Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2008-2009, III sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 1 (15 Gennaio 2010)

1.1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{x^3-ax^2+x-a}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)(x-a)}dx$ ha una singolarità di ordine 1 in $x=a$ se $a \neq 2$ e quindi l'integrale diverge; viceversa, se $a=2$, l'integrale vale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

1.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0$ per la regola di De l'Hopital e perché $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$.

$0 \leq n \int_1^{+\infty} e^{-nx^2}dx \overset{y=\sqrt{n}x}{=} \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-y^2}dy \leq \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-y}dy = \sqrt{n}[-e^{-y}]_{\sqrt{n}}^{+\infty} =$
$= ne^{-\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-nx^2}dx = 0.$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^3}{e^n-n^2}$ converge per il criterio di Leibniz: infatti $\frac{n^3}{e^n-n^2}$ è infinitesima e definitivamente decrescente perché $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{e^x-x^2} = \frac{e^x\left(3x^2-x^3\right)-x^4}{\left(e^x-x^2\right)^2} \leq 0$ se $x \geq 3$

1.4 $\begin{cases} \dot{x} = 2x^2y\left(x^2+2y^2-1\right) \\ \dot{y} = -2xy^2\left(2x^2+y^2-1\right) \end{cases}$

1. Cerchiamo una funzione $H(x,y)$ tale che $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 2x^4y+4x^2y^3-2x^2y \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -4x^3y^2-2xy^4+2xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x,y) = x^4y^2+x^2y^4-x^2y^2+f(x) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = x^4y^2+x^2y^4-x^2y^2+g(y) \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow H(x,y) = x^2y^2\left(x^2+y^2-1\right)$.
2. I punti di equilibrio sono tutti e soli quelli che verificano $\begin{cases} 2x^2y\left(x^2+2y^2-1\right) = 0 \\ -2xy^2\left(2x^2+y^2-1\right) = 0 \end{cases}$, ovvero i punti degli assi cartesiani e quelli in cui $x^2+2y^2-1 = 0 = 2x^2+y^2-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 = 1-x^2-y^2 = x^2$; sostituendo nella prima equazione otteniamo $3x^2-1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, dunque oltre agli assi cartesiani abbiamo altri quattro punti: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
Per discutere la stabilità di questi punti consideriamo la matrice Hessiana della funzione H: $D_H^2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2y^2+2y^4-2y^2 & 8x^3y+8xy^3+4xy \\ 8x^3y+8xy^3-4xy & 2x^4+12x^2y^2-2x^2 \end{pmatrix}$:
poiché in questi 4 punti l'Hessiana vale $\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$, che ha traccia e

determinante positivi, questi punti sono di minimo per H e dunque per il teorema di Ljapunov sono stabili.

3. Il moto avviene sulle curve di livello della funzione H: la curva $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2y^2\left(x^2+y^2-1\right)=0\}$ è formata dai due assi cartesiani e dalla circonferenza centrata nell'origine di raggio 1, mentre le altre curve possono essere disegnate per continuità; quanto ai versi di percorrenza, dalle equazioni che descrivono il moto deduciamo che, al di fuori del disco unitario, nel semipiano superiore la variabile x cresce mentre in quello inferiore decresce; questo ci permette anche di dire che tutti i punti appartenenti agli assi cartesiani sono instabili, perché è possibile trovare punti arbitrariamente vicini agli assi in cui $|(x(t),y(t))| \overset{t\to+\infty}{\to} \infty$.

1.5 Sia $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4, |y|\le\sqrt{3}x\right\}=\{(\rho,\theta)\in(0,+\infty)\times[0,2\pi] : 1\le\rho^2\le 4, |\rho\sin\theta|\le\sqrt{3}\rho\cos\theta\right\}$, ove (ρ,θ) rappresentano le usuali coordinate polari: la prima condizione equivale a dire $\rho\in[1,2]$ mentre la seconda è equivalente a $-\sqrt{3}\cos\theta\le\sin\theta\le\sqrt{3}\cos\theta\Leftrightarrow\tan\theta\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\Rightarrow$ $\Rightarrow\theta\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$; dunque, passando a coordinate polari (e ricordando di moltiplicare la funzione integranda per il determinante della jacobiana della trasformazione) otteniamo che $\int_D\frac{|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2 d\rho\frac{\rho^2|\sin\theta|}{\rho^4}=$ $=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\int_1^2\frac{d\rho}{\rho^2}=2[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}\left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^2=\frac{1}{2}$.

2.1 $30=2*3*5=(1+i)(1-i)3(3+2i)(3-2i)$, e questa scomposizione è in fattori irriducibili perché 3 ha norma 9 e non può essere scritto come prodotto di elementi di norma 3 perché non ve ne sono in $\mathbb{Z}[i]$ mentre gli altri fattori hanno norma 2 oppure 5 che sono primi, ove con norma di un numero complesso indichiamo il quadrato della parte reale più il quadrato della parte immaginaria; di conseguenza, gli ideali primi e massimali (i due concetti coincidono perché $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio euclideo) contenenti $\langle 30\rangle$ sono $\langle 1+i\rangle$, $\langle 1-i\rangle$, $\langle 3\rangle$, $\langle 3+2i\rangle$ e $\langle 3-2i\rangle$. Questo ci permette di dire che gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}[i]/\langle 30\rangle$ sono tutti e soli quelli generati da $1+i+\langle 30\rangle$, $1-i+\langle 30\rangle$, $3+\langle 30\rangle$, $3+2i+\langle 30\rangle$ e $3-2i+\langle 30\rangle$, per la corrispondenza biunivoca tra gli ideali di $\mathbb{Z}[i]$ contenenti $\langle 30\rangle$ e quelli di $\mathbb{Z}[i]/\langle 30\rangle$.

2.2 Se il piano contenente r e s contiene l'origine, questo in particolare sarà il piano contenente la retta r e l'origine e cioè $z=0$; dunque, le rette ammissibili sono tutte e sole quelle contenute nel piano $z=0$ e contenenti il punto $(0,2,0)$, cioè quelle aventi equazioni parametriche $\left\{\begin{array}{l} x=at \\ y=bt+2 \\ z=0 \end{array}\right.$ al variare di $a,b\in\mathbb{R}$.

2.3 Innanzi tutto, $\varphi(v)=\varphi_1v_1+\ldots+\varphi_nv_n, \psi(v)=\psi_1v_1+\ldots+\psi_nv_n\ \forall v=(v_1,\ldots,v_n)\in V$ per opportuni $\varphi_i,\psi_i\in\mathbb{K}$, dunque $\ker(\varphi)\cap\ker(\psi)=\left\{v\in V : \left\{\begin{array}{l}\varphi_1v_1+\ldots+\varphi_nv_n=0 \\ \psi_1v_1+\ldots+\psi_nv_n=0\end{array}\right.\right\}$, ma per il teorema di Rouché-Capelli le soluzioni del sistema $\begin{cases} \varphi_1 v_1 + \ldots + \varphi_n v_n = 0 \\ \psi_1 v_1 + \ldots + \psi_n v_n = 0 \end{cases}$ sono un sottospazio di dimensione $n-1 \Leftrightarrow$ la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ ha rango 1, che equivale a dire che $a_i = cb_i\ \forall i = 1, \ldots, n$ per un opportuno $c \in \mathbb{K}$, ovvero $\varphi = c\psi$.

2.4 La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; poiché $\det(A) =$ $= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, inoltre, posta $A_0 := A(23|23) =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_0) = 6 > 0$, dunque la conica è un'ellisse; per trovarne il centro è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} -2 + 2X + 2Y = 0 \\ -1 + 2X + 5Y = 0 \end{cases}$, quindi il centro è $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; i due assi di simmetria sono le rette passanti per il centro e aventi le direzioni dei due autovettori di A_0: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$, $V_1 = \begin{cases} X + 2Y = 0 \\ 2X + 4Y = 0 \end{cases} = \langle(-2, 1)\rangle$, $V_6 = \begin{cases} -4X + 2Y = 0 \\ 2X - Y = 0 \end{cases} = \langle(1, 2)\rangle$, dunque i due assi sono $\begin{cases} x = -2t + \frac{4}{3} \\ y = t - \frac{1}{3} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = t + \frac{4}{3} \\ y = 2t - \frac{1}{3} \end{cases}$.
Per ridurre a forma canonica la conica, eliminiamo innanzi tutto i termini misti diagonalizzando A_0 attraverso matrici ortogonali, dunque poiché una base ortonormale di autovettori di A_0 è $\left(\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$ e quindi con il cambio di variabile $\begin{cases} X = -\frac{2}{\sqrt{5}}X' + \frac{Y'}{\sqrt{5}} \\ Y = \frac{X'}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}Y' \end{cases}$ si ottiene che $2 + \frac{6}{\sqrt{5}}X' + X'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}Y' + 6Y'^2 = 0$; a questo punto, per ottenere la forma canonica elimino i termini di primo grado: $\begin{cases} X' = X'' - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ Y' = Y'' + \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} + X''^2 + 6Y''^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{X''}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{Y''}{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\right)^2 = 1.$

2.5 $W : \{f \in V : f((1, 0, 1)) = (0, 1, 0), f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)\}$.

1. W non è un sottospazio di V perché non contiene l'omomorfismo nullo 0, cioè quello che manda tutti i vettori nel vettore nullo, perché chiaramente $0(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \neq (0, 1, 0)$ e $0(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$.
2. Essendo tutte le f applicazioni lineari, si ha che $f(1, 0, 0) + f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ e $f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$, dunque se $f(1, 0, 0) = (a, b, c)$ allora $f(0, 1, 0) = (1 - a, -b, 1 - c)$ e $f(0, 0, 1) = (-a, 1 - b, -c)$ e quindi la matrice che rappresenta una generica $f \in W$ è $\begin{pmatrix} a & 1-a & -a \\ b & -b & 1-b \\ c & 1-c & -c \end{pmatrix}$.

3. Affinché f sia un isomorfismo è sufficiente che la sua matrice abbia determinante diverso da 0, ma $\begin{vmatrix} a & 1-a & -a \\ b & -b & 1-b \\ c & 1-c & -c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -b & 1-b \\ 1-c & -c \end{vmatrix} -$ $-(1-a) \begin{vmatrix} b & 1-b \\ c & -c \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} b & -b \\ c & 1-c \end{vmatrix} = a(bc-1+c+b-bc)+$ $+(a-1)(-bc+bc-c)-a(b-bc+bc) = -a+ac+ab-ac+c-ab = c-a$, dunque f è un isomorfismo $\Leftrightarrow a \neq c$.

4. $(1,1,1) \in \ker(g) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1-a & -a \\ b & -b & 1-b \\ c & 1-c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ma $\begin{pmatrix} a & 1-a & -a \\ b & -b & 1-b \\ c & 1-c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-b \\ 1-c \end{pmatrix}$, quindi l'unica g con questa proprietà è quella in cui $(a,b,c) = (1,1,1)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2008-2009, III sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (20 Gennaio 2010)

1.1 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x\sin x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{1+2x^4}-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\log\left(1+x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)-\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)+1}{1+\frac{2x^4}{2}+o\left(2x^4\right)-1}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)-\frac{\left(x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2}{2}+o\left(\left(x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2\right)-x^2-\frac{x^4}{2}}{x^4+o\left(x^4\right)}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{7}{6}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}=-\dfrac{7}{6}.$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-2\cosh\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)$ convergono entrambe per il criterio del confronto con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: infatti, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n^2}}-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)+1}{\frac{1}{n^2}}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-2\cos x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}+2\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=2$ e

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n^2}}-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)+1}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-2\cosh x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2\sinh x}{2x}=$

$=\lim_{x\to 0}\left(e^{x}-\dfrac{\sinh x}{x}\right)=0.$

1.3 Sia $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le 1, x>0, y>0, z>0\right\}=$
$=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\in(0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]:\rho^2\le 1,\rho\cos\theta\sin\varphi>0,\rho\sin\theta\sin\varphi>0,\rho\cos\varphi>0\right\}=$
$=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\in(0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$, ove (ρ,φ,θ) sono le usuali coordinate polari; dunque, $\int_D\dfrac{xyz}{(1-x^2-y^2-z^2)^\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1\dfrac{\rho^5}{(1-\rho^2)^\alpha}d\rho=$
$\left[\dfrac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\dfrac{\rho^5}{(1+\rho)^\alpha(1-\rho)^\alpha}d\rho=\dfrac{1}{8}\int_0^1\dfrac{\rho^5}{(1+\rho)^\alpha(1-\rho)^\alpha}d\rho$; poiché l'ultimo integrale ha una singolarità di ordine α in $\rho=1$, converge $\Leftrightarrow\alpha<1$.

1.4 $V(x)=\dfrac{\alpha}{4}x^4+\dfrac{x^2}{2}$

1. Il sistema meccanico associato è $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-V'(x)=-\alpha x^3-x\end{cases}$, dunque se $\alpha\ge 0$ l'unico punto di equilibrio è $(x,y)=(0,0)$, mentre se $\alpha<0$ ce ne sono altri due: $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{-\alpha}},0\right)$.
2. $V''(x)=3\alpha x^2+1$, dunque $V''(0)=1>0$ e quindi l'origine, essendo un minimo per il potenziale, è sempre stabile, mentre $V''\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{-\alpha}}\right)=$ $=-1<0$, quindi questi due punti sono di massimo per il potenziale e dunque instabili.

3. Dal grafico del piano delle fasi deduciamo che se $\alpha \geq 0$ le curve di livello sono definite solamente per $x \in [x_-, x_+]$ e dunque tutte le traiettorie sono periodiche ad eccezione di quella in cui $E := V(x) + \frac{y^2}{2} = 0$, che contiene solo il punto di equilibrio; se invece $\alpha < 0$, questo è vero solo per valori di energia minori di quello dei due p.d.e. instabili, cioè $0 < E < \frac{1}{2\alpha}$.

1.5 $f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$: per il teorema fondamentale del calcolo, $\nabla f(x,y) = \left(-e^{-x^2}, e^{-y^2}\right)$ non si annulla mai, dunque $\min_E f$, $\max_E f$ saranno raggiunti necessariamente sul bordo dell'insieme e pertanto, per il principio dei moltiplicatori di Lagrange, risolveranno il sistema $\left\{-e^{-x^2} = 2\lambda x e^{-y^2} = 2\lambda y x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{e^{-(-x)^2}}{-x} = -\frac{e^{-x^2}}{x} = 2\lambda = \frac{e^{-y^2}}{y}\right.$, dunque dall'iniettività della funzione $\frac{e^{-x^2}}{x}$ $\left(\frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{-2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}}{x^2} < 0\right)$ deduciamo che $y = -x$ e sostituendo infine nell'ultima equazione abbiamo che $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; dunque, $\max_E f = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt$ e $\min_E f = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt =$ $= -\int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt$; infine, $\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x,y)$ non esiste, perché $f(x,x) = \int_x^x e^{-t^2} dt = 0$ e $f(x,-x) = \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt \overset{x \to \infty}{\to} \sqrt{\pi}$.

2.1 $G = (\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15}), \cdot) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ ha 8 elementi, dunque tutti i suoi sottogruppi propri avranno 2 o 4 elementi: i primi saranno generati dagli elementi di ordine due e dunque sono $\langle 4 \rangle, \langle 11 \rangle, \langle 14 \rangle$ mentre i secondi possono essere generati da un elemento di ordine quattro o da due di ordine due e quindi sono $\langle 2 \rangle = \langle 8 \rangle, \langle 7 \rangle = \langle 13 \rangle, \langle 4, 11 \rangle = \langle 4, 14 \rangle = \langle 11, 14 \rangle$. Per trovare due gruppi H e K tali che G sia loro prodotto interno è sufficiente prendere H con due elementi e K che non contenga H: infatti, essendo G abeliano tutti i suoi sottogruppi sono normali, inoltre $H \cap K \neq H \Rightarrow H \cap K = \{1\}$ e $\langle H, K \rangle \neq K \Rightarrow \langle H, K \rangle = G$; dunque abbiamo quattro scelte possibili in tutto: K può essere $\langle 2 \rangle$ oppure $\langle 7 \rangle$ mentre per H si può prendere $\langle 11 \rangle$ oppure $\langle 14 \rangle$.

2.2 $A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$.

1. $r(A) < 3 \Leftrightarrow 0 \neq \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} h & h \\ 0 & h-1 \end{vmatrix} +$ $+(h-1)\begin{vmatrix} h & h \\ h^2 - h & 1 \end{vmatrix} = h - h^2 + (h-1)\left(h^2 - h^3 + h\right) = -h^4 + 2h^3 - h^2 =$ $= -h^2(h-1)^2$, dunque A ha rango minore di 3 $\Leftrightarrow h = 0 \vee \pm 1$.

2. $h=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$
$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2-1\right)$, dunque A ha tre autovalori distinti (0 e ± 1) e pertanto è diagonalizzabile

2.3 $V := \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ perché se $X, Y \in V \Rightarrow$ $\Rightarrow A(aX+bY) = aAX + bAY = aXA + bYA = (aX+bY)A$. Per trovare la dimensione di V notiamo che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} z-y & w-x-y \\ x+z-w & y-z \end{pmatrix}$, dunque la dimensione di V sarà pari a quella delle soluzioni di $\begin{cases} z-y=0 \\ w-x-y=0 \\ x+z-w=0 \\ y-z=0 \end{cases}$: le prime due equazioni sono indipendenti, mentre la terza è la loro differenza e la quarta è la prima cambiata di segno, dunque le soluzioni del sistema hanno dimensione 2 e quindi anche $\dim(V) = 2$.

2.4 Mostriamo che se $a_0 v + a_1 Lv + \ldots + a_{m-1}L^{m-1}v = 0$, allora $a_i = 0 \ \forall i = 0, \ldots, n$: per $i=0$ è vero perché $0 = L^{m-1}(a_0 v + a_1 Lv + \ldots + a_{m-1}L^{m-1}v) =$ $= a_0 L^{m-1}v + (a_1 + a_2 L + \ldots + a_{m-1}L^{m-2})L^m v = a_0 L^{m-1} v \Rightarrow a_0 = 0$; supponiamo ora che sia vero per $i = 0, \ldots, k-1$ e mostriamo che è vero anche per $i=k$: se $a_0 = \ldots = a_{k-1} = 0$, allora ho che $a_k L^k v + \ldots + a_{m-1}L^{m-1}v = 0$ e dunque $0 = L^{m-k-1}(a_k L^k v + \ldots + a_{m-1}L^{m-1}v) = a_k L^{m-1}v + (a_{k+1} + a_{k+2}L +$ $+ \ldots + a_{m-1}L^{m-k-2})L^m v = a_k L^{m-1} v \Rightarrow a_k = 0$.

2.5 $V = C([0,1], \mathbb{R})$

1. $\langle \alpha f + \beta h, g \rangle := \int_0^1 (\alpha f(x) + \beta h(x))g(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)g(x)dx +$ $+\beta \int_0^1 h(x)g(x)dx = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle h, g\rangle$ e analogamente si ottiene la linearità nel secondo argomento, inoltre $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx =$ $= \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle$, $\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$ e vale l'uguaglianza solamente se $f \equiv 0$, dunque $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare su V.
2. Poste $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ troviamo una base ortogonale $g_1(x), g_2(x)$ al sottospazio da loro generato attraverso il procedimento di Gram-Schmidt: $g_1(x) = f_1(x) = x$, $g_2(x) = f_2(x) - \dfrac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1(x) = x^2 - \dfrac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} x =$ $= x^2 - \dfrac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1} x = x^2 - \dfrac{3}{4}x$; a questo punto, una base ortonormale

$$\text{sarà} \left\{ \frac{g_1}{\sqrt{\langle g_1, g_1 \rangle}}, \frac{g_2}{\sqrt{\langle g_2, g_2 \rangle}} \right\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{\int_0^1 x^2 dx}}, \frac{x^2 - \frac{3}{4}x}{\sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)^2 dx}} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{x}{\sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}}, \frac{x^2 - \frac{3}{4}x}{\sqrt{\int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx}} \right\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{3}}}, \frac{x^2 - \frac{3}{4}x}{\sqrt{\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{16}x^3\right]_0^1}} \right\} =$$

$$= \left\{ \sqrt{3}x, \sqrt{80}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) \right\} = \left\{ \sqrt{3}x, 4\sqrt{5}x^2 - 3\sqrt{5}x \right\}.$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2008-2009, III sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 3 (25 Gennaio 2010)

1.1 $f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$, dunque per il teorema fondamentale del calcolo $f'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} > 0$ e quindi la funzione è monotona crescente; inoltre, $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\frac{1}{(1-x)^2} > 0$ e quindi la funzione è convessa; infine, la funzione può essere estesa per continuità in $x = 1$ perché $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt < +\infty$ perché ha lo stesso andamento di $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$, quindi f è anche limitata.

1.2 $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \; \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y| \; \forall x \neq y$, in particolare passando al $\lim_{y\to x}$ otteniamo che $f'(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, dunque f è costante.

1.3 $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k - 1}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j - 1}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{2^n} =$
$= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e}$.

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = x\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n =$
$= \frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 6$, ove la derivazione termine a termine è possibile perché la serie di potenze converge puntualmente e la serie delle derivate converge uniformemente in $[-1+\delta, 1-\delta] \; \forall \delta \in (0,1)$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} |nx^{n-1}| =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\delta)^{n-1} < \infty$.

1.5 $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 \\ \dot{y} = 4x\left(4x^2 - 1\right) \end{cases}$.

1. $H(x,y) = \left(y - 2x^2\right)\left(y - 1 + 2x^2\right) = y^2 - y + 2x^2 - 4x^4 \Rightarrow \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) =$
$= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}(t) = \left(4x - 16x^3\right)(2y-1) + (2y-1)4x\left(4x^2-1\right) = 0$, dunque H è una costante del moto.

2. (x,y) è punto di equilibrio $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1=0 \\ 4x\left(4x^2-1\right)=0 \end{cases}$: dalla prima equazione ricaviamo che $y=\dfrac{1}{2}$, dalla seconda che $x=0\vee\pm1$, dunque ci sono tre p.d.e: $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm1,\dfrac{1}{2}\right)$; per discuterne la stabilità, studiamo la matrice del sistema linearizzato: $A(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 48x^2-4 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$
$\Rightarrow A\left(\pm1,\dfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 44 & 0 \end{pmatrix}$ ha per autovalori $\pm2\sqrt{22}$, mentre il punto $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ è stabile per il teorema di Ljapunov perché è di minimo locale per H in quanto $D^2_H\left(0,\dfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 4-48x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=\left(0,\frac{1}{2}\right)}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Se $(x(0),y(0))=(1,2)$ mi trovo lungo la curva $y=2x^2$, dunque la traiettoria è soluzione dell'equazione $\begin{cases} \dot{x}=4x^2-1 \\ x(0)=1 \end{cases}\Rightarrow t=\displaystyle\int_0^t ds=$
$$=\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{4x^2(s)-1}ds \overset{x=x(s)}{=} \int_1^{x(t)} \frac{dx}{4x^2-1}=\frac{1}{2}\int_1^{x(t)}\frac{dx}{2x-1}-\frac{1}{2}\int_1^{x(t)}\frac{dx}{2x+1}=$$
$$=\frac{1}{4}\log(2x(t)-1)-\frac{1}{4}(\log(2x(t)+1)-\log 3)=\frac{1}{4}\log\frac{6x(t)-3}{2x(t)+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{e^{4t}}{3}=\frac{2x(t)-1}{2x(t)+1}=1-\frac{2}{2x(t)+1}\Rightarrow\frac{2}{2x(t)+1}=1-\frac{e^{4t}}{3}=\frac{3-e^{4t}}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{3}{3-e^{4t}}=\frac{2x(t)+1}{2}=x(t)+\frac{1}{2}\Rightarrow x(t)=\frac{3}{3-e^{4t}}-\frac{1}{2}=\frac{3+e^{4t}}{6-2e^{4t}};$$
dunque, la soluzione con quel dato iniziale è $(x(t),y(t))=\left(\dfrac{3+e^{4t}}{6-2e^{4t}},2\left(\dfrac{3+e^{4t}}{6-2e^{4t}}\right)^2\right)$.

2.1 Sia $\mathbb{K}$ l'insieme delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{F}_3$.

1. Dati $X_1=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq X_2=\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{K}$,
$X_1-X_2=\begin{pmatrix} a_1-a_b & -(b_1-b_2) \\ b_1-b_2 & a_1-a_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{K}$ e $X_1X_2^{-1}=$
$=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}\dfrac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} & -\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \\ \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} & \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \end{pmatrix}\in\mathbb{K}$,
dunque $\mathbb{K}$ è un campo.

2. Identificando le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $\mathbb{F}_3$, ho che $\mathbb{K}=\mathbb{F}_3(\alpha)$ con $\alpha=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; poiché $\alpha^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ho che α è radice di X^2+1 e dunque $\mathbb{K}\approx\dfrac{\mathbb{F}_3[X]}{(X^2+1)}$.

3. $(\mathbb{K}^*,\cdot)$ è ciclico di ordine 8, dunque ha $\varphi(8)=4$ generatori; 1 chiaramente non può essere un generatore, e neppure -1 perché ha ordine 2 in quanto $(-1)^2=1$; inoltre, neanche $\pm\alpha$ possono essere generatori

perché $(\pm\alpha)^4 = (-1)^2 = 1$ e quindi hanno ordine 4; dunque, i generatori del gruppo moltiplicativo sono $1+\alpha$, $1-\alpha$, $\alpha-1$ e $-1-\alpha$.

2.2 $\begin{cases} my + (m-2)z = -2 \\ mx + y + 2z = 1 \\ mx + 3z = 1 \end{cases}$: il determinante della matrice dei coefficienti è
$\begin{vmatrix} 0 & m & m-2 \\ m & 1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -m\begin{vmatrix} m & m-2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} m & m-2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m(2-2m)$,
dunque per $0 \neq m \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione data da

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} -2 & m & m-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{m(2-2m)}, \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & m-2 \\ m & 1 & 2 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix}}{m(2-2m)}, \frac{\begin{vmatrix} 0 & m & -2 \\ m & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix}}{m(2-2m)} \right) = \left(\frac{m+2}{m^2-m}, \frac{1}{1-m}, \frac{1}{1-m} \right).$$

Se invece $m = 0$ oppure $m = 1$, il sistema non ha soluzioni perché la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3 a differenza di quella orlata (basta notare che il determinante del minore ottenuto con le ultime tre righe non è nullo).

2.3 Sia $A_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^n$.

1. Diagonalizziamo la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$
$= 4 - \lambda^3 - \lambda^2 = (\lambda-1)(\lambda+2)^2$: $V_1 = \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} = \langle (1,1,1) \rangle$,
$V_{-2} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$, dunque posta $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
ho che $B = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} M \Rightarrow A_n = B^n = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} M =$
$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-2)^n + 1 & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 2(-2)^n + 1 & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 2(-2)^n + 1 \end{pmatrix}$.
2. Per quanto visto in precedenza, gli autovalori di A_n sono 1 e $(-2)^n$ e la matrice è diagonalizzabile perché $A_n = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} M$.

2.4 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile, lo è anche A^2: infatti, se $A = MDM^{-1}$, con D matrice diagonale, allora $A^2 = MDM^{-1}MDM^{-1} = MD^2M^{-1}$, dunque A^2 è simile a D^2 che è diagonale; il viceversa è falso, basta considerare $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: non è una matrice diagonalizzabile perché non è la matrice nulla ma ha entrambi gli autovalori nulli, tuttavia $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ovviamente è diagonalizzabile.

2.5 La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -2 \\ -\sqrt{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$: poiché $\det(A) = 0$ e $\det(A_0) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$, la conica è un'iperbole degenere; per ridurre la conica a forma canonica, eliminiamo innanzi tutto i termini misti diagonalizzando A_0 tramite matrici ortogonali: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $= (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$: $V_{-1} = \begin{cases} -2X - 2Y = 0 \\ -2X - 2Y = 0 \end{cases} = \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle$, $V_{-1} = \begin{cases} 2X - 2Y = 0 \\ -2X + 2Y = 0 \end{cases} = \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle$, dunque attraverso il cambio di variabile $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}X' + \frac{\sqrt{2}}{2}Y' \\ Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}X' + \frac{\sqrt{2}}{2}Y' \end{cases}$ otteniamo $3X'^2 - Y'^2 - 4Y' - 4 = 0$; per avere la forma canonica, eliminiamo i termini lineari con la trasformazione $\begin{cases} X' = X'' \\ Y' = Y'' - 2 \end{cases}$ e otteniamo ora $3X''^2 - Y''^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{X''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - Y''^2 = 0.$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, I sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzione del tutorato numero 1 (20 Maggio 2010)

1.1 Essendo $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$ per $x \geq 0$, allora $0 = \int_0^1 0dx \leq \int_0^1 \left(1 - e^{-f_n(x)}\right) dx \leq \int_0^1 f_n(x)dx$, dunque per il teorema dei carabinieri $\int_0^1 \left(1 - e^{-f_n(x)}\right) dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

1.2
1. $\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\log\left(x^2+a\right) - 2\log x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^2+a\right) - \log\left(x^2\right)}{\frac{1}{x^2}} = a \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{a}{x^2}\right)}{\frac{a}{x^2}} = a$, perché $\frac{\log(1+t)}{t} \overset{t\to 0}{\to} 1$.
2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\log(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - e^x + 1}{(e^x-1)\log(1+x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + o\left(1\right)}{1 + o\left(1\right)} = -1$.

1.3 $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\} =$
$= \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] : \rho^2 \leq R^2, \rho\cos\theta\sin\varphi \geq 0, \rho\sin\theta\sin\varphi \geq 0, \rho\cos\phi \geq 0\right\} =$
$= \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in [0,R] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$, ove (ρ,θ,φ) sono le usuali coordinate sferiche; dunque, $\int_A x^2 dxdydz = \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \rho^4 \cos^2\theta \sin^3\varphi =$
$= \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= \frac{R^5}{5}\frac{\pi}{4}\frac{2}{3} = \frac{\pi R^5}{30}$.

1.4 $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\log\left(1+x^{2n}\right)}{nx} & x > 0 \end{cases}$.

1. $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\frac{\log x}{x} & x > 1 \end{cases}$: infatti, se $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \frac{\log\left(1+x^{2n}\right)}{nx} \leq \frac{x^{2n}}{nx} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, mentre se $x > 1$ si ha che $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+x^{2n}\right)}{nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(x^{2n}\right)}{nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\log x}{nx} = 2\frac{\log x}{x}$, perché $\frac{\log\left(1+x^{2n}\right)}{nx} - \frac{\log\left(x^{2n}\right)}{nx} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)}{nx} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.
2. La convergenza è uniforme perché $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\log\left(1+x^{2n}\right)}{nx}\right| \leq \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^{2n}}{nx}\right| =$
$= \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^{2n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e $\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,\infty)} \left|\frac{\log\left(1+x^{2n}\right) - \log\left(x^{2n}\right)}{nx}\right| =$
$= \sup_{x\in[1,\infty)} \left|\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)}{nx}\right| \leq \frac{\log 2}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente $\iff x \in [0,1)$: infatti, se $x > 1$ il termine n-esimo della serie non tende a 0, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n\to\infty} \frac{\log 2}{n}$, invece per $0 < x < 1$ si ha $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n}$ che converge; essendo la serie divergente sul bordo dell'intervallo, la convergenza non può essere uniforme (né totale), ma è totale (e dunque uniforme) su $[0,\delta]$ $\forall \delta < 1$: infatti, $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,\delta)} |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,\delta)} \frac{x^{2n-1}}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^{2n-1}}{n} < +\infty$.

1.5 $V(x) = a(1-\cos x) + \cos(2x)$.

1. Il sistema dinamico associato è $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin x + 2\sin(2x) = (4\cos x - a)\sin x \end{cases}$, dunque $(0,0)$ e $(\pi,0)$ sono punti di equilibrio $\forall a \in \mathbb{R}$; se $|a| \ge 4$, sono gli unici p.d.e., mentre per $-4 < a < 4$ ci sono anche $\left(\pm \arccos\left(\frac{a}{4}\right), 0\right)$.
2. Un p.d.e. del tipo $(x_0, 0)$ è stabile $\iff x_0$ è di minimo per il potenziale, dunque essendo $V'(x) = (a - 4\cos x)\sin x$, dal segno della derivata prima deduciamo che se $-4 < a < 4$ i punti $\left(\pm \arccos\left(\frac{a}{4}\right), 0\right)$ sono stabili mentre $(0,0)$ e $(\pi,0)$ soo instabili; se invece $a \ge 4$, $(0,0)$ è stabile e $(\pi,0)$ è instabile, e infine per $a \le -4$ $(0,0)$ è instabile e $(\pi,0)$ stabile.
3. Essendo $x \in \mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, tutte le traiettorie sono limitate, pertanto sono periodiche ad eccezione di quelle che contengono punti di equilibrio; dunque, poiché le traiettorie avvengono su curve di livello del tipo $\frac{y^2}{2} + V(x) = E$, gli unici valori di E che non danno traiettorie periodiche sono quelli dei p.d.e., cioè $E = 1$, $E = 2a+1$ e, quando $-4 < a < 4$, $E = a^2 + a - 1$.

2.1 $I = \left(X^7 - X^5 - X^4 + X^2, X^5 - X\right) \subset \mathbb{Q}[X]$ è generato da $p(X) =$
$= MCD(X^7 - X^5 - X^4 + X^2, X^5 - X)$: essendo $X^7 - X^5 - X^4 + X^2 = X^2\left(X^5 - X^3 - X^2 + 1\right) =$
$= X^2\left(X^3\left(X^2-1\right) - \left(X^2-1\right)\right) = X^2\left(X^3-1\right)\left(X^2-1\right) = X^2(X-1)^2\left(X^2+X+1\right)(X+1)$
e $X^5 - X = X\left(X^4-1\right) = X\left(X^2+1\right)\left(X^2-1\right) = X\left(X^2+1\right)(X+1)(X-1)$,
allora $p(X) = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$; infine, $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I} = \frac{\mathbb{Q}[X]}{(p(X))}$ non è un campo perché $p(X)$ non è irriducibile.

2.2 $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left(-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$= (-1-\lambda)\left(-\lambda\left(\lambda+\lambda^2\right)-(1+\lambda)\right) = (-1-\lambda)\left(-\lambda^2-\lambda^3-1-\lambda\right) = \lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1$;
gli autovalori di A sono le radici del suo polinomio caratteristico, cioè 1 (con molteplicità algebrica 2) e $\pm i$; l'autospazio associato a $\lambda = 1$ è formato dai vettori che soddisfano $(A+\mathbb{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ y-w=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, cioè è costituito dai vettori del tipo $(t,s,-s,s)$ e dunque una sua base è ad esempio $\{(1,0,0,0),(0,1,-1,1)\}$; analogamente per l'autospazio associato a $\lambda = i$: $\begin{cases} (-1-i)x+y+z=0 \\ -iy-w=0 \\ y-iz=0 \\ y+z-(1+i)w=0 \end{cases}$ è costituito dai vettori del tipo $(-it,t,-it,-it)$ e dunque una sua base è $\{(1,i,1,1)\}$; infine per $\lambda = -i$: $\begin{cases} (i-1)x+y+z=0 \\ iy-w=0 \\ y+iz=0 \\ y+z+(i-1)w=0 \end{cases}$ è formato dai vettori del tipo (it,t,it,it) e dunque una sua base è $\{(1,-i,1,1)\}$.

2.3 $P^2 = P \Rightarrow V = \ker(P) + Im(P)$ perché $v = (v-P(v)) + P(v)\ \forall v \in V$ con $v - P(v) \in \ker P$ perché $P(v-P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$ e ovviamente $P(v) \in Im(P)$; inoltre, $\ker(P) \cap Im(P) = \{0\}$ perché se $P(v) = 0$ e $v = P(w)$ allora $v = P(w) = P^2(w) = P(v) = 0$.

2.4 $2X^2 - Y^2 - 4X + 2Y - 3 = 0 \Rightarrow$ la matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:
$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2-(-6-4) = 8 \neq 0$, inoltre posta $A_0 := A(23|23) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, si ha $\det(A_0) = -2 < 0$, dunque la conica è un'iperbole non degenere; per trovare il centro di simmetria è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} -2+2X=0 \\ 1-Y=0 \end{cases}$, dunque il centro è $(1,1)$; gli assi di simmetria sono le rette passanti per il centro di simmetria e aventi le direzioni degli autovalori di A_0, ma essendo A_0 diagonale queste rette saranno parallele agli assi cartesiani, e cioè sono $X = 1$ e $Y = 1$; per ridurre la conica a forma canonica, eliminiamo i termini lineari con la trasformazione $\begin{cases} X = X'+1 \\ Y = Y'+1 \end{cases}$ otteniamo $2X'^2 - Y'^2 - 4 = 0 \iff \left(\frac{X'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{2}\right)^2 = 1$ che è la forma canonica.

2.5 $\det((a,b),(c,d)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \Rightarrow \det(k_1(a_1,b_1)+k_2(a_2,b_2),(c,d)) =$
$= \det((k_1a_1+k_2a_2, k_1b_1+k_2b_2),(c,d)) = (k_1a_1+k_2a_2)d - (k_1b_1+k_2b_2)c =$
$= k_1\det((a_1,b_1),(c,d)) + k_2\det((a_2,b_2),(c,d))$ e $\det((a,b),(c,d)) = ad-bc = -(cb-ad) = -\det((c,d),(a,b))$, dunque det è una forma bilineare antisimmetrica; infine, $\det((1,0),(1,0)) = 0$, $\det((1,0),(0,1)) = -\det((0,1),(1,0)) = 1$ e $\det((0,1),(0,1)) = 0$, dunque la sua matrice rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, I sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (27 Maggio 2010)

1.1 $\lim_{x\to 1^+}(\log x)^a\log(\log x)\overset{y=\log x}{=}\lim_{y\to 0^+}y^a\log y=\begin{cases}-\infty & a<0\\ 0 & a\geq 0\end{cases}$, perché per la regola di De l'Hôpital, $\lim_{y\to 0^+}\frac{\log y}{y^{-a}}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{y}}{-ay^{-a-1}}=\lim_{y\to 0^+}-ay^a=0$.

1.2 Calcolare $\int\frac{4+x^3}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+4}{x^2-1}\right)dx=\int\left(x-\frac{3}{2(x+1)}+\frac{5}{2(x-1)}\right)dx=$
$=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\log|x+1|+\frac{5}{2}\log|x-1|+c$.

1.3 $f(x,y)=\int_0^1\frac{1-e^{-xyt^2}}{t}dt$ è definita $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, perché l'integranda è limitata in quanto $\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-xyt^2}}{t}=\lim_{t\to 0}xyt\frac{1-e^{-xyt^2}}{xyt^2}=\lim_{t\to 0}xyt=0$; inoltre, per il teorema di continuità sotto integrale, la funzione è continua $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ perché l'integranda è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, l'intervallo converge $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e, se $(x,y)\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\times[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$, allora $\left|\frac{1-e^{-xyt^2}}{t}\right|\leq\frac{\left|1-e^{(x_0\pm\varepsilon)(y_0\pm\varepsilon)t^2}\right|}{t}$ è un maggiorante integrabile.

1.4 Essendo $0\leq(|a_n|-|b_n|)^2=a_n^2+b_n^2-2|a_nb_n|\ \forall n\in\mathbb{N}$, allora $|a_nb_n|\leq\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}$ e dunque $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nb_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}\right)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2}{2}+\frac{\sum_{n=0}^{\infty}b_n^2}{2}<+\infty$, cioè $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ converge assolutamente.

1.5 $V(x,y)=-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=4x\left(x^2-y^2-1\right)\\ \dot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y}=4y\left(y^2-x^2-1\right)\end{cases}$.

1. (x,y) è un punto di equilibrio $\iff\begin{cases}4x\left(x^2-y^2-1\right)=0\\ 4y\left(y^2-x^2-1\right)=0\end{cases}$: se $4x=0=4y$ si ottiene ovviamente il punto $(0,0)$, se $4x=0=y^2-x^2-1$, la seconda equazione diventa y^2-1 e perciò si ottiene $(0,\pm1)$, mentre se $x^2-y^2-1=0=4y$ la prima equazione diventa $x^2-1=0$ e quindi si ha $(\pm1,0)$ e infine se $x^2-y^2-1=0=y^2-x^2-1$ non c'è nessun punto perché si avrebbe $x^2=y^2+1=x^2+2$ che è assurdo.
2. Per studiare la stabilità dei p.d.e., è sufficiente studiare il sistema linearizzato $A(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4y^2-4 & -8xy\\ -8xy & 12y^2-4x^2-4\end{pmatrix}$: $A(0,0)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ ha entrambi gli autovalori negativi e dunque l'origine è un p.d.e. asintoticamente stabile, inoltre $A(0,\pm1)=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$ ha invece autovalori di segno discorde, quindi questi due punti sono instabili,

e analogamente sono instabili anche gli ultimi due punti, perché $A(\pm 1,0)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Le traiettorie sono ortogonali alle curve di livello della funzione $V(x,y)=$ $=-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$: la curva di livello $-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)=0$, contenente i p.d.e. instabili, è formata dalle quattro rette di equazione $y=1+x$, $y=-1-x$, $y=1-x$ e $y=x-1$, mentre le altre curve si possono tracciare per continuità. Gli assi cartesiani elle bisettrici sono invarianti per il sistema perché, essendo $\dot{x}=4x\left(x^2-y^2-1\right)$, allora $x(0)=0 \Rightarrow x(t)\equiv 0\ \forall t$ e analogamente $\dot{y}=4y\left(y^2-x^2-1\right)$, dunque $y(0)=0 \Rightarrow y(t)\equiv 0\ \forall t$, inoltre $\frac{d}{dt}\left(y^2-x^2\right)=2y\dot{y}-2x\dot{x}=$ $=8y^2\left(y^2-x^2-1\right)-8x^2\left(x^2-y^2-1\right)=8\left(y^2-x^2\right)\left(y^2+x^2-1\right)$, dunque $y(0)^2-x(0)^2=0 \Rightarrow y^2(t)-x^2(t)\equiv 0\ \forall t$. Il bacino di attrazione dell'origine contiene il quadrato $Q=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\right\}$ (colorato in grigio chiaro nella figura): infatti, prendendo come funzione di Ljapunov $W(x,y)=V(x,y)-V(0,0)=1-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$, W si annulla nell'origine ed è strettamente positiva nel suo intorno, perché $(0,0)$ è di minimo isolato per V, inoltre $\frac{d}{dt}W(x,y)=\frac{d}{dt}V(x,y)=$ $=\left\langle \dot{x},\dot{y},\frac{\partial V}{\partial x}(x,y),\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right\rangle=-|\nabla V(x,y)|^2\leq 0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, inoltre prendendo $P_c=Q\cap V^{-1}((-\infty,c])\ \forall c\in(-1,0)$ (colorato in grigio scuro nella figura), è un compatto contenente l'origine, chiusura dell'aperto $Q\cap V^{-1}((-\infty,c))$, positivamente invariante perché V decresce lungo le traiettorie, e infine l'unico suo punto (x,y) tale che $\frac{d}{dt}V(x,y)=0$ è l'origine; dunque, il bacino di attrazione del punto di equilibrio contiene ogni P_c e dunque anche Q.

2.1 Sia $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$ definita come $\varphi(x)=([x]_3,[x]_4)$.

1. φ è un omomorfismo perché $\varphi(x+y)=([x+y]_3,[x+y]_4)=([x]_3+[y]_3,[x]_4+[y]_4)=$ $=([x]_3,[x]_4)+([y]_3,[y]_4)=\varphi(x)+\varphi(y)$, inoltre è suriettivo perché $\varphi(x)=([a]_3,[b]_4) \iff \exists h,k\in\mathbb{Z}$ tali che $3h+a=x=4k+b \Rightarrow a-b=4k-3h$, che è verificata se $h=k=1$, cioè $x=4a-3b$ e quindi $(4a-3b)\in\varphi^{-1}(\{([a]_3,[b]_4)\})\ \forall a,b$.

2. $\varphi^{-1}(\{([1]_3,[2]_4)\})=\{x\in\mathbb{Z}:\exists h,k\in\mathbb{Z}$ tali che $3h+1=x=4k+2\} \iff h=\frac{4}{3}k+\frac{1}{3}\in\mathbb{Z} \iff$ $\iff \exists l\in\mathbb{Z}$ tale che $k=2+3l \iff x=12l+10 \iff x\in 10+12\mathbb{Z} \Rightarrow \varphi^{-1}(\{([1]_3,[2]_4)\})=$ $=10+12\mathbb{Z}$.

3. $\ker\varphi=\{x\in\mathbb{Z}:\exists h,k\in\mathbb{Z}$ tali che $3h=x=4k\} \iff h=\frac{4}{3}k\in\mathbb{Z} \iff \exists l\in\mathbb{Z}$ tale che $k=3l \iff x=12l \iff x\in 12\mathbb{Z} \Rightarrow \ker\varphi=12\mathbb{Z}$; applicando il primo teorema di omomorfismo di gruppi si ottiene che $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4=Im\varphi=\frac{\mathbb{Z}}{\ker\varphi}=\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$.

2.2 $M_e(f)=\begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2-h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$.

1. Essendo $\dim(\ker f)=3-r(M_e(f))$, affinché $\dim(\ker f)=2$ è nec-

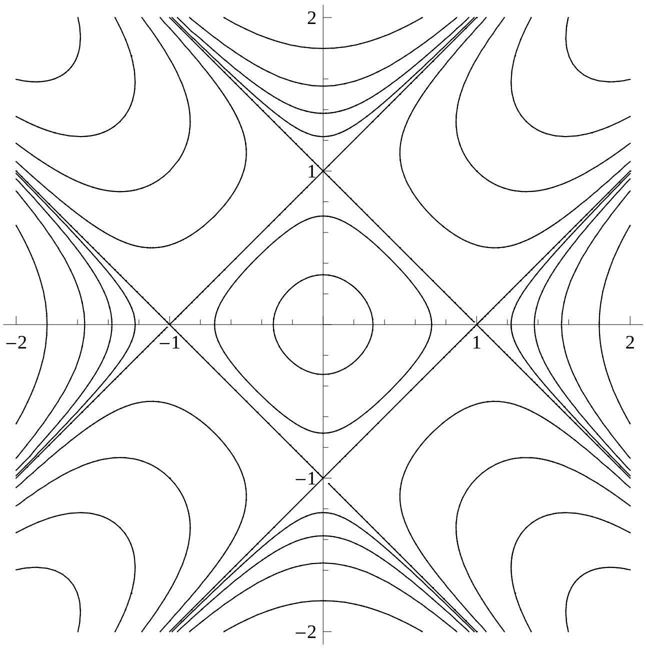

Figure 1: Curve di livello della funzione $V(x,y) = -\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$

essario che sia $h=0$, altrimenti $M_e(f)(12|13) = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è una sottomatrice invertibile di ordine 2; per $h=0$ si ha effettivamente $\dim(\ker f) = 2$, perché la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha la seconda colonna nulla e la prima uguale alla terza, dunque tutte e tre proporzionali.

2. $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \iff \begin{cases} 0=0 \\ x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \iff$ $x=-y \Rightarrow \ker f = \{(s,-s,t)\}$, dunque ha per base $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$.

3. $h=1 \Rightarrow M_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$ $= -\lambda\left(\lambda^2-1\right)$, dunque i suoi autovalori sono 0, 1 e -1; essendo tre distinti, la matrice è sicuramente diagonalizzabile; è rimasto solo il calcolo degli autovettori: $V_0 = \left\{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ 0=0 \end{cases}$ $\Rightarrow V_0 = \{(t,t,-t)\}$; $V_1 = \left\{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \iff$

$$\iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{(t,t,0)\};\ V_{-1} =$$

$$= \left\{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \{(t,-t,0)\}.$$

2.3 $A \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $\mathbb{I}_2 = A \cdot A^t \Rightarrow 1 = \det(A \cdot A^t) = \det(A)\det(A^t) = (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$
2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^t = A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$
   $= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow a = d, b = -c$, ma poiché $a^2 + b^2 = 1$, allora $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che $(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$, cioè $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2.4 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : XA$ e AX sono simmetriche$\}$.

1. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow XA = \begin{pmatrix} 3a+2b & a+b \\ 3c+2d & c+d \end{pmatrix}$ e $AX = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$, dunque $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{cases} 3b+d = 2a+c \\ a+b = 3c+2d \end{cases} \right\}$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
2. Una generica matrice $X \in V$ è del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{7}{5}b - \frac{3}{5}a & \frac{7}{5}a - \frac{8}{5}b \end{pmatrix}$, dunque $AX = \begin{pmatrix} \frac{12}{5}a + \frac{7}{5}b & \frac{7}{5}a + \frac{7}{5}b \\ \frac{7}{5}a + \frac{7}{5}b & \frac{7}{5}a + \frac{2}{5}b \end{pmatrix}$ e $XA = \begin{pmatrix} 3a+2b & a+b \\ a+b & \frac{4}{5}a - \frac{b}{5} \end{pmatrix}$, dunque tutte e sole le coppie siffatte sono del tipo $(\Delta_1, \Delta_2) =$
   $= \left(\begin{pmatrix} \frac{12}{5}a + \frac{7}{5}b & \frac{7}{5}a + \frac{7}{5}b \\ \frac{7}{5}a + \frac{7}{5}b & \frac{7}{5}a + \frac{2}{5}b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a+2b & a+b \\ a+b & \frac{4}{5}a - \frac{b}{5} \end{pmatrix} \right)$, per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.

2.5 $2X^2 + 4XY - Y^2 + 6Y - 8 = 0 \Rightarrow$ la matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$:

$\det(A) = -8 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8(-6) + 3(-6) = 30$, dunque la conica non è degenere; inoltre, posta $A_0 := A(23|23) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, si ha $\det(A_0) = -6$, dunque si tratta di un'iperbole; per trovare il centro di simmetria è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = 0 \\ 3 + 2X - Y = 0 \end{cases}$, dunque il centro è $(-1, 1)$; gli assi di simmetria sono le retti passanti per il centro di simmetria e aventi le direzioni degli autovettori di A_0: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$:

$V_3 = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -X + 2Y = 0 \\ 2X - 4Y = 0 \end{cases} \right\} = \langle (2,1) \rangle$ e $V_{-2} = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 4X + 2Y = 0 \\ 2X + Y = 0 \end{cases} \right\} =$

$= \langle(1,-2)\rangle$, dunque i due assi di simmetria sono le rette di equazioni $\begin{cases} X = 2t-1 \\ Y = t+1 \end{cases}$ e $\begin{cases} X = t-1 \\ Y = 1-2t \end{cases}$; per ridurre a forma canonica la conica, vanno innanzi tutto eliminati i termini misti diagonalizzando A_0 attraverso matrici ortogonali: una base ortonormale di autovettori è $\left\{ \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$, dunque con il cambio di variabile $\begin{cases} X = \frac{2}{\sqrt{5}}X' - \frac{Y'}{\sqrt{5}} \\ Y = \frac{X'}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}Y' \end{cases}$ si ottiene $3X'^2 - 2Y'^2 + \dfrac{6}{\sqrt{5}}X' + \dfrac{12}{\sqrt{5}}Y' - 8 = 0$; a questo punto, per ottenere la forma canonica, è sufficiente eliminare i termini di primo grado con l'ulteriore cambio di variabile $\begin{cases} X' = X'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ Y' = Y'' + \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$ si ottiene $3X''^2 - 2Y''^2 - 5 = 0 \iff$

$$\iff \left(\frac{X''}{\sqrt{\frac{5}{3}}} \right)^2 - \left(\frac{Y''}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \right)^2 = 1.$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, I sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 3 (4 Giugno 2010)

1.1 1. $\int_1^{+\infty} \frac{(\log(1+x)-\log x)^q}{x^p}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^q}{x^p}dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^q}{x^p}dx =$
$= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+q}} < +\infty \iff p+q>1.$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{(\log(1+x))^q(\log x)^p}{x^{p+q}}dx = \int_1^{2} \frac{(\log(1+x))^q(\log x)^p}{x^{p+q}}dx + \int_2^{+\infty} \frac{(\log(1+x))^q(\log x)^p}{x^{p+q}}dx \approx$
$\approx \int_1^2 (\log x)^p dx + \int_2^{+\infty} \frac{(\log x)^{p+q}}{x^{p+q}}dx \overset{y=\log x}{\approx} \int_1^2 (x-1)^p dx + \int_{\log 2}^{+\infty} y^{p+q}e^{(p+q-1)y}dy < +\infty \iff$
$\iff \begin{cases} p > -1 \\ p+q > 1 \end{cases}.$

1.2 Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^3 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}dx \overset{y=\sin x}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\left(1-y^2\right)^2}dy = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1+y} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-y} +$
$+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{(1+y)^2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{4}\left[\log(1+y) - \log(1-y) - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} + 2\right) = \frac{\log 3}{4} + \frac{1}{3}.$

1.3 $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt.$

1. L'integrale è ben definito $\forall x > 0$, perché $\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| dt \le \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt,$
inoltre è di classe C^1 e la sua derivata è integrabile, e se $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$
allora $\int_0^{+\infty} \left|\frac{d}{dx}\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| dt = \int_0^{+\infty} \left|-\frac{t}{1+t}e^{-xt}\right| dt \le \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \le \int_0^{+\infty} e^{-(x_0-\varepsilon)tdt<+\infty}$
è una maggiorante integrabile, dunque per il teorema di derivazione sotto integrale la funzione è di classe C^1; inoltre, $\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| dt \le \int_0^{+\infty} e^{-(x_0-\varepsilon)t}dt,$
dunque è possibile passare al limite sotto integrale e quindi $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt =$
$= \int_0^{+\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt = \int_0^{+\infty} 0dt = 0.$

2. Per il teorema di derivazione sotto integrale, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t}e^{-xt}dt =$
$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = f'(x) - \frac{1}{x}$; dunque, per la formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine, $f(x) =$
$= e^{\int_0^x dt}\left(f(+\infty) + \int_{+\infty}^x -\frac{e^{-\int_0^t ds}}{t}dt\right) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}dt.$

1.4 $\begin{cases} xyu(x,y) - 4yu(x,y) + 9xv(x,y) = 0 \\ 2xy - 3y^2 + v^2(x,y) = 0 \end{cases}$.

Sia $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita come $H(x,y,u,v) = \big(xyu - 4yu + 9xv, 2xy - 3y^2 + 9v^2\big)$: è di classe C^1, $F(1,1,\pm 3,\pm 1)$ e $\frac{\partial H}{\partial(u,v)}(1,1,\pm 3,\pm 1) = \left.\begin{pmatrix} xy-4y & 0 \\ 9x & 2v \end{pmatrix}\right|_{(x,y,u,v)=(1,1,\pm 3,\pm 1)} =$ $= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & \pm 2 \end{pmatrix}$ è invertibile, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists F : (x,y) \to (u,v)$ di classe C^1 che manda un intorno di $(1,1)$ in un intorno di $(1,3)$ tale che $H(x,y,u_F(x,y),v_F(x,y)) = (0,0)$, cioé $\begin{cases} xyu_F(x,y) - 4yu_F(x,y) + 9xv_F(x,y) = 0 \\ 2xy - 3y^2 + v_F^2(x,y) = 0 \end{cases}$, e $\exists G : (x,y) \to (u,v)$ di classe C^1 che manda un intorno di $(1,1)$ in un intorno di $(-1,-3)$ tale che $H(x,y,u_G(x,y),v_G(x,y)) = (0,0)$; per calcolare le matrici Jacobiane è sufficiente notare che $0 = \left.\frac{d}{dx}0\right|_{(x,y)=(1,1)} = \left.\frac{d}{dx}(xyu_F(x,y) - 4yu_F(x,y) + 9xv_F(x,y))\right|_{(x,y)=(1,1)} =$ $= \left.\left(yu_F(x,y) + xy\frac{\partial u_F}{\partial x}(x,y) - 4y\frac{\partial u_F}{\partial x}(x,y) + 9x\frac{\partial v_F}{\partial x}(x,y) + 9v(x,y)\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} =$ $= 9\frac{\partial v_F}{\partial x}(1,1) - 3\frac{\partial u_F}{\partial x}(1,1) + 28$, perché $(u_F(1,1), v_F(1,1)) = (1,3)$; analogamente, $0 = \left.\frac{d}{dy}0\right|_{(x,y)=(1,1)} = \left.\frac{d}{dy}(xyu_F(x,y) - 4yu_F(x,y) + 9xv_F(x,y))\right|_{(x,y)=(1,1)} =$ $= \left.\left(xy\frac{\partial u_F}{\partial y}(x,y) + xu_F(x,y) - 4y\frac{\partial u_F}{\partial y}(x,y) - 4u_F(x,y) + 9x\frac{\partial v_F}{\partial y}(x,y)\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} =$ $= 9\frac{\partial v_F}{\partial y}(1,1) - 3\frac{\partial u_F}{\partial y}(1,1) - 3$, $0 = \left.\frac{d}{dx}0\right|_{(x,y)=(1,1)} = \left.\frac{d}{dx}\left(2xy - 3y^2 + v_F^2(x,y)\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} =$ $= \left.\left(2y + 2\frac{\partial v_F}{\partial x}(x,y)v_F(x,y)\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} = 2 + 6\frac{\partial v_F}{\partial x}(1,1)$ e $0 = \left.\frac{d}{dy}0\right|_{(x,y)=(1,1)} =$ $\left.\frac{d}{dy}\left(2xy - 3y^2 + v_F^2(x,y)\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} = \left.\left(2y - 6y + 2\frac{\partial v_F}{\partial y}(x,y)v_F(x,y)\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} = 6\frac{\partial v_F}{\partial y}(1,1) - 4$,

dunque $\begin{cases} 9\frac{\partial v_F}{\partial x}(1,1) - 3\frac{\partial u_F}{\partial x}(1,1) + 28 = 0 \\ 9\frac{\partial v_F}{\partial y}(1,1) - 3\frac{\partial u_F}{\partial y}(1,1) - 3 = 0 \\ 2 + 6\frac{\partial v_F}{\partial x}(1,1) = 0 \\ 6\frac{\partial v_F}{\partial y}(1,1) - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_F}{\partial x}(1,1) = \frac{25}{3} \\ \frac{\partial u_F}{\partial y}(1,1) = 1 \\ \frac{\partial v_F}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{3} \\ \frac{\partial v_F}{\partial y}(1,1) = \frac{2}{3} \end{cases}$, dunque la matrice Jacobiana di F in $(1,1)$ è $\begin{pmatrix} \frac{25}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; con gli stessi conti, e usando che $(u_G(1,1), v_G(1,1)) = (-1,3)$, si trova che la matrice Jacobiana di G in $(1,1)$ è $\begin{pmatrix} -\frac{25}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1.5 1. Le forze che tendono a far deviare l'uomo dalla direzione radiale sono la forza inerziale di rotazione e la forza di Coriolis. Consideriamo un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ tale che la piattaforma sia contenuta nel piano xy e l'asse di rotazione sia l'asse z e un sistema mobile $K = O\xi\eta\zeta$ solidale con la piattaforma rotante tale che gli assi z e ζ coincidano e che i due sistemi coincidano all'istante $t = 0$; scegliendo opportunamente gli assi x e y (e dunque ξ e η), si può supporre il moto avvenga sull'asse ξ, cioè che la posizione dell'uomo nel sistema K sia $\mathbf{Q}(t) = (vt, 0, 0)$; inoltre, poiché la rotazione avviene intorno all'asse ζ, il vettore velocità angolare è $\mathbf{\Omega}(t) = (0, 0, \omega(t))$; dunque, indicando con m la sua massa, la forza inerziale di rotazione è data da $\mathbf{F}_1(t) = -m\dot{\mathbf{\Omega}}(t) \wedge (\mathbf{Q}(t)) = -m(0, 0, \dot{\omega}(t)) \wedge (vt, 0, 0) = (0, -mvt\dot{\omega}(t), 0)$, mentre la forza di Coriolis è data da $\mathbf{F}_2(t) = -2m\mathbf{\Omega}(t) \wedge \dot{\mathbf{Q}}(t) = -2m(0, 0, \omega(t)) \wedge (v, 0, 0) =$ $= (0, -2mv\omega(t), 0)$; pertanto, la forza necessaria per compensarle entrambe è $\mathbf{F}(t) = (0, mv(t\dot{\omega}(t) + 2\omega(t)), 0)$.

2. L'istante il cui la persona raggiunge il bordo della piattaforma è $t = \dfrac{R}{v}$a piattaforma smette di ruotare all'istante $t = \dfrac{R}{2v}$, momento in cui il sistema K diventa inerziale, dunque il vettore che indica la posizione diventa $\mathbf{Q}(t) = (vt, \eta(t), 0)$, con $\eta(t)$ tale che $\begin{cases} m\ddot{\eta}(t) = mv(t\dot{\omega}(t) + 2\omega(t)) & \text{per } t \in \left[\frac{R}{2v}, \frac{R}{v}\right] \\ \dot{\eta}\left(\frac{R}{2v}\right) = 0 \\ \eta\left(\frac{R}{2v}\right) = 0 \end{cases}$
dunque affinché il moto si mantenga radiale, cioè $\eta(t) \equiv 0\ \forall t \in \left[\dfrac{R}{2v}, \dfrac{R}{v}\right]$,
dev'essere $t\dot{\omega}(t) + 2\omega(t) = 0 \iff \dfrac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} = -\dfrac{2}{t} \iff \log(\omega(t)) = C - 2\log(t) \iff \omega(t) = \dfrac{C}{t^2}$
per $\dfrac{R}{2v} \leq t \leq \dfrac{R}{v}$.

2.1

1. È sufficiente mostrare che ogni gruppo generato da 2 elementi è ciclico: mostriamo che, se $MCD(a, b) = 1 = MCD(c, d)$, allora $\left\langle \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \right\rangle = \left\langle \dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} \right\rangle$,
ove $\left\langle \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \right\rangle = \left\{ x\dfrac{a}{b} + y\dfrac{c}{d} : x, y \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$: infatti, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{mcm(a,c)MCD(a,c)}{c}}{\frac{mcm(b,d)MCD(b,d)}{d}} =$
$\dfrac{mcm(a, c)}{c} \dfrac{d}{MCD(b, d)} \dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} \in \left\langle \dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} \right\rangle$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{\frac{mcm(a,c)MCD(a,c)}{a}}{\frac{mcm(b,d)MCD(b,d)}{b}} =$
$= \dfrac{mcm(a, c)}{a} \dfrac{b}{MCD(b, d)} \dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} \in \left\langle \dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} \right\rangle$, dunque $\left\langle \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \right\rangle = \left\langle \dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} \right\rangle$;
viceversa, essendo $MCD\left(\dfrac{b}{MCD(b, d)}, \dfrac{d}{MCD(b, d)}\right) = 1 = MCD\left(c, \dfrac{d}{MCD(a, b)}\right)$,
allora $MCD\left(\dfrac{bc}{MCD(b, d)}, \dfrac{d}{MCD(b, d)}\right) = 1$, inoltre $MCD\left(a, \dfrac{b}{MCD(b, d)}\right) = 1$
e dunque $MCD\left(\dfrac{ad}{MCD(b, d)}, \dfrac{bc}{MCD(b, d)}\right) = MCD\left(a, \dfrac{bc}{MCD(b, d)}\right) = MCD(a, c)$,
dunque $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(a, c) = x\dfrac{ad}{MCD(b, d)} + y\dfrac{bc}{MCD(b, d)}$
(identità di Bézout), e dunque $\dfrac{MCD(a, c)}{mcm(b, d)} = \dfrac{x\frac{ad}{MCD(b,d)} + y\frac{bc}{MCD(b,d)}}{mcm(b, d)} = \dfrac{xad + ybc}{bd} =$
$= x\dfrac{a}{b} + y\dfrac{c}{d} \in \left\langle \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \right\rangle$.

2. È sufficiente mostrare che se $x = \dfrac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, con $MCD(a, b) = 1$, allora $bx = b\dfrac{a}{b} + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$; b è proprio l'ordine di x, perché se $n < b$, allora $na \nmid b$, dunque $\dfrac{na}{b} \notin \mathbb{Z}$.

3. Se $G = \left\langle \dfrac{a}{b} + \mathbb{Z}, \dfrac{c}{d} + \mathbb{Z} \right\rangle \leq \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ è un sottogruppo di ordine $n = mcm(a, b)$,

allora $G = \left\langle \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \right\rangle$: infatti, analogamente al primo punto, $G = \left\langle \frac{MCD(a,c)}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} \right\rangle$,
ma essendo $MCD(MCD(a,c), mcm(b,d)) = 1$, $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $1 = xMCD(a,c) + ymcm(b,d)$,
dunque $\frac{1}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} = \frac{xMCD(a,c) + ymcm(b,d)}{mcm(b,d)} = x\frac{MCD(a,c)}{mcm(b,d)} + y \in \left\langle \frac{MCD(a,c)}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} \right\rangle$
ma chiaramente $\frac{MCD(a,c)}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} \in \left\langle \frac{1}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} \right\rangle$, dunque $G = \left\langle \frac{MCD(a,c)}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} \right\rangle =$
$= \left\langle \frac{1}{mcm(b,d)} + \mathbb{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \right\rangle$.

2.2 Sia $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. $\lambda = 1$ è un autovalore di $A \iff 0 = \det(A - \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} -$
$-4 \begin{vmatrix} a-1 & a-1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4(8-4a) - 4(5a-5) = -12 - 4a \iff a = -3$.
2. $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & 2 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} -$
$-2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 5-\lambda \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 6\lambda - 3\right) - 2(3\lambda + 5) - (8 - 4\lambda) =$
$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 18 = (2-\lambda)\left(\lambda - 2 + \sqrt{13}\right)\left(\lambda - 2 - \sqrt{13}\right)$, dunque
A ha tre autovalori distinti, pertanto ha 3 autovettori linearmente indipendenti, perché autovettori corrispondenti a diversi autovalori sono linearmente indipendenti.

2.3 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
Essendo $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, allora $tr(AB) = \sum_{i=0}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{lm}b_{ml} =$
$= \sum_{m=1}\sum_{l=1} b_{ml}a_{lm} = \sum_{i=1}\sum_{k=1} b_{ik}a_{ki} = tr(BA)$.

2.4 $V = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : m_{11} = m_{22}, m_{21} = 0\}$.

1. V è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ perché è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} m_{11} - m_{22} = 0 \\ m_{21} = 0 \end{cases}$.
2. È sufficiente prendere come U un sottospazio di dimensione 2 tale che $U + V = M_2(\mathbb{R})$, perché per la formula di Grassmann si ha $\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 0$: per fare questo è sufficiente completare i generatori di V ad una base di $M_2(\mathbb{R})$, in particolare posso provare ad aggingere matrici della base canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
attraverso le equazioni che definiscono V, notiamo che $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin V$,
quindi può essere scelto come un generatore di U: ne serve un altro che sia linearmente indipendente da M_1 e dai generatori di V,

che sono $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non vanno bene perché $V + \langle M_2 \rangle \subsetneq M_2(\mathbb{R}) \supsetneq V + \langle M_3 \rangle$ (ad esempio, non generano le matrici tali che $m_{21} \neq 0$), dunque bisogna prendere $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: sicuramente $M_4 \notin V + \langle M_1 \rangle$, perché altrimenti quest'ultimo sottospazio conterrebbe la base canonica e dunque tutto lo spazio, che è assurdo visto che è generato da sole tre matrici; dunque, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

3. $A_1 \in U \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ e $A_2 \in V \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = A = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a+c & d \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow (a,b,c,d) = (1,-3,0,2) \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda)^3$: se $a = 1$, la matrice è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio associato all'autovalore 1 ha dimensione 4, cioè $\iff A = \mathbb{I}_4 \iff b = 0$; se invece $a \neq 1$, la matrice è diagonalizzabile se e solo se l'autospazio associato a 1 ha dimensione 3, ma questo è sempre verificato perché $V_1 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (A - \mathbb{I}_4)(x,y,z,w)^t = (0,0,0,0)^t\right\} = = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (a-1)x + by = 0\right\} = \langle (b, 1-a, 0, 0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$; poiché $V_a = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (A - a\mathbb{I}_4)(x,y,z,w)^t = (0,0,0,0)^t\right\} = = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} by = 0 \\ (1-a)y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \right\} = \langle (1,0,0,0) \rangle$, A è diagonalizzabile attraverso la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cioè $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, II sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzione del tutorato numero 1 (20 Settembre 2010)

1.1 $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t\left(e^t-1\right)}{e^{2t}-1}dt = \int_1^2 \frac{e^t}{e^t+1}dt \overset{(x=e^t)}{=} \int_e^{e^2}\frac{dx}{x+1} = [\log(x+1)]_e^{e^2} = \log\left(e^2+1\right)-\log(e+1) =$
$\displaystyle = \log\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right).$

1.2
1. $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^3}{(x+3)^2} = \lim_{x\to-3}(x+3) = 0.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{\log\left(1+e^{4x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{e^{4x}}\frac{e^{4x}}{\log\left(1+e^{4x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{e^{4x}} = +\infty.$

1.3
1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-12|^{n+2}}{n^3e^{2n}}$: poiché $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-12|^{n+2}}{n^3e^{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-12|^2}{n^3}}\sqrt[n]{\left(\frac{|x-12|}{e^2}\right)^n} = \frac{|x-12|}{e^2}$, dunque la serie converge se $\displaystyle\frac{|x-12|}{e^2}<1$, diverge se $\displaystyle\frac{|x-12|}{e^2}>1$, mentre se $\displaystyle\frac{|x-12|}{e^2}=1$ ho $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+4}}{n^3e^{2n}} = e^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ che converge perché è un multiplo della serie armonica con esponente 3; dunque, la serie converge $\displaystyle\iff \frac{|x-12|}{e^2}\le 1$ cioè $\iff 12-e^2\le x\le 12+e^2$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-x^2}}$ è una serie armonica con esponente $1-x^2$, dunque converge $\iff 1-x^2>1$, cioè per nessun valore di x.

1.4 $V(x,y) = -\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right) \Rightarrow \begin{cases}\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 4x\left(x^2-y^2-1\right)\\ \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 4y\left(y^2-x^2-1\right)\end{cases}.$

1. (x,y) è un punto di equilibrio $\iff \begin{cases}4x\left(x^2-y^2-1\right)=0\\ 4y\left(y^2-x^2-1\right)=0\end{cases}$: se $4x=0=4y$ si ottiene ovviamente il punto $(0,0)$, se $4x=0=y^2-x^2-1$, la seconda equazione diventa y^2-1 e perciò si ottiene $(0,\pm1)$, mentre se $x^2-y^2-1=0=4y$ la prima equazione diventa $x^2-1=0$ e quindi si ha $(\pm1,0)$ e infine se $x^2-y^2-1=0=y^2-x^2-1$ non c'è nessun punto perché si avrebbe $x^2=y^2+1=x^2+2$ che è assurdo.
2. Per studiare la stabilità dei p.d.e., è sufficiente studiare il sistema linearizzato $A(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4y^2-4 & -8xy\\ -8xy & 12y^2-4x^2-4\end{pmatrix}$: $A(0,0)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ ha entrambi gli autovalori negativi e dunque l'origine è un p.d.e. asintoticamente stabile, inoltre $A(0,\pm1)=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$ ha invece autovalori di segno discorde, quindi questi due punti sono instabili, e analogamente sono instabili anche gli ultimi due punti, perché $A(\pm1,0)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$.

3. Le traiettorie sono ortogonali alle curve di livello della funzione $V(x,y) = -\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$: la curva di livello $-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)=0$, contenente i p.d.e. instabili, è formata dalle quattro rette di equazione $y=1+x$, $y=-1-x$, $y=1-x$ e $y=x-1$, mentre le altre curve si possono tracciare per continuità. Gli assi cartesiani elle bisettrici sono invarianti per il sistema perché, essendo $\dot{x}=4x\left(x^2-y^2-1\right)$, allora $x(0)=0 \Rightarrow x(t)\equiv 0\ \forall t$ e analogamente $\dot{y}=4y\left(y^2-x^2-1\right)$, dunque $y(0)=0\Rightarrow y(t)\equiv 0\ \forall t$, inoltre $\frac{d}{dt}\left(y^2-x^2\right)=2y\dot{y}-2x\dot{x} = 8y^2\left(y^2-x^2-1\right)-8x^2\left(x^2-y^2-1\right)=8\left(y^2-x^2\right)\left(y^2+x^2-1\right)$, dunque $y(0)^2-x(0)^2=0\Rightarrow y^2(t)-x^2(t)\equiv 0\ \forall t$. Il bacino di attrazione dell'origine contiene il quadrato $Q=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\right\}$ (colorato in grigio chiaro nella figura): infatti, prendendo come funzione di Ljapunov $W(x,y)=V(x,y)-V(0,0)=1-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$, W si annulla nell'origine ed è strettamente positiva nel suo intorno, perché $(0,0)$ è di minimo isolato per V, inoltre $\frac{d}{dt}W(x,y)=\frac{d}{dt}V(x,y) = \left\langle \dot{x},\dot{y},\frac{\partial V}{\partial x}(x,y),\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right\rangle = -|\nabla V(x,y)|^2 \leq 0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, inoltre prendendo $P_c = Q\cap V^{-1}((-\infty,c])\ \forall c\in(-1,0)$ (colorato in grigio scuro nella figura), è un compatto contenente l'origine, chiusura dell'aperto $Q\cap V^{-1}((-\infty,c))$, positivamente invariante perché V decresce lungo le traiettorie, e infine l'unico suo punto (x,y) tale che $\frac{d}{dt}V(x,y)=0$ è l'origine; dunque, il bacino di attrazione del punto di equilibrio contiene ogni P_c e dunque anche Q.

1.5 Innanzi tutto, il cambiamento di coordinate $(u,v)=\Phi(x,y)=\left(xy,\frac{y}{x}\right)$ è iniettivo su $Q=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x>0, y>0\right\}\supset T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y<2x, \frac{2\pi}{x}\leq y\leq\frac{3\pi}{x}, x>0\right\}$ perché si ha $\begin{cases} x=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv}\end{cases}$; inoltre, $\Phi(T)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2; 1<v<2, 2\pi\leq v\leq 3\pi\}$ e $\det(J_\Phi)=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix} = 2\frac{y}{x}=2v$, allora $\int_T xy\sin(xy)dxdy = \int_{\Phi(T)} u\sin u|\det(J_{\Phi^{-1}})|dudv =$

$$= \int_{\Phi(T)}\frac{u\sin u}{|\det(J_\Phi)|}dudv = \frac{\int_1^2\frac{dv}{v}\int_{2\pi}^{3\pi}u\sin u du}{2} = \frac{[\log v]_1^2\left([-u\cos u]_{2\pi}^{3\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}\cos u du\right)}{2} =$$

$$= \frac{\log 2\left(5\pi+[\sin u]_{2\pi}^{3\pi}\right)}{2} = \frac{5}{2}\pi\log 2.$$

2.1 $I=\left(X^7-X^5-X^4+X^2, X^5-X\right)\subset\mathbb{Q}[X]$ è generato da $p(X) = MCD(X^7-X^5-X^4+X^2, X^5-X)$: essendo $X^7-X^5-X^4+X^2=X^2\left(X^5-X^3-X^2+1\right) = X^2\left(X^3\left(X^2-1\right)-\left(X^2-1\right)\right)=X^2\left(X^3-1\right)\left(X^2-1\right)=X^2(X-1)^2\left(X^2+X+1\right)(X+1)$ e $X^5-X=X\left(X^4-1\right)=X\left(X^2+1\right)\left(X^2-1\right)=X\left(X^2+1\right)(X+1)(X-1)$, allora $p(X)=X(X-1)(X+1)=X^3-X$; infine, $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I}=\frac{\mathbb{Q}[X]}{(p(X))}$ non è un campo perché $p(X)$ non è irriducibile.

2.2 I vettori $v_1=(1,2,0,1)$, $v_2=(1,0,1,0)$ e $v_3=(-1,0,0,2)$ sono linearmente indipendenti perché la matrice avente come i-esima riga il vettore v_i

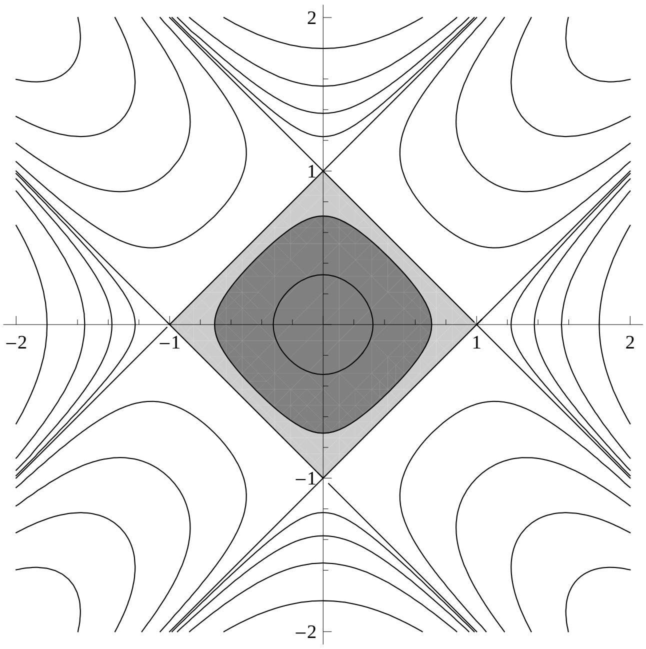

Figure 1: Curve di livello della funzione $V(x,y) = -\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ha rango 3 perché } \det(A(123|123)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

inoltre non può esistere alcun endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che:

1. $f(v_1) = v_1$.
2. $f(v_2) = 2v_1 + v_2$.
3. $f(v_3) = v_3 - v_2$.
4. $f(v_1 + v_2 + v_3) = (2,2,1,1)$.
5. $f(v_1 + v_2 + v_3) = (2,6,0,1)$.

perché le ultime due condizioni sono in evidente contraddizione.

2.3 Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ definita come $f(X) = AX - XA$:

1. f è un operatore lineare perché $f(aX+bY) = A(aX+bY) - (aX+bY)A = aAX + bAY - aXA - bYA = a(AX - XA) + b(AY - YA) = af(X) + bf(Y)$
2. Se $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ allora $AX - XA = \begin{pmatrix} -2x_{12} - 2x_{21} & 2x_{11} + 4x_{12} - 2x_{22} \\ 2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{22} & 2x_{12} + 2x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_{21} = -x_{12} \\ x_{22} = x_{11} + 2x_{12} \end{cases}$, dunque $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s+2t \end{pmatrix}; s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \ker f$ perché, come si deduce dalla fine del punto 2, $\ker f$ contiene solo matrici con diagonale secondaria a somma nulla.

4. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin Im(f)$ perché, come si deduce dall'inizio del punto 2, $Im(f)$ contiene solo matrici a traccia nulla.

2.4 $\{(1,0,2),(1,1,1),(2,1,2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, dunque poiché un endomorfismo è determinato univocamente dall'immagine degli elementi di una base, esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((1,0,2)) = (1,0,2)$, $f((1,1,1)) = (2,2,2)$ e $f((2,1,2)) = (6,3,6)$, cioè tale che $(1,0,2)$, $(1,1,1)$ e $(2,1,2)$ siano autovettori con autovalori rispettivamente $1,2,3$. f è un isomorfismo perché la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\{(1,0,2),(1,1,1),(2,1,2)\}$ è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, che è invertibile; infine, gli autovettori di f^{-1} sono gli stessi di f perché la matrice che rappresenta f^{-1} rispetto alla base che diagonalizza f è $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2.5 La matrice che rappresenta la conica di equazione $X^2 + 2XY + tY^2 + 4X - 6Y + t = 0$ è $A = \begin{pmatrix} t & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & t \end{pmatrix}$, dunque poiché $\det(A) = t^2 - 5t - 21$, si hanno coniche degeneri per $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{109}}{2}$, ed essendo $\det(A(23|23)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t - 1$, la conica è una parabola per $t = 1$, un'iperbole per $t < 1$ e un'ellisse per $t > 1$, reale per $t \in \left(1, \dfrac{5+\sqrt{109}}{2}\right)$ e immaginaria per $t > \dfrac{5+\sqrt{109}}{2}$; per $t = 1$ si ha la conica $X^2 + 2XY + tY^2 + 4X - 6Y + 1 = 0$: per ridurla a forma canonica bisogna innanzi tutto diagonalizzare la matrice $A(23|23) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ attraverso matrici ortonormali; il suo polinomio caratteristico è $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)$ e gli autovettori associato a $\lambda = 2$ e $\lambda = 0$ devono essere tali che si abbia rispettivamente $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dunque una base ortonormale di autovalori è $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$, perciò con il cambio di variabile $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}X' + \frac{\sqrt{2}}{2}Y' \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}X' - \frac{\sqrt{2}}{2}Y' \end{cases}$ l'equazione della conica diventa $2X'^2 - \sqrt{2}X' + 1 - 5\sqrt{2}Y' = 0$ che, con l'ulteriore trasformazione $\begin{cases} X' = X'' + \frac{\sqrt{2}}{40} \\ Y' = Y'' + \frac{3\sqrt{2}}{40} \end{cases}$ diventa $2X''^2 - 5\sqrt{2}Y'' = 0 \iff Y'' - \dfrac{\sqrt{2}}{5}X''^2 = 0$, che è la forma canonica.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, II sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (23 Settembre 2010)

1.1 Essendo $f_n(x) \geq 0 \; \forall x \in [0,1]$, allora $0 \leq 1 - e^{-f_n(x)} \leq f_n(x) \; \forall x \in [0,1]$ e dunque $0 \leq \int_0^1 \left(1 - e^{-f_n(x)}\right) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi per il teorema dei carabinieri $\int_0^1 \left(1 - e^{-f_n(x)}\right) dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

1.2 $0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \log(n!) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{\log(n!)}{n}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{2n^2} \leq$
$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^n)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2n} = 0$, dunque $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \log(n!) = 0$.

1.3 $\sum_{n\geq 0} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ perché $\left|\sum_{n\geq 0} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \leq \sum_{n\geq 0} 2^n \left|\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \leq$
$\leq \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{|x|}{3^n} = |x| \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n < +\infty$; inoltre, la convergenza è totale, e quindi uniforme, sui compatti perché, come sopra, $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in[-M,M]} \left|2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \leq M \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n < +\infty$ ma non è uniforme su $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo della serie non tende uniformemente a 0 in quanto $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \geq \left|2^n \sin\left(\frac{3^n}{3^n}\right)\right| = 2^n \sin 1 \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

1.4 $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 \\ \dot{y} = 4x\left(4x^2 - 1\right) \end{cases}$.

1. $H(x,y) = \left(y - 2x^2\right)\left(y - 1 + 2x^2\right) = y^2 - y + 2x^2 - 4x^4 \Rightarrow \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) =$
$= \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}(t) = \left(4x - 16x^3\right)(2y - 1) + (2y - 1)4x\left(4x^2 - 1\right) = 0$,
dunque H è una costante del moto.
2. (x,y) è punto di equilibrio $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 4x\left(4x^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$: dalla prima equazione ricaviamo che $y = \frac{1}{2}$, dalla seconda che $x = 0 \vee \pm 1$, dunque ci sono tre p.d.e: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right)$.
3. Per discuterne la stabilità dei p.d.e. studiamo la matrice del sistema linearizzato: $A(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 48x^2 - 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 44 & 0 \end{pmatrix}$ ha per autovalori $\pm 2\sqrt{22}$, mentre il punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ è stabile per il teorema di Ljapunov perché è di minimo locale per H in quanto $D_H^2\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left.\begin{pmatrix} 4 - 48x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=\left(0,\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Se $(x(0), y(0)) = (1, 2)$ mi trovo lungo la curva $y = 2x^2$, dunque la traiettoria è soluzione dell'equazione $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow t = \int_0^t ds =$
$= \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{4x^2(s) - 1} ds \overset{x=x(s)}{=} \int_1^{x(t)} \frac{dx}{4x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int_1^{x(t)} \frac{dx}{2x - 1} - \frac{1}{2} \int_1^{x(t)} \frac{dx}{2x + 1} =$
$= \frac{1}{4} \log(2x(t) - 1) - \frac{1}{4}(\log(2x(t) + 1) - \log 3) = \frac{1}{4} \log \frac{6x(t) - 3}{2x(t) + 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{e^{4t}}{3} = \frac{2x(t) - 1}{2x(t) + 1} = 1 - \frac{2}{2x(t) + 1} \Rightarrow \frac{2}{2x(t) + 1} = 1 - \frac{e^{4t}}{3} = \frac{3 - e^{4t}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{3}{3 - e^{4t}} = \frac{2x(t) + 1}{2} = x(t) + \frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{3}{3 - e^{4t}} - \frac{1}{2} = \frac{3 + e^{4t}}{6 - 2e^{4t}};$
dunque, la soluzione con quel dato iniziale è $(x(t), y(t)) = \left(\frac{3 + e^{4t}}{6 - 2e^{4t}}, 2 \left(\frac{3 + e^{4t}}{6 - 2e^{4t}} \right)^2 \right)$.

1.5 Innanzi tutto, la funzione $\frac{2 + \sin \frac{1}{x^2}}{(x^\alpha + 1)(\log x)^2}$ non ha singolarità in $[2, +\infty)$, dunque è sufficiente studiarne l'integrabilità all'infinito; inoltre, poiché $1 \leq 2 + \sin \frac{1}{x^2} \leq 3$, la funzione ha lo stesso comportamento di $\frac{1}{(x^\alpha + 1)(\log x)^2}$ e cioè lo stesso di $\frac{1}{x^\alpha (\log x)^2}$: dunque, la funzione è integrabile per $\alpha > 1$, perché $\frac{1}{x^\alpha (\log x)^2} \leq \frac{1}{x^\alpha (\log 2)^2}$ che è integrabile; per $\alpha < 1$ la funzione non è integrabile perché $\forall \beta > 0 \, \exists C(\beta)$ tale che $|\log x| \leq C(\beta) x^\beta \; \forall x \geq 2$ e dunque per $\beta = \frac{1 - \alpha}{4}$ si ha $\frac{1}{x^\alpha (\log x)^2} \geq \frac{1}{C^2 \left(\frac{1-\alpha}{4} \right) x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ che non è integrabile perché $\frac{1 + \alpha}{2} < 1$; infine, per $\alpha = 1$ la funzione è integrabile perché $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\log 2} < +\infty$.

2.1 $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1 + i)}$ è un campo perché l'ideale $(1 + i) \subset \mathbb{Z}[i]$ è massimale, in quanto $1 + i$ è irriducibile essendo la sua norma $(\Re(1 + i))^2 + (\Im(1 + i))^2 = 2$ è un numero primo; inoltre, il campo ha caratteristica 2 perché, indicando con $[a] = a + (1 + i) \in \frac{\mathbb{Z}[i]}{(1 + i)} \; \forall a \in \mathbb{Z}[i]$, si ha $2[a] = [2a] = [(1 + i)(1 - i)a] = (a - ia)[1 + i] = [0]$ $\forall [a] \in \frac{\mathbb{Z}[i]}{(1 + i)}$; infine, per ogni classe può essere scelto di norma minore di quella di $1 + i$, dunque $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1 + i)} = \{[0], [1], [-1], [i], [-i]\}$, ma poiché $[1] - [-1] = [2] = (1 - i)[1 + i] = [0]$, $[1] - [-i] = [1 + i] = [0]$ e $[i] - [-i] = [2i] = i(1 - i)[1 + i] = [0]$, allora $[1] = [-1] = [i] = [-i]$ e pertanto $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1 + i)} = \{[0], [1]\}$ ha solo due elementi.

2.2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$

$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left(-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$
$= (-1-\lambda)\left(-\lambda\left(\lambda+\lambda^2\right)-(1+\lambda)\right) = (-1-\lambda)\left(-\lambda^2-\lambda^3-1-\lambda\right) = \lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 =$
$= (\lambda+1)^2\left(\lambda^2+1\right)$; gli autovalori di A sono le radici del suo polinomio caratteristico, cioè 1 (con molteplicità algebrica 2) e $\pm i$; l'autospazio associato a $\lambda = 1$ è formato dai vettori che soddisfano $(A+\mathbb{I}_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ y-w=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, cioè è costituito dai vettori del tipo $(t,s,-s,s)$ e dunque una sua base è ad esempio $\{(1,0,0,0),(0,1,-1,1)\}$; analogamente per l'autospazio associato a $\lambda = i$: $\begin{cases} (-1-i)x+y+z=0 \\ -iy-w=0 \\ y-iz=0 \\ y+z-(1+i)w=0 \end{cases}$ è costituito dai vettori del tipo $(-it,t,-it,-it)$ e dunque una sua base è $\{(1,i,1,1)\}$; infine per $\lambda = -i$: $\begin{cases} (i-1)x+y+z=0 \\ iy-w=0 \\ y+iz=0 \\ y+z+(i-1)w=0 \end{cases}$ è formato dai vettori del tipo (it,t,it,it) e dunque una sua base è $\{(1,-i,1,1)\}$.

2.3 $\begin{cases} mY+(m-2)Z=-2 \\ mX+Y+2Z=1 \\ mX+3Z=1 \end{cases}$: il determinante della matrice dei coefficienti è
$\begin{vmatrix} 0 & m & m-2 \\ m & 1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -m\begin{vmatrix} m & m-2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} m & m-2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m(1-m),$
dunque per $0 \neq m \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione data da

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} -2 & m & m-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{2m(1-m)}, \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & m-2 \\ m & 1 & 2 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2m(1-m)}, \frac{\begin{vmatrix} 0 & m & -2 \\ m & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2m(1-m)}\right) = \left(\frac{m+2}{m^2-m}, \frac{1}{1-m}, \frac{1}{1-m}\right).$$

Se invece $m = 0$ oppure $m = 1$, il sistema non ha soluzioni perché la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3 a differenza di quella orlata, perché il determinante del minore ottenuto con le ultime tre righe non è nullo.

2.4 1. La condizione $\langle v_1, v_2\rangle \subset \ker(F)$ equivale a $F((0,0,1,1)) = (0,0,0,0) = F((0,1,1,0))$, dunque F dev'essere tale che $\begin{cases} F((1,0,0,0)) = (c,0,0,0) \\ F((0,0,0,1)) = (0,0,1,0) \\ F((0,0,1,1)) = (0,0,0,0) \\ F((0,1,1,0)) = (0,0,0,0) \end{cases}$; sottraendo la seconda equazione alla terza si ottiene $F((0,0,1,0)) = (0,0,-1,0)$ e sottraendo quest'ultima alla quarta equazione si ottiene $F((0,1,0,0)) = (0,0,1,0)$, dunque si ha $\begin{cases} F((1,0,0,0)) = (c,0,0,0) \\ F((0,1,0,0)) = (0,0,1,0) \\ F((0,0,1,0)) = (0,0,-1,0) \\ F((0,0,0,1)) = (0,0,1,0) \end{cases}$, pertanto la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Il polinomio caratteristico di F è $\begin{vmatrix} c-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (c-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$ $= -\lambda(c-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-c)(\lambda+1)$; l'autospazio associato a $\lambda = 0$ è dato dai vettori tali che $\begin{cases} cx = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$, cioè del tipo $\begin{cases} (0,s,t,t-s) & \text{se } c \neq 0 \\ (s,t,u,u-t) & \text{se } c = 0 \end{cases}$, dunque una sua base è $\begin{cases} (0,1,0,-1),(0,0,1,1) & \text{se } c \neq 0 \\ (1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,1) & \text{se } c = 0 \end{cases}$; l'autospazio associato a $\lambda = 1$ è dato dai vettori tali che $\begin{cases} (c+1)x = 0 \\ y = 0 \\ y + w = 0 \\ w = 0 \end{cases}$, cioè del tipo $\begin{cases} (0,0,s,0) & \text{se } c \neq -1 \\ (s,0,t,0) & \text{se } c = -1 \end{cases}$, dunque una sua base è $\begin{cases} (0,0,1,0) & \text{se } c \neq -1 \\ (1,0,0,0),(0,0,1,0) & \text{se } c = -1 \end{cases}$; infine, l'autospazio associato a $\lambda = c$ è dato dai vettori tali che $\begin{cases} -cy = 0 \\ y - (1+c)z + w = 0 \\ -cw = 0 \end{cases}$, cioè del tipo $\begin{cases} (s,0,0,0) & \text{se } -1 \neq c \neq 0 \\ (s,0,t,0) & \text{se } c = -1 \\ (s,t,u,u-t) & \text{se } c = 0 \end{cases}$, dunque sono generati da $\begin{cases} (1,0,0,0) & \text{se } -1 \neq c \neq 0 \\ (1,0,0,0),(0,0,1,0) & \text{se } c = -1 \\ (1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,1) & \text{se } c = 0 \end{cases}$.

3. In base a quanto visto al punto precedente, F è diagonalizzabile $\forall c \in \mathbb{R}$, perché una sua base di autovettori è $\{(0,1,0,-1),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(1,0,0,0)\}$.

2.5 La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; poiché $\det(A) =$ $= 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, inoltre, posta $A_0 := A(23|23) =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_0) = 6 > 0$, dunque la conica è un'ellisse; per trovarne il centro è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} -2 + 2X + 2Y = 0 \\ -1 + 2X + 5Y = 0 \end{cases}$, quindi il centro è $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; i due assi di simmetria sono le rette passanti per il cen-

tro e aventi le direzioni dei due autovettori di A_0: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6)$,
$V_1 = \left\{ \begin{array}{l} X+2Y=0 \\ 2X+4Y=0 \end{array} \right. = \langle(-2,1)\rangle$, $V_6 = \left\{ \begin{array}{l} -4X+2Y=0 \\ 2X-Y=0 \end{array} \right. = \langle(1,2)\rangle$, dunque i due assi sono $\left\{ \begin{array}{l} x=-2t+\frac{4}{3} \\ y=t-\frac{1}{3} \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{l} x=t+\frac{4}{3} \\ y=2t-\frac{1}{3} \end{array} \right.$.
Per ridurre a forma canonica la conica, eliminiamo innanzi tutto i termini misti diagonalizzando A_0 attraverso matrici ortogonali, dunque poiché una base ortonormale di autovettori di A_0 è $\left(\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$ e quindi con il cambio di variabile $\left\{ \begin{array}{l} X=-\frac{2}{\sqrt{5}}X'+\frac{Y'}{\sqrt{5}} \\ Y=\frac{X'}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}Y' \end{array} \right.$ si ottiene che $2+\dfrac{6}{\sqrt{5}}X'+X'^2-\dfrac{8}{\sqrt{5}}Y'+6Y'^2=0$; a questo punto, per ottenere la forma canonica elimino i termini di primo grado: $\left\{ \begin{array}{l} X'=X''-\frac{3}{\sqrt{5}} \\ Y'=Y''+\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{array} \right. \Rightarrow -\dfrac{1}{3}+X''^2+6Y''^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\dfrac{X''}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\dfrac{Y''}{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\right)^2 = 1.$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, II sessione - Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 3 (27 Settembre 2010)

1.1 $f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$, dunque per il teorema fondamentale del calcolo $f'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} > 0$ e quindi la funzione è monotona crescente; inoltre, $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\frac{1}{(1-x)^2} > 0$ e quindi la funzione è convessa; infine, la funzione può essere estesa per continuità in $x = 1$ perché $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt < +\infty$ perché ha lo stesso andamento di $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$, quindi f è anche limitata.

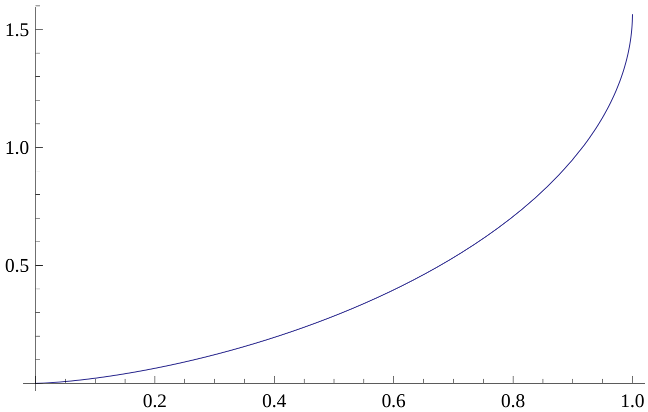

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$

1.2 $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}dx = \int \frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}dx +$
$+ \int \frac{x}{x^2-x+1}dx = x + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} + c = x +$
$+ \frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx + c = x + \frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{2\sqrt{3}x-\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}dx +$
$+c = x + \frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}x-\sqrt{3}}{3}\right) + c.$

1.3 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n-2}}\right)^{\frac{(n-2)\left(n^3-1\right)}{\left(n^2+3\right)\left(n^2+1\right)}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{(n-2)\left(n^3-1\right)}{\left(n^2+3\right)\left(n^2+1\right)}} = \frac{1}{e}.$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{2}.$$

1.4 $V(x) = a(1-\cos x) + \cos(2x)$.

1. Il sistema dinamico associato è $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin x + 2\sin(2x) = (4\cos x - a)\sin x \end{cases}$, dunque $(0,0)$ e $(\pi,0)$ sono punti di equilibrio $\forall a \in \mathbb{R}$; se $|a| \geq 4$, sono gli unici p.d.e., mentre per $-4 < a < 4$ ci sono anche $\left(\pm\arccos\left(\frac{a}{4}\right), 0\right)$.
2. Un p.d.e. del tipo $(x_0, 0)$ è stabile $\iff$ x_0 è di minimo per il potenziale, dunque essendo $V'(x) = (a - 4\cos x)\sin x$, dal segno della derivata prima deduciamo che se $-4 < a < 4$ i punti $\left(\pm\arccos\left(\frac{a}{4}\right), 0\right)$ sono stabili mentre $(0,0)$ e $(\pi,0)$ soo instabili; se invece $a \geq 4$, $(0,0)$ è stabile e $(\pi,0)$ è instabile, e infine per $a \leq -4$ $(0,0)$ è instabile e $(\pi,0)$ stabile.
3. Essendo $x \in \mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, tutte le traiettorie sono limitate, pertanto sono periodiche ad eccezione di quelle che contengono punti di equilibrio; dunque, poiché le traiettorie avvengono su curve di livello del tipo $\frac{y^2}{2} + V(x) = E$, gli unici valori di E che non danno traiettorie periodiche sono quelli dei p.d.e., cioè $E = 1$, $E = 2a + 1$ e, quando $-4 < a < 4$, $E = a^2 + a - 1$.

1.5 Innanzi tutto, il cambiamento di coordinate $\Phi(x,y) = \left(y - x^3, y + x^3\right)$ è iniettivo su tutto $\mathbb{R}^2$ perché $\Phi^{-1}(u,v) = \left(\sqrt[3]{\frac{v-u}{2}}, \frac{u+v}{2}\right)$; inoltre,

$$\Phi(T) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, \frac{u+v}{2} < 3, \frac{v-u}{2} \geq 1\right\} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u \leq 2, u+2 \leq v < 6-u\right\}$$

e $\det(J_\Phi) = \begin{vmatrix} -3x^2 & 1 \\ 3x^2 & 1 \end{vmatrix} = -6x^2 = -6\left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, dunque $\int_T x^2\left(y - x^3\right)e^{y+x^3}dxdy =$

$$= \int_{\Phi(T)}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{2}{3}} ue^v|\det(J_{\Phi^{-1}})|dudv = \int_{\Phi(T)}\frac{\left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{2}{3}} ue^v}{|\det(J_\Phi)|}dudv = \frac{\int_0^2 udu\int_{u+2}^{6-u}e^v dv}{6} =$$

$$= \frac{\int_0^2 u[e^v]_{u+2}^{6-u}du}{6} = \frac{\int_0^2 u\left(e^{6-u} - e^{u+2}\right)du}{6} = \frac{e^2}{6}\left(\int_0^2 ue^{4-u}du - \int_0^2 ue^u du\right) = \frac{e^2}{6}\left(\left[-ue^{4-u}\right]_0^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^2 e^{4-u}du - [ue^u]_0^2 + \int_0^2 e^u du\right) = \frac{e^2}{6}\left(-2e^2 + \left[-e^{4-u}\right]_0^2 - 2e^2 + [e^u]_0^2\right) = \frac{e^2}{6}\left(e^4 - 4e^2 - 1\right).$$

2.1 Sia $\mathbb{K}$ l'insieme delle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{F}_3$.

1. Dati $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$,
   $X_1 - X_2 = \begin{pmatrix} a_1 - a_b & -(b_1 - b_2) \\ b_1 - b_2 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$ e $X_1X_2^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \frac{1}{a_2^2+b_2^2} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} & -\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \\ \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} & \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{K},$$

dunque $\mathbb{K}$ è un campo.

2. Identificando le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $\mathbb{F}_3$, ho che $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3(\alpha)$ con $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; poiché $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ho che α è radice di X^2+1 e dunque, per il teorema fondamentale di omomorfismo di anelli, $\mathbb{K} \approx \dfrac{\mathbb{F}_3[X]}{(X^2+1)}$.

3. $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ è ciclico di ordine 8, dunque ha $\varphi(8) = 4$ generatori; 1 chiaramente non può essere un generatore, e neppure -1 perché ha ordine 2 in quanto $(-1)^2 = 1$; inoltre, neanche $\pm\alpha$ possono essere generatori perché $(\pm\alpha)^4 = (-1)^2 = 1$ e quindi hanno ordine 4; dunque, i generatori del gruppo moltiplicativo sono $1+\alpha$, $1-\alpha$, $\alpha-1$ e $-1-\alpha$.

2.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} +$ $+ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda(a+1) + a - 1\right) - 2(1-\lambda) = -\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 + (2-2a)\lambda +$ $+(a-3)$.

2. La matrice è sicuramente diagonalizzabile se il suo polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda(a+1) + a - 3\right)$ non ha radici multiple: poiché $\lambda = 1$ non è radice di $\lambda^2 - \lambda(a+1) + a - 3$ per alcun valore di a, questa condizione è verificata $\iff \left(\lambda^2 - \lambda(a+1) + a - 3\right)$ non ha ha radici multiple, cioè se non si annulla il suo discriminante $a^2 - 2a + 13$, ma questo è sempre vero perché $a^2 - 2a + 13 > a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$, dunque la matrice è diagonalizzabile $\forall a \in \mathbb{R}$.

2.3
1. A e A^t hanno gli stessi autovalori perché hanno lo stesso polinomio caratteristico, perché $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}_n) = \det\left((A-\lambda\mathbb{I})^t\right) = \det\left(A^t - (\lambda\mathbb{I}_n)^t\right) =$ $= \det\left(A^t - \lambda\mathbb{I}_n^t\right) = \det\left(A^t - \lambda\mathbb{I}\right) = P_{A^t}(\lambda)$.

2. Scegliendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $P_A(\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$, dunque l'unico autovalore è $\lambda = 0$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0$, dunque gli autovettori sono tutti e soli quelli del tipo $(t, 0)$, mentre per la sua trasposta si ha $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0$ e quindi gli autovettori di questa matrice sono del tipo $(0, t)$.

3. Se A è invertibile, allora λ è autovalore di $A \iff \dfrac{1}{\lambda}$ è autovalore di A^{-1}, perché $\lambda \neq 0$ per ogni autovalore di A in quanto A è invertibile, e

dunque $\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \det(A)\det\left(\mathbb{I}-\lambda A^{-1}\right) = \det(A)\det\left((-\lambda)\left(A^{-1}-\dfrac{\mathbb{I}}{\lambda}\right)\right) =$
$= \dfrac{(-1)^n}{\lambda^n}\det(A)\det\left(A^{-1}-\dfrac{\mathbb{I}}{\lambda}\right)$, dunque poiché $\det(A)\neq 0$, allora
$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = 0 \iff \det\left(A^{-1}-\dfrac{\mathbb{I}}{\lambda}\right) = 0.$

2.4 $A = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 10 \\ -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$,
e gli autospazi associati agli autovalori sono rispettivamente $V_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \right.$
$\left. = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \langle(2,1)\rangle$ e $V_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \langle(5,3)\rangle$,
dunque se $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, allora $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}A^{100}M = \left(M^{-1}AM\right)^{100} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{100} = M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 6-5\cdot 2^{100} & 10\left(2^{100}-1\right) \\ 3\left(1-2^{100}\right) & 6\cdot 2^{100}-5 \end{pmatrix}.$

2.5 La matrice associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -2 \\ -\sqrt{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$: poiché
$\det(A) = 0$ e $\det(A_0) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$, la conica è un'iperbole degenere; per ridurre la conica a forma canonica, eliminiamo innanzi tutto i termini misti diagonalizzando A_0 tramite matrici ortogonali: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
$= (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$: $V_{-1} = \begin{cases} -2X-2Y=0 \\ -2X-2Y=0 \end{cases} = \left\langle\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle$,
$V_{-1} = \begin{cases} 2X-2Y=0 \\ -2X+2Y=0 \end{cases} = \left\langle\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle$, dunque attraverso il cambio
di variabile $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}X' + \frac{\sqrt{2}}{2}Y' \\ Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}X' + \frac{\sqrt{2}}{2}Y' \end{cases}$ otteniamo $3X'^2 - Y'^2 - 4Y' - 4 = 0$;
per avere la forma canonica, eliminiamo i termini lineari con la trasformazione $\begin{cases} X' = X'' \\ Y' = Y'' - 2 \end{cases}$ e otteniamo ora $3X''^2 - Y''^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{X''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - Y''^2 = 0.$