'\| \geq \delta$ su $J^{c+\delta}\backslash J^{c-\delta}$, quindi se X è un campo vettoriale pseudo-gradiente per J, $b(s) = \min\left\{1, \dfrac{1}{s}\right\} \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ e

$$g(u) = \frac{d\left(u, J^{-1}([c-\delta, c+\delta])\right)}{d\left(u, J^{-1}([c-\delta, c+\delta])\right) + d\left(u, J^{-1}((-\infty, c-2\delta] \cup [c+2\delta, +\infty))\right)}$$

allora $\widetilde{W}(u) = -g(u)b(\|X(u)\|)X(u) \in C^{0,1}(H,H)$, dunque il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{\alpha}(t,u) = W(\alpha(t,u)) \\ \alpha(0,u) = u \end{cases}$ ha un'unica soluzione, definita per tutti i tempi grazie alla limitatezza di W; mostriamo che $\eta(u) = \alpha\left(\frac{2}{\delta}, u\right)$ ha le proprietà richieste: per la costruzione di g, $\eta|_{J^{c-2\delta}} = \mathrm{Id}$, inoltre se per qssurdo esistesse $u \in H$ con $J(u) \leq c + \delta$ e $J(\eta(u)) > c - \delta$, allora, prendendo $\delta \leq \frac{1}{2}$,

$$J(\eta(u)) = J(u) + \int_0^{\frac{2}{\delta}} \frac{d}{dt} J(\alpha(t,u))dt =$$

$$= J(u) - \int_0^{\frac{2}{\delta}} g(\alpha(t,u))b(\|X(\alpha(t,u))\|)\langle X(\alpha(t,u)), J'(\alpha(t,u))\rangle_H dt \leq$$

$$\leq c + \delta - \int_0^{\frac{2}{\delta}} g(\alpha(t,u))b(\|X(\alpha(t,u))\|)\|J'(\alpha(t,u))\|^2 dt \leq$$

$$\leq c + \delta - \int_0^{\frac{2}{\delta}} b(\|2J'(\alpha(t,u))\|)\|J'(\alpha(t,u))\|^2 dt \leq$$

$$\leq c + \delta - \int_0^{\frac{2}{\delta}} \delta^2 b(2\delta) = c - \delta$$

che è assurdo. $\square$

Lezione 12 – 15/12/2011

Teorema 35 (Passo di Montagna)**.**
Sia $J \in C^1(H,\mathbb{R})$ un funzionale con la geometria del passo di montagna tale che valga PS-c, dove c è il suo livello critico del passo di montagna .
Allora, c è un valore critico per J.

Dimostrazione.
Se per assurdo c non fosse critico, allora applicando il lemma 34 e scegliendo $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tale che $\sup\limits_{[0,1]} J \circ \gamma \leq c + \delta$, si ha $\eta \circ \overline{\gamma} \in \Gamma$, perché $0, e \in J^{c-2\delta}$, e $\sup\limits_{[0,1]} J \circ (\eta \circ \overline{\gamma}) \leq c - \delta$, che contraddice la definizione di c. $\square$

Osservazione 25.
È fondamentale che valga PS-c: infatti, prendendo $J(x,y) = x^2 + (1-x)^3y^2$, si ha $J|_{S_{\frac{1}{2}}(0)} \geq \frac{1}{9}$ e $J(0,0) = 0 = J(2,2)$, ma l'unico punto critico è l'origine.

Esempio 7.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory con $f(x,0) = 0$, $|f(\cdot,s)| \leq a + b|s|^p$ per opportuni $a, b > 0, p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$, $\frac{f(\cdot,u)}{u} \underset{u\to 0}{\to} \lambda < \lambda_1(\Omega)$

uniformemente in x e $0\int_0^u f(x,s)ds \leq \theta u f(x,u)$ per $\theta \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, $|u| \geq r > 0$, allora l'equazione $-\Delta u = f(\cdot, u)$ ha una soluzione non banale.
Infatti, il funzionale associato $J(u) = \frac{\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2} - \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(x,s)ds$ verifica la geometria del passo di montagna: dal limite per $u \to 0$ e dalla limitazione di crescita si ottiene $\int_0^u f(x,s)ds \leq \frac{\lambda + \lambda_1(\Omega)}{4}u^2 + A|u|^{p+1}$ e quindi, per $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ sufficientemente piccolo,

$$J(u) \geq \frac{\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{2} - \frac{\lambda + \lambda_1(\Omega)}{4}\int_\Omega u^2 - A\int_\Omega |u|^{p+1} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_1(\Omega) - \lambda}{4\lambda_1(\Omega)}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - AC_{\Omega,p}\|u\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)} \geq \frac{\lambda_1(\Omega) - \lambda}{8\lambda_1(\Omega)}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

mentre $J(0) = 0$ e, poiché dall'ultima condizione su f segue $f(x,u) \geq Cu^{\frac{1}{\theta}-1} - B$, prendendo $0 < \widetilde{e} \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ si ottiene $J(t\widetilde{e}) \leq \frac{t^2}{2}\|\widetilde{e}\|^2_{H^1_0(\Omega)} - Ct^{\frac{1}{\theta}}\int_\Omega |\widetilde{e}|^{\frac{1}{\theta}} + B|\Omega| \underset{t \to +\infty}{\to} -\infty$ e dunque $J(t\widetilde{e}) \leq 0$ per t sufficientemente grande.
Infine, vale PS, e dunque si può applicare il teorema 35: se u_k è PS, allora

$$\int_\Omega dx \int_0^{u_k(x)} f(x,s)ds =$$

$$= \int_{\{x\in\Omega: u_k(x)\leq r\}} dx \int_0^{u_k(x)} f(x,s)ds + \int_{\{x\in\Omega: u_k(x)> r\}} dx \int_0^{u_k(x)} f(x,s)ds \leq$$

$$\leq \int_{\{x\in\Omega: u_k(x)\leq r\}} dx \int_0^{u_k(x)} f(x,s)ds + \theta\int_{\{x\in\Omega: u_k(x)> r\}} u_k(x)f(x,u_k(x))dx \leq$$

$$\leq A + \theta\int_\Omega u_k f(\cdot, u_k)$$

e inoltre

$$\left|\|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega u_k f(\cdot,u_k)\right| = \left|\langle J'(u_k), u_k\rangle_{H^1_0(\Omega)}\right| \leq \|J'(u_k)\|_{H^1_0(\Omega)}\|u_k\|_{H^1_0(\Omega)}$$

dunque

$$\|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} = 2J(u_k) + 2\int_\Omega dx \int_0^{u_k(x)} f(x,s)ds \leq \widetilde{A} + 2\theta\int_\Omega u_k f(u_k) \leq$$

$$\leq \widetilde{A} + 2\theta\|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} + 2\theta\|J'(u_k)\|_{H^1_0(\Omega)}\|u_k\|_{H^1_0(\Omega)}$$

e quindi, essendo $2\theta < 1$, u_k è limitata e, a meno di estratte, converge debolmente a $\overline{u}$, ma poiché $u_k = J'(u_k) + \int_\Omega f(\cdot, u_k) = o(1) + \int_\Omega f(\cdot,u_k)$ e quest'ultimo operatore è compatto, la convergenza è forte; come prima, se $f(x,u(x)) \geq 0$ per $u(x) > 0$, allora applicando il principio del massimo si ottiene una soluzione positiva.

Lezione 13 – 16/12/2011

Definizione 27.
Sia H uno spazio di Hilbert, $N \subset H$ una varietà con bordo, $C \subset H$ e

$$\mathcal{H} := \{h \in C(N, H) : h(u) = u \forall u \in \partial N\}$$

tali che $h(N) \cap C$ per ogni $h \in \mathcal{H}$.
Si dice che C e ∂N **formano un link**.

Esempio 8.

1. Se $\|e\| > R$, $N = [0, e]$ e $C = S_R(0)$ formano un link.
2. Se $H = V \oplus W$ con V, W chiusi e ortogonali e $\dim V < +\infty$, allora

   $$N := \{v + se : v \in V, \|v\| \leq R, s \in [0, 1]$$

   e $C := \{w \in W : \|w\| \leq R\}$ formano un link se $e \in W, \|e\| > r$; infatti, se $P : N \to V$ è la proiezione ortogonale, per ogni $h \in \mathcal{H}$ poniamo $\widetilde{h} : u \to Ph(u) + (\|h(u) - Ph(u)\| - r)e$: per mostrare che esiste $h(u^*) \in h(N) \cap C$, cioè $\|h(u^*)\| = r$, sarà sufficiente trovare uno zero di $\widetilde{h}$; essendo $h \in \mathcal{H}$, per ogni $u = v + se \in \partial N$ si ha $\widetilde{h}(u) = v + (s\|e\| - r) \neq 0$ e dunque è ben definito $\deg\left(\widetilde{h}, \overset{\circ}{N}, 0\right) = \deg\left(\hat{h}, \overset{\circ}{N}, 0\right)$ per ogni $\hat{h} \in C(N, N + \mathrm{Span}\{e\})$ tale che $\widetilde{h}|_{\partial N} = \hat{h}|_{\partial N}$, in particolare prendendo $\hat{f}(v + se) = v + (s\|e\| - r)e$ si ottiene $\deg\left(\widetilde{h}, \overset{\circ}{N}, 0\right) = \deg\left(\hat{h}, \overset{\circ}{N}, 0\right) = 1$, e dunque $\widetilde{h}$ ha almeno uno zero.
3. Prendendo V, W come sopra, anche $N = \{v \in V : \|v\| \leq r\}$ e $C = W$ formano un link, come si può vedere in maniera analoga al caso precedente, considerando per ogni $\widetilde{h} = P \circ h$.

Definizione 28.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$, $N \subset E$ una varietà con bordo, $C \subset E$ tale che ∂N e C formano un link e $\inf\limits_C J > \sup\limits_{\partial N} J$ e $c = \inf\limits_{h \in \mathcal{H}} \sup\limits_N J \circ h$.
c è detto **livello di linking**.

Lemma 36.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$, $N \subset E$ una varietà con bordo, $C \subset E$ tale che ∂N e C formano un link e $\inf\limits_C J > \sup\limits_{\partial N} J$, e c il livello di linking. Allora $c \geq \inf\limits_C J$.

Dimostrazione.
Per ogni $h \in H$ si ha $C \cap h(N) \neq \emptyset$, dunque $\sup\limits_N J \circ h \geq \sup\limits_{C \cap h(N)} J \geq \inf\limits_C J$ e quindi, per l'arbitrarietà di h, $c = \inf\limits_{h \in \mathcal{H}} \sup\limits_N J \circ h \geq \inf\limits_C J$. $\square$

Teorema 37.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$, $N \subset E$ una varietà con bordo, $C \subset E$ tale che ∂N e C formano un link e $\inf_C J > \sup_{\partial N} J$, e c il livello di linking tale che J è PS-c.
Allora c è critico per J.

Dimostrazione.
Se per assurdo c non fosse critico, per il lemma 34 esisterebbe $\delta \in \left(0, \frac{c - \sup_{\partial N} J}{2}\right)$ e una deformazione η tale che $\eta\left(J^{c+\delta}\right) \subset J^{c-\delta}$ e $\eta(u) = u$ per ogni $u \in J^{c-2\delta}$, ma se $u \in \partial N$ allora $J(u) \leq \sup_{\partial N} J < c - 2\delta$ e dunque $\eta \circ h \in \mathcal{H}$ per ogni $h \in \mathcal{H}$, e quindi esiste $\overline{h} \in \mathcal{H}$ tale che $\sup_N J \circ \overline{h} < c + \delta$, ma allora $\sup_N J \circ (\eta \circ \overline{h}) \leq c - \delta$, che è assurdo. $\square$

Osservazione 26.
Il teorema del Passo di Montagna è in realtà un caso particolare del teorema 37, come si deduce dal primo punto dell'ultima osservazione.

Teorema 38 (Linking)**.**
Sia $H = V \oplus W$ uno spazio di Hilbert con V, W chiusi e ortogonali e $\dim V < +\infty$, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ tale che $J(u) \geq \rho$ per ogni $u \in W$ con $\|w\| = r$ per opportuni $r, \rho > 0$ e, scegliendo opportunamente $e \in W$ con $\|e\| > r$, posto $N = \{v + te; v \in V, \|v\| \leq R, t \in [0, 1]\}$ si ha $\sup_{\partial N} J \leq 0$, e c il livello di linking tra ∂N e $C = \{w \in W : \|w\| \leq R\}$ tale che J è PS-c.
Allora, c è critico per J.

Dimostrazione.
Segue dal fatto che ∂N e C formano un link e dal teorema 37. $\square$

Teorema 39 (Sella)**.**
Sia $H = V \oplus W$ uno spazio di Hilbert con V, W chiusi e ortogonali e $\dim V < +\infty$, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ tale che $J(u) \geq \rho$ per ogni $u \in W$ per un opportuno $\rho > 0$ e $J(v) \leq \beta$ per ogni $v \in V$ con $\|v\| \leq r$ per opportuni $r > 0$, $\beta < \rho$, e c il livello di linking tra $N = \{v \in V : \|v\| \leq r\}$ e $C = W$ tale che J è PS-c.
Allora, c è critico per J.

Dimostrazione.
Segue dal fatto che N e C formano un link e dal teorema 37. $\square$

Lezione 14 – 21/12/2011

Esempio 9.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Carathéodory è tale

che $|f(x,s)| \leq a + b|s|^p$ per $a, b > 0, p \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$, $\dfrac{f(x,u)}{u} \underset{u \to 0}{\to} \lambda \in \mathbb{R}$ uniformemente in x e $0 < \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds \leq \theta u f(x,u)$ per $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $|u| \geq r > 0$, allora esiste una soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ di $-\Delta u = f(u)$.
Infatti, se $\lambda < \lambda_1(\Omega)$ è stato già dimostrato applicando il teorema di Passo di Montagna 35, viceversa se $\lambda_k(\Omega) \leq \lambda < \lambda_{k+1}(\Omega)$ si può applicare il teorema di Linking 38 prendendo $V = \operatorname{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ e $V = W^\perp$: dalle condizioni su f si ricava che $\left|\displaystyle\int_0^u f(x,s)ds - \frac{\lambda}{2}u^2\right| \leq \dfrac{\lambda_{k+1}(\Omega) - \lambda}{4}u^2 + A|u|^{p+1}$, dunque per ogni $w \in W$ con $\|w\| = r$ sufficientemente piccolo si ha

$$J(w) = \frac{\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \int_\Omega dx \int_0^{w(x)} f(x,s)ds \geq$$

$$\geq \frac{\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega w^2 - \frac{\lambda_{k+1}(\Omega) - \lambda}{4}\int_\Omega w^2 - A\int_\Omega |w|^{p+1} \geq$$

$$\geq \frac{\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_{k+1}(\Omega)}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda_{k+1}(\Omega) - \lambda}{4\lambda_{k+1}(\Omega)}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} - A\int_\Omega |w|^{p+1} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_{k+1}(\Omega) - \lambda}{4\lambda_{k+1}(\Omega)}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\|w\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)} \geq \frac{\lambda_{k+1}(\Omega) - \lambda}{8\lambda_{k+1}(\Omega)}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Inoltre, dalla condizione di crescita su f si ricava che $f(x,u) \geq Cu^{\frac{1}{\theta}-1} - B$, dunque prendendo $e \in W$ con $\|e\|_{H_0^1(\Omega)} = R$, per ogni $\widetilde{v} \in N + \operatorname{Span}\{e\}$ con $\|\widetilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ si ottiene

$$J(R\widetilde{v}) = \frac{R^2}{2} - \int_\Omega dx \int_0^{R\widetilde{v}(x)} f(x,s)ds \leq$$

$$\leq \frac{R^2}{2} - CR^{\frac{1}{\theta}}\int_\Omega |\widetilde{v}|^{\frac{1}{\theta}} + B|\Omega| \underset{R \to +\infty}{\to} -\infty$$

e il limite è uniforme in $\widetilde{v}$ perchè $\dim(N + \operatorname{Span}\{e\}) = k + 1 < +\infty$, dunque prendendo R sufficientemente grande si ha $J(v + te) \leq 0$ se $\|v + te\|_{H_0^1(\Omega)} = R$, e dunque $J|_{\partial N \setminus V} \leq 0$; se $v \in V$ invece, supponendo per semplicità $f(x,u) = \lambda u + |u|^{p-1}u$, si ricava

$$J(v) = \frac{\|\widetilde{v}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega v^2 - \frac{\int_\Omega |\widetilde{v}|^{p+1}}{p+1} \leq$$

$$\leq \frac{\|\widetilde{v}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_k(\Omega)}\|\widetilde{v}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\int_\Omega |\widetilde{v}|^{p+1}}{p+1} \leq 0$$

Infine, la dimostrazione che vale PS-c è analoga a quella del teorema del Passo di Montagna 35.

Lezione 15 – 11/1/2012

Teorema 40 (Identità di Pohožaev)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato regolare,* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *che verifica* $-\Delta u = f(u)$*.*
Allora

$$N \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f - \frac{N-2}{2} \int_\Omega u(x) f(u(x)) dx = \frac{\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u(x))^2 \langle x, \nu(x) \rangle d\sigma(x)}{2}$$

Dimostrazione.
Poiché $\partial\Omega$ è un insieme di livello per u, allora $\nabla u(x) = \partial_\nu u(x) \nu(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$, dunque

$$\langle \langle x, \nabla u(x) \rangle \nabla u(x), \nu(x) \rangle = \langle \langle x, \partial_\nu u(x) \nu(x) \rangle \partial_\nu u(x) \nu(x), \nu(x) \rangle =$$

$$= \partial_\nu u(x) \langle x, \partial_\nu u(x) \nu(x) \rangle = (\partial_\nu u(x))^2 \langle x, \nu(x) \rangle$$

e

$$\left\langle \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{2} x, \nu(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\|\partial_\nu u(x) \nu(x)\|^2}{2} x, \nu(x) \right\rangle = \frac{(\partial_\nu u(x))^2 \langle x, \nu(x) \rangle}{2}$$

inoltre

$$\operatorname{div} \left(\langle x, \nabla u(x) \rangle \nabla u(x) - \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{2} x \right) =$$

$$= \langle x, \nabla u(x) \rangle \Delta u(x) + \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u(x) \partial_{x_k} \left(\sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} u(x) \right) -$$

$$- \left(\frac{N}{2} \|\nabla u(x)\|^2 + \frac{\sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} \|\nabla u(x)\|^2}{2} \right) =$$

$$= \langle x, \nabla u(x) \rangle \Delta u(x) + \sum_{i,k=1}^N \partial_{x_k} u(x) \left(\delta_{i,k} \partial_{x_i} u(x) + x_i \partial^2_{x_i x_k} u(x) \right) -$$

$$- \frac{N}{2} \|\nabla u(x)\|^2 - \frac{\sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} \|\nabla u(x)\|^2}{2} =$$

$$= \langle x, \nabla u(x) \rangle \Delta u(x) + \sum_{k=1}^N (\partial_{x_k} u(x))^2 + \sum_{i=1}^N x_i \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u(x) \partial_{x_i x_k} u(x) -$$

$$- \frac{N}{2} \|\nabla u(x)\|^2 - \frac{\sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} \|\nabla u(x)\|^2}{2} =$$

$$= \langle x, \nabla u(x) \rangle \Delta u(x) - \left(\frac{N-2}{2} \right) \|\nabla u(x)\|^2$$

mentre

$$\int_\Omega dx \Delta u(x)\langle x, \nabla u(x)\rangle = -\int_\Omega dx f(u(x)) \sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} u(x) =$$

$$= -\int_\Omega dx \sum_{i=1}^N x_i \partial_{x_i} \int_0^{u(x)} f = N \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f$$

ove l'ultimo passaggio segue integrando per parti; infine, applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$N \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f - \frac{N-2}{2} \int_\Omega u(x) f(u(x)) dx =$$

$$= \int_\Omega \nabla u(x)\langle x, \nabla u(x)\rangle dx - \frac{N-2}{2} \int_\Omega dx \|\nabla u(x)\|^2 =$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\langle x, \nabla u(x)\rangle \nabla u(x) - \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{2} x\right) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\langle \langle x, \nabla u(x)\rangle \nabla u(x) - \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{2} x, \nu(x)\right\rangle d\sigma(x) =$$

$$= \frac{\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u(x))^2 \langle x, \nu(x)\rangle d\sigma(x)}{2}$$

□

Corollario 41.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato regolare stellato rispetto a* 0 *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *una soluzione di* $-\Delta u = |u|^{p-1} u$ *per* $p \geq \frac{N+2}{N-2}$.
Allora $u \equiv 0$.

Dimostrazione.
Essendo Ω stellato rispetto a 0, $\langle x, \nu(x)\rangle \geq 0$, dunque se fosse $u \not\equiv 0$ dall'identità di Pohožaev 40 si otterrebbe

$$0 > \left(\frac{N}{p+1} - \frac{N-2}{2}\right) \int_\Omega dx |u(x)|^{p+1} = \frac{\int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u(x)) \langle x, \nu(x)\rangle d\sigma(x)}{2} \geq 0$$

e quindi dev'essere $u \equiv 0$. □

Definizione 29.
Sia M uno spazio topologico e $A \subset M$ tale che l'inclusione $i : A \hookrightarrow M$ è omotopa a una mappa costante in M, ovvero esiste $p \in M$ e $H \in C([0,1] \times A, M)$ tale che $H(0,u) = u$ e $H(1,u) = p$ per ogni $u \in A$.
A si dice **contraibile in M**.

Definizione 30.
Sia M uno spazio topologico e $A \subset M$.
La **categoria di Lusternik-Schnirelmann** di A rispetto a M è

$$\operatorname{cat}(A, M) := \inf \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists A_1, \dots, A_k \text{ chiusi contraibili in } M \textbf{ tali che } A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right\}$$

Se non esiste alcun $k \in \mathbb{N}$ con queste proprietà, si pone $\operatorname{cat}(A, M) = +\infty$; si pone inoltre $\operatorname{cat}(\emptyset, M) = 0$ e $\operatorname{cat}(M) := \operatorname{cat}(M, M)$.

Osservazione 27.

1. $\operatorname{cat}(A, M) = \operatorname{cat}\left(\overline{A}, M\right)$.
2. Se $A \subset M \subset Y$ allora $\operatorname{cat}(A, M) \geq \operatorname{cat}(A, Y)$.

Esempio 10.

1. $\operatorname{cat}\left(\mathbb{S}^{m-1}\right) = 2$ perché non è contraibile ma $A_1 = \left\{x \in \mathbb{S}^{m-1} : x_1 \geq 0\right\}$ e $A_2 = \left\{x \in \mathbb{S}^{m-1} : x_1 \leq 0\right\}$ sono due chiusi contraibili che la ricoprono
2. Posto $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $2 \leq \operatorname{cat}\left(\mathbb{T}^2\right) \leq 3$, perché non è contraibile, mentre un ricoprimento con tre chiusi contraibili può essere ottenuto prendendo un disco chiuso e le due parti ottenute tagliando con tre segmenti il complementare del disco.
3. Se $\mathbb{S}$ è la sfera unitaria di uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale, $\operatorname{cat}(\mathbb{S}) = 1$ perché è contraibile.

Lemma 42.
Siano M uno spazio topologico e $A, B \subset M$.
Allora:

1. *Se $A \subset B$, allora* $\operatorname{cat}(A, M) \leq \operatorname{cat}(B, M)$.
2. $\operatorname{cat}(A \cup B, M) \leq \operatorname{cat}(A, M) + \operatorname{cat}(B, M)$.
3. *Se A è chiuso e $\eta \in C(A, M)$ è una deformazione, allora* $\operatorname{cat}(A, M) \leq \operatorname{cat}\left(\overline{\eta(A)}, M\right)$.

Dimostrazione.

1. Se $B_1, \dots, B_{\operatorname{cat}(B,M)}$ sono chiusi contraibili che ricoprono B, ricoprono anche A e dunque $\operatorname{cat}(A, M) \leq \operatorname{cat}(B, M)$.
2. Se $A_1, \dots, A_{\operatorname{cat}(A,M)}$ sono chiusi contraibili che ricoprono A e $B_1, \dots, B_{\operatorname{cat}(B,M)}$ sono chiusi contraibili che ricoprono B, allora la loro unione ricopre $A \cup B$ e dunque la sua categoria è al più $\operatorname{cat}(A, M) + \operatorname{cat}(B, M)$.
3. Se $C_1, \dots, C_{\operatorname{cat}\left(\overline{\eta(A)}, M\right)}$ sono chiusi contraibili che ricoprono $\eta(A)$, allora $\eta^{-1}(C_1), \dots, \eta^{-1}\left(C_{\operatorname{cat}\left(\overline{\eta(A)}, M\right)}\right)$ sono chiusi che ricoprono A, e sono contraibili perché, se H_i è un'omotopia tra l'inclusione $C_i \hookrightarrow M$ e una mappa costante, $H_i \circ \eta$ è un'omotopia tra $\eta^{-1}(C_i) \hookrightarrow M$ e una mappa costante.

$\square$

Osservazione 28.
Nella terza affermazione del lemma 42 la disuguaglianza può essere stretta: infatti, prendendo $M = \mathbb{S}^1$, $A = \left\{x \in \mathbb{S}^1 : x_1 \geq 0\right\}$ e $\eta : e^{i\theta} \to e^{(i+1)\theta}$, si ha $\eta(A) = M$ e $\mathrm{cat}(A, M) = 1 < 2 = \mathrm{cat}(\eta(A), M)$ e la mappa è omotopa all'identità attraverso $H(t, \theta) = e^{i\theta} \to e^{i(t+1)\theta}$.

Lemma 43.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sottovarietà di codimensione 1 e $A \subset M$ compatto.
Allora:

1. $\mathrm{cat}(A, M) < +\infty$.
2. *Esiste un intorno U_A di A tale che* $\mathrm{cat}(A, M) = \mathrm{cat}(U_A, M)$.

Dimostrazione.

1. Grazie alla proprietà di estensione, per ogni $q \in A$ esiste un intorno aperto $N \subset M \times [0, 1]$ di $\{q\} \times [0, 1] \cup M \times \{0, 1\}$ e $\widetilde{H} \in C(N, M)$ tale che $H(u, 0) = u$ e $H(u, 1) = q = H(q, t)$ per ogni $t \in [0, 1], u \in M$; dunque, essendo il compatto $\{q\} \times [0, 1]$ e il chiuso $M \times [0, 1] \backslash N$ disgiunti, sono a distanza positiva e pertanto esiste un intorno U_q di q tale che $\overline{U_q} \times [0, 1] \subset N$, e dunque $\overline{U_q}$ è contraibile in M; per la compattezza di A esistono $q_1, \ldots, q_k$ tali che $A \subset U_{q_1} \cup \cdots \cup U_{q_k}$ e dunque, dalla seconda affermazione del lemma 42, $\mathrm{cat}(A, M) \leq \mathrm{cat}(U_{q_1}, M) + \cdots + \mathrm{cat}(U_{q_k}, M) = k < +\infty$.

2. Innanzi tutto, grazie alla prima affermazione del lemma 42, è sufficiente trovare un intorno U_A di A con $\mathrm{cat}(U_A, M) \leq \mathrm{cat}(A, M)$; se $A_1, \ldots, A_{\mathrm{cat}(A,M)}$ sono chiusi contraibili che ricoprono A, che si possono supporre compatti a meno di rimpiazzarli con $A \cap A_1, \ldots, A \cap A_{\mathrm{cat}(A,M)}$, e $H : A_i \times [0, 1] \to M$ è un'omotopia tra l'immersione $A_i \hookrightarrow M$ e la mappa costante in p, come in precedenza esiste un intorno aperto $N \subset M \times [0, 1]$ di $A_i \times [0, 1] \cup M \times \{0, 1\}$ e $\widetilde{H} \in C(N, M)$ tale che $\widetilde{H}|_{A_i \times [0,1]} = H$, $H(u, 0) = u$ e $H(u, 1) = p$ per ogni $u \in M$, dunque esiste un intorno U_i di A_i tale che $\overline{U_i}$ è contraibile; pertanto, ponendo $U_A = \bigcup_{i=1}^{\mathrm{cat}(A,M)} U_i$, si ha $\overline{U_A} \subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{cat}(A,M)} \overline{U_i}$ e dunque $\mathrm{cat}(U_A, M) = \mathrm{cat}\left(\overline{U_A}, M\right) \leq \mathrm{cat}(A, M)$.

$\square$

Lezione 16 – 12/1/2012

Definizione 31.
Sia M uno spazio topologico, $H^*(M)$ la sua coomologia e $\cup$ il relativo prodotto

cup.
La **cup-length** di M è

$$\text{cuplength}(M) := \sup\{k \in \mathbb{N} : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in H^*(M)\backslash\{1\} \text{ tali che } \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \neq 0\}$$

Osservazione 29.
Si ha che $\text{cat}(M) \geq \text{cuplength}(M) + 1$, dunque poiché $\text{cuplength}\left(\mathbb{T}^2\right) = 2$, dovrà essere $\text{cat}\left(\mathbb{T}^2\right) = 3$.

Definizione 32.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sottovarietà di codimensione 1 e $J \in C^1(M, \mathbb{R})$.
Si definisce

$$\text{cat}_k(M) = \sup\{\text{cat}(A, M); A \subset M \text{ compatto}\}$$

e, per $m = 1, \dots, \text{cat}_k(M)$,

$$\mathcal{C}_m = \{A \subset M \text{ compatto}; \text{cat}(A, M) \geq m\}$$

e $c_m := \inf\limits_{A \in \mathcal{C}_m} \sup\limits_A J$.

Osservazione 30.
Se M è compatto, allora $\text{cat}_k(M) = \text{cat}(M)$.

Osservazione 31.

1. $c_1 = \inf\limits_M J$.
2. $c_1 \leq \cdots \leq c_{\text{cat}_k(M)}$, perché $\mathcal{C}_J(m \subset \mathcal{C}_{m-1}$.
3. $c_m < +\infty$ per ogni $m \leq \text{cat}_k(M)$.
4. Se $\inf\limits_M J > -\infty$ allora $c_1 > -\infty$, e dunque $-\infty < c_1 \leq \cdots \leq c_m < +\infty$.

Lemma 44.
*Sia M uno spazio di Hilbert o una sottovarietà di codimensione 1, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$, tale che valga PS e Z_c l'insieme dei suoi punti critici al livello c.
Allora, per ogni intorno U di Z_c esiste $\delta > 0$ e una deformazione $\eta \in C(M, M)$ tale che $\eta\left(M^{c+\delta}\backslash U\right) \subset M^{c-\delta}$.*

Dimostrazione.
Innanzi tutto, per la compattezza di Z_c esiste un suo intorno $V \subset U$ tale che $d(V, \partial U) > 0$, ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $u \notin U$ e $J(u) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ allora $\|\nabla_M u\| \geq \varepsilon$, perché altrimenti esisterebbe $u_k \in M$ con $J(u_k) \underset{k \to +\infty}{\to} c$ e $\nabla_M J(u_k) \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, e dunque per Palais-Smale si avrebbe, a meno di estratte, $U \notin u_k \underset{k \to +\infty}{\to} u \in Z_c$ che è assurdo; indicando poi con V un campo vettoriale pseudo-gradiente associato a J e con $\alpha(t, u)$ la soluzione di $\begin{cases} \alpha(t, u) = -\min\left\{1, \frac{1}{\|V(\alpha(t,u))\|}\right\} V(\alpha(t, u)) \\ \alpha(0, u) = u \end{cases}$,
essendo $\|\dot{\alpha}\| \leq 1$ allora $\alpha(t, u) \notin V$ se $u \in U$ e $t < d(V, \partial U)$, e dunque $\|\nabla_M J\| \geq \varepsilon$;

ponendo infine $\delta = \dfrac{\varepsilon^2 d(V, \partial U)}{2}$ e $\eta : u \to \alpha\left(\dfrac{2}{\delta}, u\right)$, se esistesse $u \notin U$ tale che $J(u) \leq c + \delta$ e $J(\eta(u)) > c - \delta$ allora

$$J(\eta(u)) = J(u) + \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon^2}} \frac{d}{dt} J(\alpha(t,u)) dt =$$

$$= J(u) - \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon^2}} \min\left\{1, \frac{1}{\|V(\alpha(t,u))\|}\right\} \langle J'(\alpha(t,u)), V(\alpha(t,u))\rangle_H dt \leq$$

$$\leq J(u) - \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon^2}} \min\left\{1, \frac{1}{\|V(\alpha(t,u))\|}\right\} \|J'(\alpha(t,u))\|^2 dt \leq$$

$$\leq J(u) - \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon^2}} \min\left\{1, \frac{1}{2\|J(\alpha(t,u))\|}\right\} \|J'(\alpha(t,u))\|^2 dt =$$

$$= J(u) - \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon^2}} \min\left\{\|J'(\alpha(t,u))\|^2, \frac{\|J(\alpha(t,u))\|}{2}\right\} dt \leq$$

$$\leq J(u) - \int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon^2}} \min\left\{\varepsilon^2, \frac{\varepsilon}{2}\right\} dt \leq J(u) - 2\delta = c - \delta$$

che è assurdo. □

Teorema 45.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sottovarietà di codimensione 1 e $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ limitato dal basso e tale che valga PS.
Allora J ha almeno $\operatorname{cat}_k(M)$ punti critici e in particolare:

1. *c_m è un valore critico per J per ogni $m = 1, \ldots, \operatorname{cat}_k(M)$.*
2. *se $c := c_m = c_{m+1} = \cdots = c_{m+q}$ allora $\operatorname{cat}(Z_c, M) \geq q + 1$.*

Dimostrazione.

1. Se per assurdo $Z_{c_m} = \emptyset$, allora per il lemma 28 esiste $\delta > 0$ e una deformazione η tale che $\eta\left(M^{c_m+\delta}\right) \subset M^{c_m-\delta}$, dunque esiste $A \in \mathcal{C}_m$ tale che $\sup\limits_A J \leq c_m + \delta$, ma allora $A \in M^{c_m-\delta}$ e dunque $\sup\limits_{\eta(A)} J \leq c_m - \delta$, ma questo è assurdo perché $\operatorname{cat}(\eta(A), M) \geq \operatorname{cat}(A, M) \geq m$.

2. Se per assurdo $\operatorname{cat}(Z_c, M) \leq q$, per la compattezza di Z_c esiste un suo intorno U tale che $\operatorname{cat}\left(\overline{U}, M\right) = \operatorname{cat}(Z_c, M) \leq q$; inoltre, dalla definizione di $c = c_{m+q}$, esiste $A \in \mathcal{C}_{m+q}$ con $A \subset M^{c+\delta}$ e dunque

$$\operatorname{cat}\left(\overline{A \backslash U}, M\right) \geq \operatorname{cat}(A, M) - \operatorname{cat}\left(\overline{U}, M\right) \geq m + q - q = m$$

e quindi, prendendo una deformazione η come nel lemma 44, $\eta\left(\overline{A \backslash U}\right) \in \mathcal{C}_m$, in contraddizione con $\eta\left(\overline{A \backslash U}\right) \subset \eta\left(M^{c+\delta}\right) \subset M^{c-\delta}$.

$\square$

Osservazione 32.
Poiché gli insiemi finiti hanno categoria 1, se $\mathrm{cat}(Z_c, M) \geq 2$ allora esistono infiniti punti critici.

Osservazione 33.

1. La condizione di Palais-Smale può essere indebolita assumendo semplicemente che valga per ogni $c < b$, per qualche $b > c_m$.

2. Definendo, per $A, Y \subset M$ chiusi, la categoria relativa

$$\mathrm{cat}_{M,Y}(A) := \inf \Bigg\{ k : \exists A_1, \ldots, A_m \text{ chiusi in } M \text{ tali che } A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ ed}$$

$$\text{esistono } h_i \in C([0,1] \times A, M) \text{ tali che } h(0,u) = u, h(1,u) = p \in M,$$

$$h(t,y) \subset Y \text{ per ogni } t \in [0,1], u \in M, y \in Y \Bigg\}$$

si dimostra che, dati $a < b$, $M^b \backslash M^a$ contiene almeno $\mathrm{cat}_{M^b, M^a}\left(M^b\right)$ punti critici di J se J soddisfa PS-c per ogni $c \in [a,b]$.

Lezione 17 – 18/1/2012

Esempio 11.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ monotona decrescente è tale che $|f(u)| \leq a + b|u|^p$ per qualche $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ e $\frac{\int_0^u f}{u^2} \underset{u \to \pm\infty}{\to} -\infty$ e $f(0) = f'(0) = 0$, allora esistono almeno due soluzioni non banali $u \in H_0^1(\Omega)$ di $-\Delta u = \lambda u + f(u)$ per ogni $\lambda > \lambda_1(\Omega)$ che non sia autovalore per $-\Delta$ su Ω.
Infatti, per ogni $M > 0$ esiste C_M tale che $\displaystyle\int_0^u f \leq C_M - Mu^2$, dunque il funzionale associato $J : u \to \dfrac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_\Omega u^2 - \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} f(s)ds$ è tale che $J(u) \geq \dfrac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} + \left(M - \dfrac{\lambda}{2}\right)\displaystyle\int_\Omega u^2 - C_M|\Omega|$ è limitato dal basso e coercivo, e inoltre $\nabla J(u) = u - \Phi'(u)$ con Φ' compatto, dunque vale PS e quindi si può applicare il teorema 45 e, per trovare due valori critici non banali, sarà sufficiente far vedere che $c_2 < 0$: se $\lambda \in (\lambda_k(\Omega), \lambda_{k+1}(\Omega))$, prendendo $V_k = \mathrm{Span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ e $S_r = \{x \in H_0^1(\Omega) : \|x\| = r\}$, allora per ogni $v \in S_r \cap V_k$ si ha

$$J(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k(\Omega)}\right)\int_\Omega \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega dx \int_0^{v(x)} f(s)ds \leq \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k(\Omega)}\right)}_{<0} r^2 + o\left(r^2\right)$$

e dunque $S_r \cap V_k \subset J^{-\varepsilon}$ per $\varepsilon > 0$ opportuno; inoltre, la proiezione $\pi : H_0^1(\Omega) \to V_k$ non è mai nulla su $J^{-\varepsilon}$ perché se $\pi(u) = 0$ allora

$$J(u) \geq \frac{\int_\Omega \|\nabla u\|^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}(\Omega)}\right)\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \geq 0$$

e dunque è ben definita la mappa $\widetilde{\pi}_r = r\dfrac{\pi}{\|\pi\|} : J^{-\varepsilon} \to S_r \cap V_k$; per concludere è sufficiente mostrare che il compatto $S_r \cap V_k$ è tale che $\operatorname{cat}\left(S_r \cap V_k, J^{-\varepsilon}\right) \geq 2$: se così non fosse, esisterebbe un chiuso contraibile $\widetilde{A} \subset J^{-\varepsilon}$ contenente $S_r \cap V_k$, ma allora se $H \in C\left([0,1] \times \widetilde{A}, J^{-\varepsilon}\right)$ e $p \in J^{-\varepsilon}$ sono tali che $H(0,u) = u$ e $H(1,u) = p$ per ogni $u \in \widetilde{A}$, $\widetilde{\pi}_r \circ H$ sarebbe un'omotopia tra la sfera finito-dimensionale $S_r \cap V_k$ e il punto $\widetilde{\pi}_r(p)$, che è assurdo.

Proposizione 46.
Sia M uno spazio di Hilbert o una sottovarietà di codimensione 1, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$ limitato dal basso e $a \in \mathbb{R}$ tale che valga PS-c per ogni $c \leq a$.
Allora $\operatorname{cat}(J^a) < +\infty$

Dimostrazione.
Per ipotesi, chiamando Z l'insieme dei punti critici di J, $Z \cap M^a$ è compatto e dunque esiste un suo intorno U tale che $\operatorname{cat}\left(\overline{U}, M^a\right) = \operatorname{cat}(Z \cap M^a, M^a) < +\infty$ e, per continuità, si può supporre $\sup_{\overline{U}} \|\nabla J\| \leq \dfrac{1}{2}$; inoltre, prendendo un altro intorno $V \subset U$ di $Z \cap M^a$ con $d\left(\overline{V}, \partial U\right) > 0$, allora il flusso pseudo-gradiente che entra in V può uscire da U solo dopo un tempo maggiore o uguale a $d\left(\overline{V}, \partial U\right)$, come nel lemma 44; inoltre, il flusso pseudo-gradiente che parte in M^a arriva in V, perché altrimenti, prendendo $\delta > 0$ tale che $\|\nabla J(u)\| \geq \delta$ per ogni $u \in M^a \backslash V$ e $T = \dfrac{a - \inf_J M}{\delta^2}$ allora

$$J(\alpha(T,u)) = J(u) + \int_0^T \frac{d}{dt} J(\alpha(t,u))dt \leq J(u) - \int_0^T \|\nabla J(\alpha(t,u))\|^2 \leq$$
$$\leq J(u) - T\delta^2 < a - (a - \inf_M J) = \inf_M J$$

Infine, prendendo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ tali che $|t_i - t_{i-1}| \leq \dfrac{d}{2}$, $\widetilde{t}$ tale che $\alpha\left(\widetilde{t}, p\right) \in V$ e $\widetilde{i}$ tale che $\left|t_{\widetilde{i}} - \widetilde{t}\right| \leq \dfrac{d}{2}$, allora $\alpha(t_{\widetilde{i}}f, p) \in U$ e dunque ponendo $A_i = \{p \in M^a : \alpha(t_i, p) \in U\}$ si ha $M^a \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ e, poiché gli A_i possono essere deformati in U,

$$\operatorname{cat}(M^a) \leq \sum_{i=1}^n \operatorname{cat}(A_i, M^a) \leq n \operatorname{cat}\left(\overline{U}, M^a\right) < +\infty$$

□

Corollario 47.
Se J è limitato dall'alto, $\operatorname{cat}(M) < +\infty$.

Corollario 48.
Se J è limitato dal basso, $\operatorname{cat}_k(M) = +\infty$ *e vale PS-a per ogni* $a < \sup_M J$ *allora* $c_m \underset{m\to+\infty}{\to} \sup_M J$ *ed esistono infiniti punti critici* z_m *tali che* $J(z_m) \underset{m\to+\infty}{\to} \sup_M J$.

Lezione 18 – 19/1/2012

Definizione 33 (Genere di Krasnoselski)**.**
Sia H uno spazio di Hilbert e

$$\mathcal{A} := \{A \subset H\backslash\{0\} \text{ chiuso e simmetrico rispetto a } 0\}$$

Il **genere** di $A \in \mathcal{A}$ è

$$\gamma(A) := \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \exists\phi \in C\left(H, \mathbb{R}^n\right) \text{ dispari e tale che } \phi(x) \neq 0 \forall x \in A\right\}$$

Osservazione 34.
Equivalentemente si può definire $\gamma(A) = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \exists\phi \in C\left(A, \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right) \text{ dispari}\right\}$, perché per la proprietà di estensione ϕ può essere estesa a $\widehat{\phi} \in C(H, \mathbb{R}^n)$ e $\widetilde{\phi} : x \to \dfrac{\widehat{\phi}(x) - \widehat{\phi}(-x)}{2}$ è come nella definizione di genere.

Esempio 12.

1. Se $A \subset H\backslash\{0\}$ è un chiuso tale che $A \cap -A = \emptyset$, allora $\phi(u) = \begin{cases} a & \text{se } u \in A \\ -a & \text{se } u \in -A \end{cases}$ è una mappa dispari da $A \cup -A$ in $\mathbb{R}$, e dunque $\gamma(A \cup -A) = 1$.

2. Prendendo un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ contenente l'origine e simmetrico rispetto ad essa, $\gamma(\partial\Omega) = m$; infatti, $\gamma(\partial\Omega) \leq m$ perché l'identità $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è una mappa dispari mai nulla su $\partial\Omega$, e se fosse $\gamma(\partial\Omega) < m$ allora un'eventuale $\phi \in C\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\gamma(\partial\Omega)}\right)$ mai nulla su $\partial\Omega$, estesa a zero sulle ultime $m - \gamma(\partial\Omega)$ componenti, è tale che $\deg(\phi, \Omega, 0) \neq 0$ per il teorema di Borsuk-Ulam, dunque esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\deg(\phi, \Omega, y) \neq 0$ per ogni $y \in B_\varepsilon(0)$, quindi $B_\varepsilon(0) \subset \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$, che è assurdo; in particolare, $\gamma\left(\mathbb{S}^m\right) = m + 1$

Lemma 49.
Siano H uno spazio di Hilbert e $A_1, A_2 \subset H$ tali che $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.
Allora:

1. *Se $A_1 \subset A_2$ allora $\gamma(A_1) \leq \gamma(A_2)$.*
2. $\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2)$.
3. *Se $\eta \in C(A, H\backslash\{0\})$ è dispari allora $\gamma(\eta(A)) \geq \gamma(A)$.*

4. *Se A è compatto allora $\gamma(A) < +\infty$ ed esiste un suo intorno U tale che $\gamma\left(\overline{U}\right) = \gamma(A)$.*

Dimostrazione.

1. Segue dalla definizione.

2. Se esistono $\phi_i \in C\left(H, \mathbb{R}^{\gamma(A_i)}\right)$ dispari e mai nulle su A_i, per $i = 1, 2$, allora $\phi := (\phi_1, \phi_2) \in C\left(H, \mathbb{R}^{\gamma(A_1)+\gamma(A_2)}\right)$ è dispari e mai nulla su $A_1 \cup A_2$, dunque $\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2)$.

3. Se $\phi \in C\left(H, \mathbb{R}^{\gamma(\eta(A))}\right)$ è una mappa dispari e mai nulla su $\eta(A)$, allora $\phi \circ \eta \in C\left(A, \mathbb{R}^{\gamma(\eta(A))} \backslash \{0\}\right)$ è dispari e dunque, dall'osservazione precedente, $\gamma(A) \leq \gamma(\eta(A))$.

4. Prendendo, per ogni $x \in A$, $\varepsilon_x > 0$ tale che $B_{\varepsilon_x}(x) \cap B_{\varepsilon_x}(-x) = 0$, allora $\{B_{\varepsilon_x}(x) \cup B_{\varepsilon_x}(-x)\}_{x \in A}$ è un ricoprimento di aperti di A, dunque estrandone un sottoricoprimento finito $\{B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \cup B_{\varepsilon_{x_i}}(-x_i)\}_{x=1}^{k}$ dai punti precedenti si ottiene

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{i=1}^{k} \left(B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \cup B_{\varepsilon_{x_i}}(-x_i)\right)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \gamma\left(B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \cup B_{\varepsilon_{x_i}}(-x_i)\right) \leq k < +\infty$$

   Infine, se $\phi \in C\left(H, \mathbb{R}^{\gamma(A)}\right)$ è dispari e mai nulla su A, per continuità non si annulla su $\overline{B_\varepsilon(A)}$ e dunque $\gamma\left(\overline{B_\varepsilon(A)}\right) \leq \gamma(A)$, mentre l'altra disuguaglianza segue dal primo punto.

□

Definizione 34.
Sia $M \in \mathcal{A}$, $J \in C^1(M, \mathbb{R})$.
Si definisce

$$\gamma_k(M) = \sup\{\gamma(K) : K \in \mathcal{A}, K \subset M \text{ compatto}\}$$

e, per $m = 1, \ldots, \gamma_k(M)$,

$$\mathcal{A}_m = \{A \subset M; A \in \mathcal{A} \text{ compatto con } \gamma(A) \geq m\}$$

e $\sigma_m = \inf\limits_{A \in \mathcal{A}_m} \max\limits_{A} J$.

Osservazione 35.

1. $\sigma_m < +\infty$ per ogni $m \leq \gamma_k(M)$.
2. $\sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_{\gamma_k(M)}$.
3. Se J è limitato dal basso allora $\sigma_1 > -\infty$ e in particolare $\sigma_m > -\infty$ per ogni $m = 1, \ldots, \gamma_k(M)$.

Proposizione 50.
Sia H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ tale che valga PS-σ_m.
Allora, σ_m è un livello critico per J.
Se poi $\sigma := \sigma_m = \cdots = \sigma_{m+q}$ allora $\gamma(Z_\sigma) \geq q + 1$.

Dimostrazione.
Si procede come nel teorema 45. □

Teorema 51.
Sia H uno spazio di Hilbert, $M \in \mathcal{A}$ una sottovarietà di codimensione 1 e $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ limitato dal basso, pari e tale che valga PS per $J|_M$.
Allora, J ha almeno $\gamma_k(M)$ coppie di punti critici su M, più precisamente:

1. *σ_m è un livello critico per J.*
2. *Se $\sigma := \sigma_m = \cdots = \sigma_{m+q}$ allora $\gamma(Z_\sigma) \geq q + 1$.*

Dimostrazione.
Si procede come nel teorema 45, utilizzando la proposizione 50. □

Osservazione 36.
Se esiste b tale che $\sigma_m < b$ per ogni $m = 1, \ldots, \mathrm{cat}_k(M)$ allora è sufficiente assumere che valga PS per ogni $c \leq b$.

Corollario 52.
Se $J \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ è pari, allora $J|_{\mathbb{S}^m}$ ha almeno m coppie di punti critici.

Teorema 53.
Sia H uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ pari, debolmente continuo e tale che $\begin{cases} J(u) < 0 = J(0) \text{ per ogni } u \neq 0 \\ \sup_{\{u \in H : \|u\| = 1\}} J(u) = 0 \\ J' \text{ è compatto} \\ J'(u) \neq 0 \text{ per ogni } u \neq 0 \end{cases}$.
Allora l'equazione $J'(u) = \lambda u$ ammette infinite soluzioni $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R} \times H$ tali che $\|u_k\| = 1$ e $\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$.

Dimostrazione.
Sarà sufficiente mostrare che J è inferiormente limitato su $M := \{u \in H : \|u\| = 1\}$ e che vale PS-c per ogni $c < 0$, perché essendo $\gamma_k(M) = +\infty$ dal teorema 51 seguirà l'esistenza di infinite coppie di punti u_k critici per $J|_M$, che dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange verifica $J'(u_k) = \lambda_k u_k$ con $\lambda_k = \dfrac{\langle J'(u_k), u_k \rangle_H}{\|u_k\|^2} = \langle J'(u_k), u_k \rangle_H \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, in quanto $J(u_k) \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ e quindi $u_k \underset{k \to +\infty}{\rightharpoonup} 0$; $J|_M$ è inferiormente limitato

perché, se esistessero $u_k \in M$ tale che $J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} -\infty$, allora per la debole continuità $J(u) = \lim_{k\to+\infty} J(u_k) = -\infty$, che è assurdo; per mostrare che vale PS-c per ogni $c < 0$, prendiamo $u_k \in M$ tali che $J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} c < 0$, $\nabla_M J(u_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ e $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u$: dalla debole continuità si ottiene $J(u) = c < 0$, e dunque $u \neq 0$; inoltre, per la compattezza di J',

$$\|J'(u)\|^2 - \langle J'(u), u\rangle_H^2 = \lim_{k\to+\infty} \|J'(u_k)\|^2 - \langle J'(u_k), u_k\rangle_H^2 =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \|J'(u_k)\|^2 - \langle J'(u_k), u_k\rangle_H^2 \|u_k\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \langle \nabla_M J(u_k), J'(u_k)\rangle_H = 0$$

e dunque $\langle J'(u), u\rangle_H^2 = \|J'(u)\|^2 \neq 0$ e quindi

$$u_k = \frac{J'(u_k) - \nabla_M J(u_k)}{\langle J'(u_k), u_k\rangle} \underset{k\to+\infty}{\to} \frac{J'(u)}{\langle J'(u), u\rangle_H}$$

□

Osservazione 37.
Si ottiene lo stesso risultato supponendo $J(u) > 0$ per ogni $u \neq 0$ e $\inf_{\{u\in H:\|u\|=1\}} J(u) = 0$.

Lezione 19 – 1/2/2012

Esempio 13.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory, dispari in u e tale che $|f(x,u)| \leq a + b|u|^p$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}, p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ e $uf(x,u) < 0$ per ogni $x \in \Omega, u \neq 0$, il problema $-\lambda\Delta u = f(\cdot, u)$ ha infinite soluzioni $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ con $\int_\Omega \|\nabla u_k\|^2 = 1$ e $\lambda_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$; se inoltre f è omogenea in u di grado $q > 1$, allora prendendo $v_k = \lambda_k^{\frac{1}{q-1}} u_k$ si ottengono infinite soluzioni di $-\Delta u = f(\cdot, u)$ con $\int_\Omega \|\nabla v_k\|^2 \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Definizione 35.
Siano H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ pari e tale che esistano $r, \rho > 0$ tali che $\begin{cases} J(u) > 0 = J(0) & \text{per ogni } 0 \neq u \in B_r(0) \\ J(u) \geq \rho & \text{per ogni } u \in S_r(0) \end{cases}$ e inoltre, posto $H^+ := \{u \in H : J(u) \geq 0\}$, $H^m \cap H^+$ è limitato per ogni sottospazio finito-dimensionale $H^m \subset H$.
Si definisce

$$\mathcal{H}^* := \left\{h \in C(H,H) \text{ omeomorfismi dispari tali che } h\left(\overline{B_1(0)}\right) \subset H^+\right\}$$

$$\mathcal{A} := \{A \subset H \text{ chiuso e simmetrico rispetto a } 0\}$$

e, per ogni $m \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_m := \{A \in \mathcal{A}^* \text{ compatto e tale che } \gamma(A \cap h(S_1(0))) \geq m \forall h \in \mathcal{H}^*\}$$

Osservazione 38.
La definizione di Γ_m ha senso perché $\mathcal{H}^* \neq \emptyset$, in quanto contiene la mappa $h_r : u \to ru$.

Lemma 54.
Siano H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ pari e tale che esistano $r, \rho > 0$ tali che $\begin{cases} J(u) > 0 = J(0) & \text{per ogni } 0 \neq u \in B_r(0) \\ J(u) \geq \rho & \text{per ogni } u \in S_r(0) \end{cases}$ *e inoltre $H^m \cap H^+$ è limitato per ogni sottospazio finito-dimensionale $H^m \subset H$.*
Allora

1. $\Gamma_m \neq \emptyset$.
2. $\Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m$.
3. *Se $A \in \Gamma_m$ e $U \in \mathcal{A}$ è tale che $\gamma(U) \leq q < m$, allora $\overline{A \backslash U} \in \Gamma_{m-q}$.*
4. *Se η è un omeomorfismo dispari in H tale che $\eta^{-1}(H^+) \subset H^+$ e $A \in \Gamma_m$ allora $\eta(A) \in \Gamma_m$.*

Dimostrazione.

1. Sarà sufficiente mostrare che, se $H^m \cap H^+ \subset H^m \cap \overline{B_R(0)}$, allora $H^m \cap \overline{B_R(0)} \in \Gamma_m$; per ogni $h \in \mathcal{H}^*$ si ha $h(B_1(0)) \subset \overline{H^+}$ e dunque $H^m \cap h(B_1(0)) \subset H^m \cap \overline{H^+} \subset H^m \cap \overline{B_R(0)}$, pertanto $H^m \cap h(S_1(0)) \subset H^m \cap \overline{B_R(0)} \cap h(S_1(0)) \subset H^m \cap h(S_1(0))$ e quindi deve valere l'uguaglianza; inoltre, essendo h un omeomorfismo dispari, $H^m \cap h(B_1(0))$ è un intorno simmetrico di 0 avente come bordo $H^m \cap h(S_1(0))$, e quindi $\gamma\left(H^m \cap \overline{B_R(0)} \cap h(S_1(0))\right) = \gamma\left(H^m \cap h(S_1(0))\right) = m$.
2. Segue dalla monotonia del genere.
3. $\overline{A \backslash U} \in \mathcal{A}$ ed è compatto, e inoltre $\overline{A \backslash U} \cap h(S_1(0)) = \overline{(A \cap h(S_1(0))) \backslash U}$, dunque dal lemma 49
$$\gamma\left(\overline{A \backslash U} \cap h(S_1(0))\right) = \gamma\left(\overline{(A \cap h(S_1(0))) \backslash U}\right) = \gamma(A \cap h(S_1(0))) - \gamma\left(\overline{U}\right) \geq m - q$$
e dunque $\overline{A \backslash U} \in \Gamma_{m-q}$.
4. Essendo η un diffeomorfismo dispari, $\eta(A) \in \mathcal{A}$; inoltre, $\eta(A) \cap h(S_1(0)) = \eta\left(A \cap \eta^{-1}(h(S_1(0)))\right)$ e $\eta^{-1} \circ h \in \mathcal{H}^*$ per ogni $h \in \mathcal{H}^*$, dunque se $A \in \Gamma_m$ allora
$$\gamma(\eta(A) \cap h(S_1(0))) = \gamma\left(\eta\left(A \cap \eta^{-1}(h(S_1(0)))\right)\right) \geq \gamma\left(A \cap \eta^{-1}(h(S_1(0)))\right) \geq m$$
e cioè $\eta(A) \in \Gamma_m$.

□

Osservazione 39.
L'ultima condizione del lemma 54 è soddisfatta se ad esempio η è un flusso pseudo-gradiente.

Definizione 36.
Siano H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ pari e tale che esistano $r, \rho > 0$ tali che $\begin{cases} J(u) > 0 = J(0) & \text{per ogni } 0 \neq u \in B_r(0) \\ J(u) \geq \rho & \text{per ogni } u \in S_r(0) \end{cases}$ e inoltre $H^m \cap H^+$ è limitato per ogni sottospazio finito-dimensionale $H^m \subset H$.
Si definisce $b_m := \inf_{A \in \Gamma_m} \max_A J$.

Teorema 55.
Siano H uno spazio di Hilbert, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ pari e tale che esistano $r, \rho > 0$ tali che $\begin{cases} J(u) > 0 = J(0) & \text{per ogni } 0 \neq u \in B_r(0) \\ J(u) \geq \rho & \text{per ogni } u \in S_r(0) \end{cases}$ e inoltre $H^m \cap H^+$ è limitato per ogni sottospazio finito-dimensionale $H^m \subset H$.
Allora

1. $b_{m+1} \geq b_m \geq \rho > 0$.
2. *Se J soddisfa PS-b_m allora b_m è un valore critico.*
3. *Se $b := b_m = \cdots = b_{m+q}$ e J soddisfa PS-b allora $\gamma(Z_b) \geq q + 1$.*

Dimostrazione.

1. La monotonia di b_m segue da quella di Γ_m, inoltre $h_r \in \mathcal{H}^*$ e $h_r(S_1(0)) = S_r(0)$, dunque $A \cap S_r(0) \neq \emptyset$ per ogni $A \in \mathcal{A}$, dunque $b_m \geq \inf_{S_r(0)} J \geq \rho > 0$.
2. Analoga al teorema 35.
3. Se fosse $\gamma(Z_b) \leq q$ allora esisterebbe un intorno $U \in \mathcal{A}$ di Z_b con $\gamma\left(\overline{U}\right) = \gamma(Z_b) \leq q$, dunque per il lemma 44 esistono $\delta > 0$ e un omeomorfismo dispari η tale che $\eta^{-1}\left(H^+\right) \subset H^+$ e $J(\eta(u)) < b - \delta$ per ogni $u \in J^{b+\delta} \setminus U$; per definizione di $b = b_{m+q}$ esiste $A \in \Gamma_{m+q}$ tale che $A \subset J^{b+\delta}$, inoltre dal lemma 49 si ha $\overline{A \setminus U} \in \Gamma_m$ e, dal lemma 54, $\eta\left(\overline{A \setminus U}\right) \in \Gamma_m$, ma allora $\eta\left(\overline{A \setminus U}\right) \subset J^{b-\delta}$ è in contraddizione con la definizione di $b = b_m$.

□

Osservazione 40.
Se si suppone inoltre che J soddisfi PS-c per ogni $c > 0$, allora J ha infiniti punti critici.

Esempio 14.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory è tale che $|f(x, u)| \leq a + b|u|^p$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}, p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$, $\frac{f(\cdot, u)}{u} \underset{u \to 0}{\to} 0$ uniformemente su Ω e, per opportuni $R > 0, \theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, si ha $\int_0^u f(x, s) ds \leq \theta u f(x, u)$ per ogni $x \in \Omega, |u| \geq R$, allora il problema $-\Delta u = \lambda u + f(\cdot, u)$ ha infinite soluzioni per $\lambda < \lambda_1(\Omega)$.

Lezione 20 – 2/2/2012

Definizione 37.
Siano X, Y spazi di Banach, $\lambda^* \in X$, $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ tale che $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $S = \{(x, u) \in \mathbb{R} \times X : F(\lambda, u) = 0, u \neq 0\}$, ed esistono $(\lambda_k, u_k) \in S$ tali che $(\lambda_k, u_k) \underset{k \to +\infty}{\to} (\lambda^*, 0)$.
λ^* è detto **punto di biforcazione** per F.

Proposizione 56.
Siano X, Y spazi di Banach, $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ tale che $F(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda^* \in X$ un punto di biforcazione per F.
Allora, $F_u(\lambda^*, 0) \notin \mathrm{Inv}(X, Y)$.

Dimostrazione.
Se fosse $F_u(\lambda^*, 0) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$, allora dal teorema della funzione implicita esisterebbe un intorno $\Theta \times U$ di $(\lambda^*, 0)$ tale che se $(\lambda, u) \in \Theta \times U$ e $F(\lambda, u) = (0, 0)$ allora $u = 0$, ma allora λ^* non sarebbe di biforcazione. □

Osservazione 41.

1. Se $F(\lambda, u) = \lambda u - G(u)$, allora $F_u(\lambda^*, 0) = \lambda^* - G'(0)$, dunque se λ^* è di biforcazione per F allora λ^* è un autovalore di $G'(0)$.

2. Il viceversa è falso in generale: ad esempio, se $G(u) = Au$ per $A \in L(X, X)$ allora λ^* è di biforcazione per $F(\lambda, u) = \lambda u - G(u)$ se e solo se appartiene alla chiusura dell'insieme degli autovalori.

3. Se F non è lineare, non tutti gli autovalori sono punti di biforcazione, anche in dimensione finita: prendendo $X = Y = \mathbb{R}^2$ e $G(x, y) = \left(x + y^3, y - x^3\right)$ si ottiene $G'(0, 0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, dunque $\lambda^* = 1$ è un autovalore, ma non è di biforcazione perché se $\begin{cases} x + y^3 = \lambda x \\ y - x^3 = \lambda y \end{cases}$ allora
$$0 = y\left(x + y^3 - \lambda x\right) - x\left(y - x^3 - \lambda y\right) = x^4 + y^4$$
e dunque $(x, y) = (0, 0)$.

Lemma 57.
Siano X, Y spazi di Banach, $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ tale che $F(\lambda, 0) \equiv 0$ e $\lambda^* \in X$ tale che $V := \ker(F_u(\lambda^*, 0)) \neq \{0\}$ e $R := \mathrm{r}(F_u(\lambda^*, 0))$ abbiano entrambi complementare, rispettivamente W e Z, e $P : Y \to Z, Q : Y \to R$ le rispettive proiezioni.
Allora, esistono intorni Λ^* di λ^*, $\mathcal{V} \subset V$ di 0 e $\mathcal{W} \subset W$ di 0 e una mappa $\gamma(\lambda, v) \in C^2(\Lambda^* \times \mathcal{V}, W)$ tali che
$$\begin{cases} QF(\lambda, v + w) = 0 \\ (\lambda, v, w) \in \Lambda^* \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \end{cases} \iff w = \gamma(\lambda, v)$$
Inoltre, $\gamma(\lambda, 0) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda^*$ e $\gamma_v(\lambda^*, 0) = 0$.

Dimostrazione.
Posta $\varphi(\lambda, u) = F(\lambda, u) - F_u(\lambda^*, 0)u$, si ha $\varphi_u(\lambda^*, 0) = 0$, inoltre scrivendo $u = (v, w) \in V \times W$ si ottiene

$$F(\lambda, u) = 0 \iff F_u(\lambda^*, 0)u + \varphi(\lambda, u) = 0 \iff F_u(\lambda^*, 0)w + \varphi(\lambda, v + w) = 0$$

dunque ponendo

$$\Phi(\lambda, v, w) := QF(\lambda, v + w) = F_u(\lambda^*, 0)w + Q\varphi(\lambda, v + w)$$

si ha

$$\Phi_w(\lambda^*, 0, 0) : w \to F_u(\lambda^*, 0)w + Q\varphi_u(\lambda^*, 0)w = F_u(\lambda^*, 0)w$$

che è invertibile e dunque si può applicare il teorema della funzione implicita per ottenere l'esistenza di γ; essendo poi $F(\lambda, 0) \equiv 0$, si ha anche $\gamma(\lambda, 0) \equiv 0$, inoltre

$$0 = \frac{d}{dv} 0 \bigg|_{(\lambda,v)=(\lambda^*,0)} = \frac{d}{dv}(F_u(\lambda^*, 0)\gamma(\lambda, v) + Q\varphi(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)))\bigg|_{(\lambda,v)=(\lambda^*,0)} :$$

$$: x \to F_u(\lambda^*, 0)\gamma_v(\lambda^*, 0)x + Q\varphi_u(\lambda^*, 0)(x + \gamma_v(\lambda^*, 0)x)$$

e dunque devono essere nulli entrambi gli addendi: da $F_u(\lambda^*, 0)\gamma_v(\lambda^*, 0)x = 0$ si ricava che $\gamma_v(\lambda^*, 0)x \in \ker(F_u(\lambda^*, 0)) = V$, ma $\gamma_v(\lambda^*, 0)x \in W$ e dunque $\gamma_v(\lambda^*, 0)x = 0$ per ogni $x \in V$ □

Osservazione 42.
Le ipotesi del lemma 57 sono soddisfatte se ad esempio $F_u(\lambda^*, 0)$ è un operatore di Fredholm.

Osservazione 43.
Grazie al lemma 57, l'equazione $F(\lambda, v) = 0$ equivale a $PF(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0$.

Lezione 21 – 9/2/2012

Lemma 58.
Siano X, Y spazi di Banach, $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ tale che $F(\lambda, 0) \equiv 0$ e $\lambda^* \in X$ tale che $\{0\} \neq \ker(F_u(\lambda^*, 0)) := V = \mathrm{Span}\{\phi\}$ e $\mathrm{r}(F_u(\lambda^*, 0)) := R = \{y \in Y : \Psi(y) = 0\}$ per opportuni $\phi \in X, \Psi \in Y^*$, γ come nel lemma 57.
Allora, $\beta(\mu, t) := \Psi(F(\lambda^* + \mu, t\phi + \gamma(\lambda^* + \mu, t\phi)))$ soddisfa:

1. *$\beta(\mu, 0) = 0$ per ogni $\mu + \lambda^* \in \Lambda^*$.*
2. *$\beta_\mu(0, 0) = \beta_{\mu\mu}(0, 0) = 0$.*
3. *$\beta_t(0, 0) = 0$.*
4. *$\beta_{\mu t}(0, 0) = \Psi(F_{u\lambda}(\lambda^*, 0)(1, \phi))$.*
5. *$\beta_{tt}(0, 0) = \Psi(F_{uu}(\lambda^*, 0)(\phi, \phi))$.*

Dimostrazione.

1. $\beta(\mu,0)=\Psi(F(\lambda^*+\mu,\gamma(\lambda^*+\mu,0)))=\Psi(F(\lambda^*+\mu,0))=\Psi(0)=0.$

2. Segue dal punto precedente.

3. $$\beta_t(0,0)=\Psi(F_u(\lambda^*+\mu,t\phi+\gamma(\lambda^*+\mu,t\phi))(\phi+\gamma_v(\lambda^*+\mu,t\phi)\phi))|_{(t,\mu)=(0,0)}=$$
$$=\Psi(F_u(\lambda^*,\gamma(\lambda^*,0))(\phi+\gamma_v(\lambda^*,0)\phi))=\Psi(F_u(\lambda^*,0)\phi)=0$$

4. $$\beta_{\mu t}(0,0)=\Psi(F_{u\lambda}(\lambda^*+\mu,t\phi+\gamma(\lambda^*+\mu,t\phi))(1,\phi+\gamma_v(\lambda^*+\mu,t\phi)\phi))+$$
$$+\Psi(F_{uu}(\lambda^*+\mu,t\phi+\gamma(\lambda^*+\mu,t\phi))(\gamma_\lambda(\lambda^*+\mu,t\phi)(1),\phi+\gamma_v(\lambda^*+\mu,t\phi)\phi))+$$
$$+\Psi(F_u(\lambda^*+\mu,t\phi+\gamma(\lambda^*+\mu,t\phi))(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*+\mu,t\phi)(1,\phi)))|_{(t,\mu)=(0,0)}=$$
$$=\Psi(F_{u\lambda}(\lambda^*,\gamma(\lambda^*,0))(1,\phi+\gamma_v(\lambda^*,0)\phi))+$$
$$+\Psi(F_{uu}(\lambda^*,\gamma(\lambda^*,0))(\gamma_\lambda(\lambda^*,0)(1),\phi+\gamma_v(\lambda^*,0)\phi))+$$
$$+\Psi(F_u(\lambda^*,\gamma(\lambda^*,0))(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*,0)(1,\phi)))=$$
$$=\Psi(F_{u\lambda}(\lambda^*,0)(1,\phi))+\Psi(F_{uu}(\lambda^*,0)(0,\phi))+$$
$$+\Psi(F_u(\lambda^*,0)(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*,0)(1,\phi)))=$$
$$=\Psi(F_{u\lambda}(\lambda^*,0)(1,\phi))$$

5. Analoga al punto precedente.

□

Teorema 59 (Biforcazione dall'autovalore semplice)**.**
Siano X,Y spazi di Banach, $F\in C^2(\mathbb{R}\times X,Y)$ tale che $F(\lambda,0)\equiv 0$ e $\lambda^*\in X$ tale che $\{0\}\neq\ker(F_u(\lambda^*,0)):=V=\mathrm{Span}\{\phi\}$ e $\mathrm{r}(F_u(\lambda^*,0)):=R=\{y\in Y:\Psi(y)=0\}$ per opportuni $\phi\in X,\Psi\in Y^*$ e $F_{u\lambda}(\lambda^*,0)(1,\phi)\notin R$.
Allora, λ^* è di biforcazione per F.
Inoltre l'insieme $S=\{(x,u)\in\mathbb{R}\times X:F(\lambda,u)=0,u\neq 0\}$ è, intorno a λ^*, un'unica curva cartesiana parametrizzata su V.

Dimostrazione.
Dal lemma 58, la mappa $h(\mu,t)=\begin{cases}\frac{\beta(\mu,t)}{t} & \text{se } t\neq 0\\ \beta_t(\mu,0) & \text{se } t=0\end{cases}$ è di classe C^1 in $(\lambda^*,0)$ e verifica

$$h(0,0)=0\quad h_\mu(0,0)=\beta_{\mu t}(0,0)=\Psi(F_{u\lambda}(\lambda^*,0)(1,\phi))\neq 0$$

$$h_t(0,0)=\frac{\beta_{tt}(0,0)}{2}=\frac{\Psi(F_{uu}(\lambda^*,0)(\phi,\phi))}{2}$$

Dunque, dal teorema della funzione implicita esiste $\varepsilon > 0$ e $\mu \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}$ tale che $\mu(0) = 0$ e $h(\mu(t), t) \equiv 0$ per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e dunque

$$0 = \beta(\mu(t), t) = \Psi(F(\lambda^* + \mu(t), t\phi + \gamma(\lambda^* + \mu(t), t\phi)))$$

Se $t \neq 0$ allora $0 \neq t\phi \in V$ e $0 \neq \gamma(\lambda^* + \mu(t), t\phi) \in W$, dunque $(\lambda^* + \mu(t), t\phi + \gamma(\lambda^* + \mu(t), t\phi)) \in S$, dunque λ^* è di biforcazione e S è localmente parametrizzato da $\begin{cases} \lambda = \lambda^* + \mu(t) \\ u = t\phi + \gamma(\lambda^* + \mu(t), t\phi) \end{cases}$.

$\square$

Teorema 60.
Sia X uno spazio di Banach, $G \in C^2(X, X)$ tale che $G(0) = 0$ e $G'(0)$ è compatto e ha $\lambda^* = 0$ come autovalore, con $\dim(\ker(\lambda^* \operatorname{Id} - G'(0))) = 1$ e $\ker(\lambda^* \operatorname{Id} - G'(0)) \cap \operatorname{r}(\lambda^* \operatorname{Id} - G'(0)) = \{0\}$. Allora, λ^* è di biforcazione per $F(\lambda, u) := \lambda u - G(u)$.

Dimostrazione.
Per le proprietà spettrali degli operatori compatti, $F_u(\lambda^*, 0) = \lambda^* \operatorname{Id} - G'(0)$ soddisfa le ipotesi del teorema 59, e inoltre se $\ker(F_u(\lambda^*, 0)) = \operatorname{Span}\{\phi\}$ allora $F_{u\lambda}(\lambda^*, 0)(1, \phi) = \phi \notin \operatorname{r}(F_u(\lambda^*, 0))$ e dunque il risultato segue dal teorema precedente. $\square$

Osservazione 44.

1. È necessario che la molteplicita algebrica di λ^* sia 1: infatti, prendendo $X = Y = \mathbb{R}^2$ e $F(\lambda, x, y) = \left(\lambda x - y - y^3, \lambda y + x^3\right)$, allora se $F(\lambda, x, y) = (0, 0)$ si avrà
$$0 = x\left(\lambda y + x^3\right) - y\left(\lambda x - y - y^3\right) = x^4 + y^2 + y^4$$
e dunque $(x, y) = (0, 0)$; infatti, $\lambda^* = 0$ è un autovalore doppio di $F_{(x,y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e $F_{(x,y),\lambda}(0, 0) = \operatorname{Id}$.

2. Se F è più regolare, si possono ricavare ulteriori informazioni su S: infatti, se $h(\mu(t), t) \equiv 0$ allora $\mu'(0) = -\dfrac{h_t(0,0)}{h_\mu(0,0)}$, dunque se $h_t(0, 0) \neq 0$ si ha $\lambda(t) = \lambda^* - \dfrac{h_t(0,0)}{h_\mu(0,0)} t + o(t)$ e $u = -\dfrac{h_\mu(0,0)}{h_t(0,0)}(\lambda - \lambda^*)\phi + o(\lambda - \lambda^*)$ (biforcazione transcritica); se invece $h_t(0, 0) = 0$ allora $\mu'(0) = 0$ e $\mu''(0) = -\dfrac{\Psi(F_{uuu}(\lambda^*, 0)(\phi, \phi, \phi))}{3h_\mu(0,0)}$, dunque $u = \pm\sqrt{-\dfrac{6h_\mu(0,0)}{\Psi(F_{uuu}(\lambda^*, 0)(\phi, \phi, \phi))}(\lambda - \lambda^*)} + O(\lambda^* - \lambda)$ (biforcazione sopracritica se $\mu''(0) < 0$, sottocritica se $\mu''(0) > 0$); in particolare, se $F(\lambda, u) = \lambda u - G(u)$, $\mu'(0) = \dfrac{\Psi(G''(0)(\phi, \phi))}{2h_\mu(0,0)}$ e $\mu''(0) = \dfrac{\Psi(G'''(0)(\phi, \phi, \phi))}{3h_\mu(0,0)}$.

Lezione 22 – 9/2/2012

Esempio 15.
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato regolare, $p(x,s,\xi) \in C^2\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ verifica $p(x,0,0) = p_s(x,0,0) = p_\xi(x,0,0) = 0$, allora l'equazione $-\Delta u = \lambda u + p(x,u,\nabla u)$ ha soluzioni non banali nulle al bordo in $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ se λ è sufficientemente vicino ad un autovalore semplice λ_k di $-\Delta$ su Ω.
Infatti, prendendo $X = \left\{u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) : u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$ e $Y = C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e

$$F : (\lambda, u(x)) \to \Delta u(x) + \lambda u(x) + p(x, u(x), \nabla u(x))$$

si ha $F(\lambda, 0) \equiv 0$ e $F_u(\lambda_k, 0) : v \to \Delta v + \lambda_k v$; detta φ_k l'autofunzione associata a λ_k tale che $\displaystyle\int_\Omega \varphi_k^2 = 1$, si ha $\ker(F_u(\lambda_k,0)) = \mathrm{Span}\{\varphi_k\}$ e $\mathrm{r}(F_u(\lambda_k,0)) = \{u \in Y : \Psi(u) = 0\}$, dove $\Psi : u \to \displaystyle\int_\Omega u\varphi_k$, inoltre $F_{u\lambda}(\lambda_k,0) : (\lambda, v) \to \lambda v$, dunque $F_{u\lambda}(\lambda_k,0)(1,\varphi_k) = \varphi_k \notin \mathrm{r}(F_u(\lambda_k,0))$ e quindi si può applicare il teorema 59; inoltre, se $\Psi\left(p''(0)\varphi_k^2\right) = \displaystyle\int_\Omega p''(0)\varphi_k^3 \neq 0$ la biforcazione è transcritica (come ad esempio se $k = 1$, perché $\varphi_1 > 0$), altrimenti è sopracritica se $p'''(0) < 0$ e sottocritica se $p'''(0) > 0$.

Teorema 61.
Siano X, Y spazi di Banach, $F \in C^3(\mathbb{R} \times X, Y)$ tale che $F(\lambda, 0) \equiv 0$ e λ^* tale che $V := \ker(F_u(\lambda^*,0))$ e $R := \mathrm{r}(F_u(\lambda^*,0))$ abbiano complementare, rispettivamente W e Z, e $P : Y \to Z, Q : Y \to R$ le rispettive proiezioni.
Se esiste $0 \neq v^* \in V$ tale che

$$PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)v^* + \frac{PF_{uu}(\lambda^*,0)(v^*,v^*)}{2} = 0$$

e

$$v \to PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)v^* + PF_{uu}(\lambda^*,0)(v^*,v)$$

è invertibile, allora esiste un ramo di soluzioni non banali di $F(\lambda,u) = 0$ che biforcano da $(\lambda^*,0)$, cioè esiste una mappa χ di classe C^1 con $\chi(0) = 0, \chi'(0) = v^*$ tale che, $F(\lambda^* + \mu, \chi(\mu)) \equiv 0$.

Dimostrazione.
Posta $\Psi(\lambda^* + \mu, u) := F(\lambda^* + \mu, u) - F_u(\lambda^*,0)u - \mu F_{u\lambda}(\lambda^*,0)u - \dfrac{F_{uu}(\lambda^*,0)(u,u)}{2}$, si ha $\Psi(\lambda^* + \mu, 0) \equiv 0$ e $\Psi_u(\lambda^*,0) = \Psi_{uu}(\lambda^*,0) = \Psi_{u\lambda}(\lambda^*,0) = 0$; dunque, scrivendo $u = \mu(v + w)$ con $v \in V$ e $w \in W$ e applicando le proiezioni P e Q l'equazione $F(\lambda, u) = 0$ diventa

$$\begin{cases} \mu^2 PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)(v+w) + \frac{\mu^2 PF_{uu}(\lambda^*,0)(v+w,v+w)}{2} + P\Psi(\lambda^*+\mu, \mu(v+w)) = 0 \\ \mu F_u(\lambda^*,0)w + \frac{\mu^2 QF_{uu}(\lambda^*,0)(v+w,v+w)}{2} + \mu^2 QF_{u\lambda}(\lambda^*,0)(v+w) + Q\Psi(\lambda^*+\mu,\mu(v+w)) = 0 \end{cases}$$

Inoltre, dallo sviluppo di Taylor di Ψ, si può scrivere $\Psi(\lambda^* + \mu, \mu(v+w)) = \mu^3\widetilde{\Psi}(\mu, v+w)$ con $\widetilde{\Psi}$ regolare, e dunque le equazioni precedenti equivalgono a

$$\begin{cases} PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)(v+w) + \frac{PF_{uu}(\lambda^*,0)(v+w,v+w)}{2} + \mu P\widetilde{\Psi}(\mu, v+w) = 0 \\ \widetilde{\Phi}(\mu,v,w) := F_u(\lambda^*,0)w + \frac{\mu QF_{uu}(\lambda^*,0)(v+w,v+w)}{2} + \mu QF_{u\lambda}(\lambda^*,0)(v+w) + \mu^2 Q\Psi(\mu, v+w) = 0 \end{cases}$$

Poiché $\widetilde{\Phi}(0,v,0) \equiv 0$ e $\widetilde{\Phi}(0,v,0) = L|_W$ è invertibile, allora la seconda equazione ha, a v fissato, un'unica soluzione $w = \mu\gamma(\mu,v)$; per concludere, è sufficiente mostrare che per $v = v^*$ la prima equazione è risolubile; riscrivendo

$$N(\mu,v) = PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)(v+\mu\gamma(\mu,v)) + \frac{PF_{uu}(\lambda^*,0)(v+\mu\gamma(\mu,v),v+\mu\gamma(\mu,v))}{2} +$$

$$+\mu P\widetilde{\Psi}(\mu,v,\mu\gamma(\mu,v))$$

Si ottiene

$$N(0,v^*) = PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)v^* + \frac{PF_{uu}(\lambda^*,0)(v^*,v^*)}{2} = 0$$

e

$$N_v(0,v^*) : v \to PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)v^* + PF_{uu}(\lambda^*,0)(v^*,v)$$

dunque dal teorema della funzione implicita segue l'esistenza di $v(\mu)$ tale che $v(0) = v^*$ e $N(\mu, v(\mu)) \equiv 0$, e si ottiene $u = \chi(\mu) = \mu(v(\mu) + \mu\gamma(\mu, v(\mu)))$ con $\chi'(\mu) = v(0) = v^* \neq 0$, e dunque $u \neq 0$ per μ sufficientemente piccolo. $\square$

Osservazione 45.

1. In generale la soluzione non è unica.

2. La biforcazione è transcritica.

3. Il teorema 61 si può applicare anche nel caso in cui $\dim(V) = \dim(Z) = 1$ ma non valgono tutte le ipotesi del teorema 59, ad esempio se $PF_{u\lambda}(\lambda^*,0)\phi = 0$, $PF_{uu}(\lambda^*,0)(\phi,\phi) = 0$ e $v \to PF_{uu}(\lambda^*,v)$ è invertibile.

Osservazione 46.

1. Un risultato di Krasnoselski afferma che se $G \in C(X,X)$ è differenziabile in $u = 0$, $G(0) = 0$, e $G'(0)$ ha come autovalore λ^*, con molteplicità algebrica dispari, allora è di biforcazione per $F(\lambda,u) = \lambda u - G(u)$.

2. Un risultato di Rabinowitz afferma che, nelle ipotesi precedenti, λ^* biforca in un continuo Σ di soluzioni non banali che è illimitato in $\mathbb{R} \times X$ oppure tocca $\mathbb{R} \times \{0\}$ in un altro autovalore μ di $G'(0)$.

3. Un altro risultato di Krasnoselski afferma che se $G \in C^1(X,X)$ è variazionale, compatto e $G(0) = 0$, allora ogni autovalore di $G'(0)$ è di biforcazione per F.

Lezione 23 – 10/2/2012

Definizione 38.
Sia $N \geq 2$.
Si definisce $H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ radiali}\right\}$.

Lemma 62.
Sia $N \geq 2$ e $u \in H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)$.
Allora esiste $C(N) > 0$ tale che $u(x) \leq \dfrac{C(N)}{|x|^{\frac{N-1}{2}}}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione.
Per densità, si può supporre $u \in C^\infty_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, dunque se $u(x) = v(|x|)$ allora

$$\frac{d}{dx}\left(r^{N-1}u(r)^2\right) = 2r^{N-1}u(r)u'(r) + (N-1)r^{N-2}u(r)^2 \geq 2r^{N-1}u(r)u'(r)$$

e dunque

$$|x|^{N-1}u(|x|)^2 = -\int_{|x|}^{+\infty}\left(\rho^{N-1}u(\rho)^2\right)d\rho \leq -2\int_{|x|}^{+\infty}\rho^{N-1}u(\rho)u'(\rho)d\rho \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty}\rho^{N-1}\left(u(\rho)^2 + u'(\rho)^2\right)d\rho = \frac{\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{\omega_{N-1}}$$

e dunque, ponendo $C(N) = \dfrac{1}{\sqrt{\omega_{N-1}}}$, si ha la tesi. $\square$

Teorema 63 (Strauss)**.**
Sia $N \geq 2$ e $q \in \left(2, \dfrac{2N}{N-2}\right)$.
Allora, l'embedding $H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ è compatto.

Dimostrazione.
Se u_k è una successione limitata in $H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)$, allora a meno di estratte e di traslazioni si può supporre $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$; dal lemma 62, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che $|u_k(x)|^q \leq \varepsilon|u_k(x)|^2$ per ogni $|x| \geq R$, mentre dalla compattezza dell'embedding $H^1(B_R(0)) \hookrightarrow L^q(B_R(0))$ esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\|u_k\|_{L^q(B_R(0))} \leq \varepsilon$ per ogni $k \geq k_0$, dunque per questi k

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^q = \int_{B_R(0)}|u_k|^q + \int_{B_R(0)^c}|u_k|^q \leq \varepsilon + C\varepsilon\int_{B_R(0)^c}|u_k|^2 \leq C'\varepsilon$$

$\square$

Teorema 64.
Sia $N \geq 2$ e $p \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$.
Allora, l'equazione $-\Delta u + u = |u|^{p-1}u$ ha una soluzione non banale in $H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Dimostrazione.
Il funzionale $J(u) = \dfrac{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{2} - \dfrac{\int_\Omega |u|^{p+1}}{p+1}$ ha la struttura di passo montano e, per il teorema di Strauss 63, vale PS per $J|_{H^1_r(\mathbb{R}^N)}$; dunque, per il teorema 35,

$J|_{H^1_r(\mathbb{R}^N)}$ ammette un punto critico $\widetilde{u}$, che soddisfa $J'(\widetilde{u}) \perp H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)$, e la tesi seguirà mostrando che $J'(\widetilde{u}) = 0$; definendo, per $\sigma \in O(n)$, $v_\sigma(x) = v\left(\sigma^{-1}(x)\right)$, si ha $J(v_\sigma) = J(v)$ e $J'(v_\sigma) = (J'(v))_\sigma$, dunque essendo $\widetilde{u}_\sigma = \widetilde{u}$ si avrà $J'(\widetilde{u}) = J'(\widetilde{u})_\sigma$, cioè $J'(\widetilde{u}) \in H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)$, ma essendo anche $J'(\widetilde{u}) \in H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)^\perp$ si dovrà avere $J'(\widetilde{u}) = 0$. $\square$

Osservazione 47.

1. Le soluzioni trovate sono regolari e all'infinito decadono a zero esponenzialmene; inoltre, un risultato di Kwong afferma che le soluzioni positive sono uniche in $H^1_r\left(\mathbb{R}^N\right)$.

2. Un risultato di Gidas, Ni e Nirenberg afferma che una soluzione $0 < u \in C^2\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ che decade a zero all'infinito dev'essere radiale e radialmente decrescente.

3. Un risultato di Berestycki e Lyons afferma che, per $p \geq \dfrac{N+2}{N-2}$, l'equazione $-\Delta u + u = |u|^{p-1}u$ non ha soluzioni positive in $L^{p+1}(\Omega)$.

4. Le soluzioni si possono trovare, equivalentemente, come minimizzatori del problema $\inf\limits_{0 \not\equiv u \in H^1(\mathbb{R}^N)} \dfrac{\int_\Omega \left(\|\nabla u\|^2 + u^2\right)}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}$

Lemma 65 (Brézis-Lieb)**.**
Sia $N \geq 2$*,* $q \in \left(2, \dfrac{2N}{N-2}\right)$ *e* $u_k \in H^1_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ *tale che* $u_k \underset{k \to +\infty}{\to} u$*.*
Allora,

$$\|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} - \|u_k - u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \underset{k \to +\infty}{\to} \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

Dimostrazione.
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che $\left||a+b|^q - |a|^q - |b|^q\right| \leq \varepsilon|a|^q + C_\varepsilon|b|^q$; dunque, posta $v_k := \left||u_k|^q - |u_k - u|^q - |u|^q\right|$, si ha $|v_k| - \varepsilon|u_k - u|^q \leq C_\varepsilon|u|^q$ e quindi, poiché a meno di estratte $u_k \underset{k \to +\infty}{\to} u$ q.o., si può applicare il teorema di convergenza dominata per ottenere che $\displaystyle\int_\Omega v_k - \varepsilon|u_k - u|^q \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, quindi, essendo ε arbitrario e $u_k - u$ limitato in $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\displaystyle\int_\Omega v_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ e cioè

$$\|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} - \|u_k - u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} - \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$$

$\square$

Lezione 24 – 15/2/2012

Teorema 66.
Sia $N \geq 2$*,* $p \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$*,* $V \in C\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$ *tale che* $0 < V \leq 1$*,* $V \not\equiv 1$ *e* $V(x) \underset{|x| \to +\infty}{\to} 1$*.*

Allora, l'equazione $-\Delta u + Vu = |u|^{p-1}u$ *ha una soluzione non banale* $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ *che realizza* $S_V := \inf_{0\not\equiv u \in H^1(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u\|^2 + Vu^2\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}$

Dimostrazione.
Sia u_k una successione minimizzante per S_V, che per l'invarianza per dilatazione si può supporre con $\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$; se $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u$, allora poiché $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u$ in $L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $V(x) \underset{|x|\to+\infty}{\to} 1$ si ha $\int_{\mathbb{R}^N} V(u_k-u)^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(u_k-u)^2 + o(1)$ e inoltre dal lemma di Brézis-Lieb 65 si ricava

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u_k\|^2 + Vu_k^2\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u\|^2 + Vu^2\right) + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla(u_k-u)\|^2 + V(u_k-u)^2\right) + o(1)$$

e che esiste $\lambda \in [0,1]$ tale che

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}}{\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{p+1}} \underset{k\to+\infty}{\to} \lambda \quad \frac{\int_{\mathbb{R}^N}|u_k-u|^{p+1}}{\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{p+1}} \underset{k\to+\infty}{\to} 1-\lambda$$

e dunque, posto $S_p := \inf_{0\not\equiv u\in H^1(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u\|^2 + u^2\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}$, si avrà

$$S_V = \lim_{k\to+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u\|^2 + Vu^2\right) + \|u_k-u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq$$

$$\geq \lim_{k\to+\infty} \frac{S_V\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}} + S_p\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_k-u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} = \lambda S_V + (1-\lambda)S_p$$

e dunque dev'essere $\lambda = 1$, perché altrimenti $S_V \geq S_p$, che è assurdo perché S_p è raggiunta da una funzione mai nulla; pertanto

$$S_V = \lim_{k\to+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u\|^2 + Vu^2\right) + \|u_k-u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq$$

$$\geq S_V + \frac{\|u_k-u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_k|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}$$

e dunque $\|u_k-u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, quindi u realizza S_V ed è, a meno di costanti, soluzione dell'equazione. $\square$

Osservazione 48.
Se u_k è di Palais-Smale per il funzionale associato $J : u \to \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\|\nabla u\|^2 + Vu^2\right)}{2} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}}{p+1}$, allora esiste una soluzione (eventualmente nulla) u e $x_{k,i} \in \mathbb{R}^N$, per $i = 1, \ldots, m$, tali che $\|x_{k,i}\| \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$, $\|x_{k,i} - x_{k,j}\| \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ per ogni $i \neq j$ e m soluzioni u_i del problema con $V \equiv 1$ tale che $\left\|u_k - u - \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot - x_{k,i})\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$

Definizione 39.
Sia $N \geq 3$.
Si definisce $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ come la chiusura di $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ rispetto alla norma $\sqrt{\int_\Omega \|\nabla \cdot\|^2}$.

Definizione 40.
Sia $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ misurabile e tale che $\mu(t) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > t\right\}$ ha misura finita per ogni $t > 0$ e $u^*(x) := \sup\left\{t > 0 : \mu(t) > \frac{\omega_{N-1}}{N}|x|^N\right\}$.
u^* è il **riarrangiamento sferico decrescente** di u.

Lemma 67.
Sia $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ misurabile e tale che $\mu(t) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > t\right\}$ ha misura finita per ogni $t > 0$, e u^* il suo riarrangiamento sferico decrescente.
Allora:

1. *u^* è radiale.*
2. *Se $|x_1| < |x_2|$ allora $u^*(x_1) \geq u^*(x_2)$.*
3. $\left|\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > t\right\}\right| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^*(x) > t\right\}\right|$.
4. *Se $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ allora $u^* \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.*
5. *Se $u \in \mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ allora $u^* \in \mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u^*\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^2$.*

Dimostrazione.

1. Segue dalla definizione.
2. Segue dalla definizione.
3. Segue dalla definizione.
4. Posto $E_t = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > t\right\}$, si ha $\chi_{E_t}(x) = \chi_{[0,|u(x)|)}(t)$, dunque

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_0^{+\infty} \chi_{[0,|u(x)|)}(t)dt = \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{E_t}(x)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > t^{\frac{1}{p}} \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |u^*(x)| > t^{\frac{1}{p}} \right\} = \int_{\mathbb{R}^N} |u^*|^p$$

5. Dalla formula di coarea, per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f \in W^{1,1}(\Omega)$ si ha $\displaystyle\int_\Omega \|\nabla f\| = \int_{\mathbb{R}} P\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > t\right\}, \Omega\right) dt$, dunque poiché dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene $\displaystyle\int_{E_t} \|\nabla u\| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \sqrt{|E_t|} < +\infty$, allora per ogni aperto $A_t \supset E_t$ si ha

$$\int_{E_t} \|\nabla u\| = \int_{\mathbb{R}} P(E_s, A_t) ds = \int_t^{+\infty} P\left(E_s, \mathbb{R}^N\right) ds$$

e dunque $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{E_t} \|\nabla u\| = -P\left(E_t, \mathbb{R}^N\right)$; inoltre, applicando nuovamente Hölder per $t, h > 0$,

$$\frac{\int_{E_t \setminus E_{t+h}} \|\nabla u\|}{h} \leq \sqrt{\frac{\int_{E_t \setminus E_{t+h}} \|\nabla u\|^2}{h}} \sqrt{\frac{|E_t| - |E_{t+h}|}{h}}$$

e quindi, passando al limite per $h \to 0$,

$$P\left(E_t, \mathbb{R}^N\right) = -\frac{d}{dt}\int_{E_t} \|\nabla u\| \leq \sqrt{-\frac{d}{dt}\int_{E_t} \|\nabla u\|^2} \sqrt{-\mu'(t)}$$

Infine, se $u^*(x) = v(|x|)$, allora $\mu(v(|x|)) = \dfrac{\omega_{N-1}}{N}|x|^N$, dunque $\mu'(v(|x|))v'(|x|) = \omega_{N-1}|x|^{N-1}$ e quindi

$$|x| = \left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}} (\mu(v(|x|)))^{\frac{1}{N}}$$

e

$$v'(|x|) = \frac{\omega_{N-1}|x|^{N-1}}{\mu'(v(|x|))} = \frac{N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \mu(v(|x|))^{\frac{N-1}{N}}}{\mu'(v(|x|))}$$

Pertanto, dalla disuguaglianza perimetrica $|E|^{\frac{N-1}{N}} \leq \dfrac{P\left(E, \mathbb{R}^N\right)}{N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}}$ si può concludere:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^2 = \int_0^{+\infty} dt \left(-\frac{d}{dt}\int_{E_t} \|\nabla u\|^2\right) \geq \int_0^{+\infty} \frac{P\left(E_t, \mathbb{R}^N\right)^2}{-\mu'(t)} dt \geq$$

$$\geq \int_0^{+\infty} \frac{\left(N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \mu(t)^{\frac{N-1}{N}}\right)^2}{-\mu'(t)} dt \overset{(t=v(\rho))}{=} \omega_{N-1} \int_0^{+\infty} v'(\rho)^2 \rho^{N-1} d\rho =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u^*\|^2$$

□

Lezione 25 – 16/2/2012

Teorema 68 (Aubin, Talenti)**.**
Sia $N \geq 3$ *e* $S_N = \inf_{0 \not\equiv u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}}}$.
Allora, S_N *è assunto da* $u(x) = \left(\frac{1}{1+\|x\|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}$.

Dimostrazione.
Dal lemma 67, se S_N è raggiunto, lo è da una funzione radiale $u(x) = v(|x|)$ che, per la regolarità ellittica, è anche liscia, e può ovviamente essere supposta positiva; definendo $\widetilde{u}(t) = e^t v\left(e^{\frac{2}{N-2}t}\right)$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^2 = \omega_{N-1} \int_0^{+\infty} v'(\rho)^2 \rho^{N-1} d\rho \overset{\left(\rho = e^{\frac{2}{N-2}t}\right)}{=}$$

$$= \frac{N-2}{2}\omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}'(t)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{N-2}{2}\omega_{N-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widetilde{u}(t)^2 + \widetilde{u}'(t)^2\right) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{u}(t)\widetilde{u}'(t) dt\right) =$$

$$= \frac{N-2}{2}\omega_{N-1} \left(\|\widetilde{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R})} - \widetilde{u}(t)^2|_{-\infty}^{+\infty}\right) = \frac{N-2}{2}\omega_{N-1} \|\widetilde{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}} = \omega_{N-1} \int_0^{+\infty} v(\rho)^{\frac{2N}{N-2}} \rho^{N-1} d\rho \overset{\left(\rho = e^{\frac{2}{N-2}t}\right)}{=}$$

$$= \frac{2}{N-2}\omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{u}(t)^{\frac{2N}{N-2}} dt$$

dunque $S_N = \inf_{0 \leq \widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R})} \frac{\frac{N-2}{2}\omega_{N-1} \|\widetilde{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R})}}{\left(\frac{2}{N-2}\omega_{N-1} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{u}|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N}{N-2}}}$, e inoltre si può applicare nuovamente il riarrangiamento sferico decrescente per passare a $\widetilde{v}(t)$ pari e decrescente per $t > 0$, e dunque l'estremale è raggiunto per le proprietà degli spazi di Sobolev 1-dimensionali; gli estremali risolvono, a meno di costanti, $-\widetilde{v}'' + \widetilde{v} = \widetilde{v}^{\frac{N+2}{N-2}}$, e le soluzioni di questa equazione hanno come costante del moto $h := \frac{\widetilde{v}'^2}{2} - \frac{\widetilde{v}^2}{2} + \frac{N-2}{2N}\widetilde{v}^{\frac{2N}{N-2}}$; essendo $\widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R})$, $\widetilde{v}(t) \underset{t \to \pm\infty}{\to} 0$, quindi $\lim_{t \to \pm\infty} \widetilde{v}'(t)^2 = \lim_{t \to \pm\infty} h(t) = h(0)$, ma $\widetilde{v}' \in L^2(\mathbb{R})$ e perciò $h(0) = 0$; inoltre, dalla parità segue $\widetilde{v}'(0) = 0$ e quindi $\frac{\widetilde{v}(0)^2}{2} = \frac{N-2}{2N}\widetilde{v}(0)^{\frac{2N}{N-2}}$, da cui $\widetilde{v}(0) = \left(\frac{N}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{4}}$;

pertanto, l'unico estremale è la soluzione di $\begin{cases} -\widetilde{v}'' + \widetilde{v} = \widetilde{v}^{\frac{N+2}{N-2}} \\ v(0) = \left(\frac{N}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{4}} \\ v'(0) = 0 \end{cases}$, cioè $\widetilde{v}(t) = \dfrac{\left(\frac{N}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{4}}}{\cosh\left(\frac{2}{N-2}t\right)^{\frac{N-2}{2}}}$,

e quindi $v(|x|) = \dfrac{\widetilde{v}\left(\frac{N-2}{2}\log|x|\right)}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} = \dfrac{\left(\frac{4N}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{4}}}{(1+\|x\|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$. □

Osservazione 49.
Se S_N è raggiunto da u, è raggiunto anche da $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{N-2}{2}} u(\lambda x)$.

Osservazione 50.
Un risultato di Caffarelli, Gidas e Spruck afferma che tutt le soluzioni positive di $-\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}}$ sono del tipo $u(x) = (2N)^{\frac{N-2}{4}}\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda\|x-\widetilde{x}\|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}$ per qualche $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Lemma 69.
Sia $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e, per $\lambda < \lambda_1(\Omega)$, $J \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ definito come

$$J(u) = \frac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{N-2}{2N}\int_\Omega |u|^{\frac{2N}{N-2}}$$

Allora, J_λ soddisfa PS-c per ogni $c < \dfrac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N}$.

Dimostrazione.
Sia u_k di PS-c; allora, a meno di estratte, $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ in $H_0^1(\Omega)$ e dunque

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \langle J'_\lambda(u_k), u\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\int_\Omega \langle\nabla u_k, \nabla u\rangle - \lambda\int_\Omega u_k u - \int_\Omega |u_k|^{\frac{4}{N-2}} u_k u\right) =$$

$$= \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \lambda\int_\Omega u^2 - \int_\Omega |u|^{\frac{2N}{N-2}}$$

e quindi $J_\lambda(u) = \dfrac{\int_\Omega |u|^{\frac{2N}{N-2}}}{N}$; inoltre, dal lemma di Brézis-Lieb 65 si ha

$$\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u_k - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + o(1)$$

e

$$\|u_k\|^{\frac{2N}{N-2}}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} = \|u_k - u\|^{\frac{2N}{N-2}}_{L^{2N}N-2(\Omega)} + \|u\|^{\frac{2N}{N-2}}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} + o(1)$$

mentre dalla compattezza dell'embedding $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1_0(\Omega)$ segue che $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} u$ in $L^2(\Omega)$; dunque,

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \langle J'_\lambda(u_k), u_k\rangle_{H^1_0(\Omega)} = \lim_{k\to+\infty} \left(\|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda \int_\Omega u_k^2 - \int_\Omega |u_k|^{\frac{2N}{N-2}} \right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u - u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda \int_\Omega u^2 - \int_\Omega |u|^{\frac{2N}{N-2}} - \int_\Omega |u_k - u|^{\frac{2N}{N-2}} \right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\|u - u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega |u_k - u|^{\frac{2N}{N-2}} \right)$$

e dunque, per concludere basterà mostrare che

$$\alpha := \lim_{k\to+\infty} \|u - u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |u_k - u|^{\frac{2N}{N-2}} = 0$$

Tuttavia, poiché dalla disuguaglianza di Sobolev segue $S_N \alpha^{\frac{N}{N-2}} \le \alpha$, se fosse $\alpha \neq 0$ si avrebbe $S_N^{\frac{N}{2}} \le \alpha$, ma allora

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} > c = \lim_{k\to+\infty} J_\lambda(u_k) = J_\lambda(u) + \frac{\alpha}{N} \ge \frac{\alpha}{N} \ge \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$$

che è assurdo. □

Osservazione 51.
Un risultato di Brézis e Nirenberg afferma che l'equazione $-\Delta u = \lambda u + u^{\frac{N+2}{N-2}}$ ammette soluzioni non banali in $H^1_0(\Omega)$ per ogni $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$ se $N \ge 4$ e per $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1(\Omega)}{4}, \lambda_1(\Omega) \right)$ se $N = 3$ e $\Omega = B_1(0)$; infatti, per $N \ge 4$ c'è un valore di passo montano a livello $c < \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N}$: posta $U(x) = \left(\frac{1}{1 + \|x\|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}$, $U_\varepsilon(x) = \frac{U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}$ e $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ con $0 \le \varphi \le 1$ e $\varphi|_{B_r(x)\Subset\Omega} \equiv 1$, si dimostra che, per $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$ e ε sufficientemente piccolo, si ottiene $\sup_{t\ge 0} J_\lambda(t\varphi U_\varepsilon) < \frac{S_N^{\frac{N}{2}}}{N}$.