Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2008-2009, III sessione - Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 1 (15 Gennaio 2010)

1.1 Dimostrare che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-2}{x^3 - ax^2 + x - a} dx$ converge per uno e un solo valore di $a \in \mathbb{R}$ e, per questo valore di a, calcolarlo.

1.2 Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt}{x^2}$ e $\lim_{n \to \infty} n \int_1^{+\infty} e^{-nx^2} dx$.

1.3 Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{e^n - n^2}$.

1.4 Dato il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 y \left(x^2 + 2y^2 - 1\right) \\ \dot{y} = -2xy^2 \left(2x^2 + y^2 - 1\right) \end{cases}$,

1. Determinare una costante del moto per il sistema.
2. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Discutere qualitativamente il moto.

1.5 Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, |y| \le \sqrt{3}x\}$.
Calcolare $\int_D \frac{|y|}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$.

2.1 Fattorizzare 30 in elementi irriducibili nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ e determinare tutti gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/\langle 30 \rangle$.

2.2 Sia r la retta dello spazio affine $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$.
Determinare tutte le rette s passanti per $(0, 2, 0)$ e tali che il piano contenente r e s contenga anche l'origine.

2.3 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\varphi, \psi : V \to \mathbb{K}$ due funzionali lineari entrambi non nulli.
Dimostrare che $\dim(\ker(\varphi) \cap \ker(\psi)) = n - 1 \Leftrightarrow \varphi = c\psi$ per un opportuno $c \in \mathbb{K}$.

2.4 Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione $2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 4X - 2Y + 2 = 0$.

2.5 Sia V lo spazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ e
$W : \{f \in V : f((1, 0, 1)) = (0, 1, 0), f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)\}$.

1. Dimostrare che W non è un sottospazio di V.
2. Determinare una matrice che rappresenti il generico elemento di W.
3. Determinare quali degli elementi di W sono isomorfismi.
4. Determinare gli elementi $g \in W$ tali che $(1, 1, 1) \in \ker(g)$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2008-2009, III sessione - Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 2 (20 GENNAIO 2010)

1.1 Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\sin x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$.

1.2 Discutere la convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cosh\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right)$.

1.3 Sia $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$.
Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di $\int_D \frac{xyz}{(1-x^2-y^2-z^2)^\alpha}$.

1.4 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale $V(x) = \frac{\alpha}{4}x^4 + \frac{x^2}{2}$, al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema meccanico associato.
2. Discuterne la stabilità.
3. Determinare i valori di energia in corrispondenza dei quali le traiettorie sono periodiche.

1.5 Siano $f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$ e $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.
Calcolare $\min_E f$, $\max_E f$ e dire se esiste $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)$.

2.1 Sia $G = (\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$. Determinare tutti i sottogruppi di G e mostrare che G è prodotto diretto di due suoi sottogruppi.

2.2 Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2-h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$.

1. Determinare i valori di h per cui A ha rango minore di 3.
2. Stabilire se per $h = 1$ A è diagonalizzabile.

2.3 Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Mostrare che $V := \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

2.4 Sia $L : V \to V$ un operatore lineare e sia v tale che $L^m v = 0 \neq L^{m-1}v$.
Mostrare che $v, Lv, \ldots, L^{m-1}v$ sono linearmente indipendenti.

2.5 Sia $V = C([0,1], \mathbb{R})$ e W il suo sottospazio generato dalle funzioni x e x^2.

1. Mostrare che $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare su V.
2. Trovare una base ortonormale per W.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2008-2009, III sessione - Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 3 (25 GENNAIO 2010)

1.1 Studiare la funzione $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ definita come $f(x)=\int_0^x\sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$, tracciandone un grafico approssimativo e determinando in particolare se la funzione è monotona, convessa e limitata.

1.2 Mostrare che se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è tale che $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, allora f è costante.

1.3 Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^k}\right)^{2^n}$.

1.4 Calcolare, usando il teorema di differenziazione per serie e riconducendosi ad un'opportuna serie di potenze, $\sum_{n=1}^\infty n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

1.5 Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano $\begin{cases}\dot{x}=2y-1\\ \dot{y}=4x\left(4x^2-1\right)\end{cases}$.

1. Mostrare che la funzione $H(x,y)=\left(y-2x^2\right)\left(y-1+2x^2\right)$ è una costante del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Determinare esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(x(0),y(0))=(1,2)$.

2.1 Sia $\mathbb{K}$ l'insieme delle matrici del tipo $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{F}_3$.

1. Mostrare che $\mathbb{K}$ è un campo.
2. Determinare esplicitamente un polinomio $p(X)\in\mathbb{F}_3[X]$ tale che $\mathbb{K}$ sia isomorfo a $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{(p(X))}$.
3. Determinare esplicitamente un generatore del gruppo $(\mathbb{K}^*,\cdot)$.

2.2 Risolvere, al variare del parametro reale m, il sistema lineare
$$\begin{cases}my+(m-2)z=-2\\ mx+y+2z=1\\ mx+3z=1\end{cases}.$$

2.3 Sia $A_n=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}^n$.

1. Trovare un'espressione esplicita per A_n.
2. Trovare gli autovalori di A_n e dire se è diagonalizzabile.

2.4 Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. È vero che se A è diagonalizzabile lo è anche A^2? È vero il viceversa? Dimostrare o trovare opportuni controesempi.

2.5 Classificare e ridurre a forma canonica la conica di equazione $X^2 + Y^2 - 4XY - 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - 4 = 0$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, I sessione - Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 1 (20 MAGGIO 2010)

1.1 Siano $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ tali che $\int_0^1 f_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$.
Mostrare che $\int_0^1 \left(1 - e^{-f_n(x)}\right) dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

1.2 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\log\left(x^2+a\right) - 2\log x\right)$.
2. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$.

1.3 Sia $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$.
Calcolare $\int_A x^2 dxdydz$

1.4 Sia $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\log\left(1+x^{2n}\right)}{nx} & x > 0 \end{cases}$.

1. Calcolare il limite puntuale di $f_n(x)$.
2. Stabilire se la convergenza è uniforme.
3. Studiare la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

1.5 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale $V(x) = a(1-\cos x) + \cos(2x)$, con $x \in \mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.
Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, rispondere alle seguenti domande:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema dinamico associato $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases}$
2. Discuterne la stabilità.
3. Determinare i valori di energia in corrispondenza dei quali le traiettorie sono periodiche.

2.1 Determinare un generatore monico dell'ideale $I = \left(X^7 - X^5 - X^4 + X^2, X^5 - X\right) \subset \mathbb{Q}[X]$ e stabilire se l'anello quoziente $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I}$ è un campo.

2.2 Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.
Determinare il polinomio caratteristico di A, i suoi autovalori e basi dei suoi autospazi.

2.3 Sia V uno spazio vettoriale e $P : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $P^2 = P$.
Mostrare che $V = \ker(P) \oplus Im(P)$.
Suggerimento: $v = (v - P(v)) + P(v)$.

2.4 Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica di equazione $2X^2 - Y^2 - 4X + 2Y - 3 = 0$.

2.5 Sia $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $\det((a, b), (c, d)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.
Mostrare che det è una forma bilineare antisimmetrica e calcolarne la sua matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, I sessione - Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 2 (27 Maggio 2010)

1.1 Calcolare $\lim_{x\to 1^+} (\log x)^a \log(\log x)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Calcolare $\int \frac{4+x^3}{x^2-1}dx$.

1.3 Determinare l'insieme di definizione e di continuità della funzione $f(x,y) = \int_0^1 \frac{1-e^{-xyt^2}}{t}dt$.

1.4 Mostrare che, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge assolutamente.

1.5 Si consideri il sistema dinamico planare $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$, ove $V(x,y) = -\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema.
2. Studiarne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il sistema.

2.1 Sia $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ definita come $\varphi(x) = ([x]_3, [x]_4)$.

1. Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di gruppi additivi.
2. Determinare $\varphi^{-1}(\{([1]_3, [2]_4)\})$.
3. Determinare $\ker \varphi$ e applicare il primo teorema di omomorfismo di gruppi.

2.2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è $\begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2-h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore di h per cui $\dim(\ker f) = 2$.
2. Per quel valore di h, determinare una base di $\ker f$.
3. Posto $h = 1$, determinare autovalori e autovettori di f e stabilire se è diagonalizzabile.

2.3 Sia $A \in O_2(\mathbb{R})$.

1. Mostrare che $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
2. Mostrare che, se $\det A = 1$, allora $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2.4 Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : XA \text{ e } AX \text{ sono simmetriche}\}$.

1. Mostrare che V è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
2. Determinare esplicitamente tutte le coppie (Δ_1, Δ_2) tali che $\exists X \in V$ con $AX = \Delta_1$ e $XA = \Delta_2$.

2.5 Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica di equazione $2X^2 + 4XY - Y^2 + 6Y - 8 = 0$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, I sessione - Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 3 (4 Giugno 2010)

1.1 Stabilire per quali $p, q \in \mathbb{R}$ i seguenti integrali impropri convergono:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log(1+x) - \log x)^q}{x^p} dx.$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log(1+x))^q (\log x)^p}{x^{p+q}} dx.$

1.2 Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^3 x}$.

1.3 Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Mostrare che $f \in C^1((0, +\infty))$ e $f(x) \overset{x \to +\infty}{\to} 0$.
2. Esprimere $f'(x)$ in funzione di $f(x)$ e ricavare un'altra espressione per f.

1.4 Mostrare che esistono due funzioni $F, G : (x, y) \to (u, v)$ che soddisfano $\begin{cases} xyu(x,y) - 4yu(x,y) + 9xv(x,y) = 0 \\ 2xy - 3y^2 + v^2(x,y) = 0 \end{cases}$ e sono di classe C^1 in un intorno del punto $(x, y) = (1, 1)$; calcolare inoltre la matrice jacobiana nel punto $(1, 1)$ di una a piacere tra F e G.

1.5 Una persona si trova al centro di una piattaforma circolare di raggio R che ruota intorno al suo centro con velocità angolare $\omega(t)$.

1. L'uomo prova a raggiungere il bordo della piattaforma muovendosi in linea retta a velocità costante v. Calcolare la forza che deve esercitare per opporsi alle forze apparenti che altrimenti lo farebbero deviare dalla direzione radiale.
2. Supponiamo che, una volta arrivato a metà strada, la piattaforma si blocchi e l'uomo continui ad esercitare la stessa forza; determinare sotto quali condizioni su $\omega(t)$ l'individuo raggiunge il bordo della piattaforma senza deviare dalla direzione radiale.

2.1 Si considerino $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ come gruppi additivi. Mostrare che:

1. Ogni sottogruppo finitamente generato di $\mathbb{Q}$ è ciclico.
2. Ogni elemento del gruppo quoziente $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ha ordine finito.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ ha un unico sottogruppo di ordine n e tale sottogruppo è ciclico.

2.2 Sia $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $\lambda = 1$ è un autovalore di A.
2. Posto $a = 0$, stabilire se esistono 3 autovettori linearmente indipendenti.

2.3 Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
Mostrare che $tr(AB) = tr(BA)$.

2.4 Siano $V = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : m_{11} = m_{22}, m_{21} = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Mostrare che V è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
2. Trovare un sottospazio vettoriale U di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$.
3. Trovare $A_1 \in U$ e $A_2 \in V$ tali che $A = A_1 + A_2$.

2.5 Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.
Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ A è diagonalizzabile e per tali valori diagonalizzare A.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, II sessione - Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 1 (20 SETTEMBRE 2010)

1.1 Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t\left(e^t-1\right)}{e^{2t}-1}dt.$

1.2 Calcolare:

1. $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{\log\left(1+e^{4x}\right)}.$

1.3 Stabilire per quali valori del parametro reale x convergono le serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-12|^{n+2}}{n^3e^{2n}}.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-x^2}}.$

1.4 Posta $V(x,y)=-\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right)$, si consideri il sistema dinamico $\begin{cases}\dot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)\\ \dot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\end{cases}$:

1. Determinare i punti di equilibrio
2. Discuterne la stabilità
3. Studiare qualitativamente il sistema.

1.5 Sia $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y<2x, \dfrac{2\pi}{x}\le y\le\dfrac{3\pi}{x}, x>0\right\}$. Calcolare $\displaystyle\int_T xy\sin(xy)dxdy.$

(Suggerimento: potrebbe essere utile il cambiamento di coordinate $\begin{cases}u=xy\\ v=\frac{y}{x}\end{cases}$ *)*

2.1 Determinare un generatore monico dell'ideale $I:=\left(X^7-X^5-X^4+X^2, X^5-X\right)\subset\mathbb{Q}[X]$ e stabilire se l'anello quoziente $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{I}$ è un campo.

2.2 Dati i vettori $v_1=(1,2,0,1)$, $v_2=(1,0,1,0)$ e $v_3=(-1,0,0,2)$, verificare che sono linearmente indipendenti e stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che:

1. $f(v_1)=v_1$.
2. $f(v_2)=2v_1+v_2$.
3. $f(v_3)=v_3-v_2$.
4. $f(v_1+v_2+v_3)=(2,2,1,1)$.
5. $f(v_1+v_2+v_3)=(2,6,0,1)$.

2.3 Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, $A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$ e $f:\mathbb{R}^{2,2}\to\mathbb{R}^{2,2}$ definita come $f(X)=AX-XA$:

1. Verificare che f è un operatore lineare.
2. Determinare il suo nucleo.
3. Verificare che $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \ker f$.
4. Stabilire se $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Im(f)$.

2.4 Mostrare che esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$ e $(2, 1, 2)$ siano autovettori con autovalori rispettivamente $1, 2, 3$. Mostrare che f è un isomorfismo e calcolare gli autovettori di f^{-1}.

2.5 Studiare la famiglia di coniche descritte dall'equazione $X^2 + 2XY + tY^2 + 4X - 6Y + t = 0$, riconoscendo le coniche degeneri, le parabole, le iperboli, le ellissi (reali o immaginarie) e scrivere le equazioni canoniche per la conica corrispondente a $t = 1$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, II sessione - Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 2 (23 SETTEMBRE 2010)

1.1 Siano $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ tali che $\int_0^1 f_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Mostrare che $\int_0^1 \left(1 - e^{-f_n(x)}\right) dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$.
(Suggerimento: $0 \le 1 - e^{-t} \le t \ \forall t \ge 0$*)*

1.2 Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \log(n!)$.

1.3 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\sum_{n\ge 0} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$.

1.4 Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 - 1\right) \end{cases}$, rispondere alle seguenti domande:

1. Verificare che la funzione $H(x,y) = \left(y - 2x^2\right)\left(y - 1 + 2x^2\right)$ è una costante del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio.
3. Discuterne la stabilità.
4. Trovare esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 2)$.

1.5 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è integrabile su $[2,+\infty)$ la funzione $\frac{2 + \sin\frac{1}{x^2}}{(x^\alpha + 1)(\log x)^2}$.

2.1 Sia $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ l'anello degli interi di Gauss; mostrare che l'anello quoziente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}$ è un campo finito di caratteristica 2 e determinarne il numero degli elementi.

2.2 Determinare polinomio caratteristico, autovalori e basi degli autospazi della matrice reale $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.3 Discutere il sistema lineare $\begin{cases} mY + (m-2)Z = -2 \\ mX + Y + 2Z = 1 \\ mX + 3Z = 1 \end{cases}$ al variare del parametro reale m.

2.4 Siano $v_1 = (0,0,1,1)$ e $v_2 = (0,1,1,0)$ due vettori in $\mathbb{R}^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $\langle v_1, v_2 \rangle \subset \ker(F)$, $F(e_4) = e_3$ e $F(e_1) = ce_1$ per un certo $c \in \mathbb{R}$:

1. Determinare una matrice che rappresenti F.
2. Trovare basi per gli autospazi di F.

3. Determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.

2.5 Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione $2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 4X - 2Y + 2 = 0$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato PFB

A.A. 2009-2010, II sessione - Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 3 (27 Settembre 2010)

1.1 Studiare la funzione $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ definita come $f(x)=\int_0^x\sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$, tracciandone un grafico approssimativo e determinando in particolare se la funzione è monotona, convessa e limitata.

1.2 Calcolare $\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}dx$.

1.3 Calcolare:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}}$.
2. $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$.

1.4 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m=1$ soggetto alla forza di energia potenziale $V(x)=a(1-\cos x)+\cos(2x)$, con $x\in\mathbb{T}=\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.
Al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$, rispondere alle seguenti domande:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema dinamico associato $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-V'(x)\end{cases}$
2. Discuterne la stabilità.
3. Determinare i valori di energia in corrispondenza dei quali le traiettorie sono periodiche.

1.5 Sia $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^3<y<3, x\geq 1\right\}$. Calcolare $\int_T x^2\left(y-x^3\right)e^{y+x^3}dxdy$.
(Suggerimento: potrebbe essere utile il cambiamento di coordinate $\begin{cases}u=y-x^3\\ v=y+x^3\end{cases}$ *)*

2.1 Sia $\mathbb{K}$ l'insieme delle matrici del tipo $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{F}_3$.

1. Mostrare che $\mathbb{K}$ è un campo.
2. Determinare esplicitamente un polinomio $p(X)\in\mathbb{F}_3[X]$ tale che $\mathbb{K}$ sia isomorfo a $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{(p(X))}$.
3. Determinare esplicitamente un generatore del gruppo $(\mathbb{K}^*,\cdot)$.

2.2 Sia $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, ove a è un parametro reale:

1. Calcolare il polinomio caratteristico di A.
2. Determinare i valori di a per cui A è diagonalizzabile.

2.3 Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice quadrata:

1. Provare che A e A^t hanno gli stessi autovalori.
2. Dare un esempio di matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ tale che A e A^t non hanno gli stessi autovettori.
3. Supponendo che A sia invertibile, stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e quelli di A^{-1}.

2.4 Calcolare $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^{150}$.

2.5 Classificare e ridurre a forma canonica la conica di equazione
$X^2 + Y^2 - 4XY - 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - 4 = 0$.