Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 07/12/20 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{2n}{n+1}} \\
&= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}-\frac{2n}{n+1}} \\
&= e^{-2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-2^n}{n!\sqrt[n]{n^n+1}}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!-2^n}{n!\sqrt[n]{n^n+1}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-\frac{2^n}{n!}}{\sqrt[n]{n^n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-\frac{2^n}{n!}}{n\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2^n}{n\cdot n!}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 07/12/20 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin\left(x^2\right)}{\ln^3 \cos x}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right), \qquad \ln(1+x) = x + O\left(x^2\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin\left(x^2\right)}{\ln^3 \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + O\left(x^8\right)\right)}{\ln^3\left(1 - \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{6} + O\left(x^8\right)}{\left(-\frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right)\right)^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{6} + O\left(x^8\right)}{-\frac{x^6}{8} + O\left(x^8\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{O\left(x^8\right)}{x^6}}{-\frac{1}{8} + \frac{O\left(x^8\right)}{x^6}} \\
&= -\frac{4}{3};
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x \ln\left(1 + e^x\right) - xe^x\right).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(e^x \ln\left(1 + e^x\right) - xe^x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(e^x \ln\left(e^x(1 + e^{-x})\right) - xe^x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(e^x \ln\left(e^x \left(1 + e^{-x}\right)\right) - xe^x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(e^x \left(x + \ln\left(1 + e^{-x}\right)\right) - xe^x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right) \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \ln(1+y) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 07/12/20 - foglio 3/3*

Esercizio 5 (10 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x+1}e^{-x},$$

determinandone:

- (1 punto) Insieme di definizione;
- (1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;
- (1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;
- (2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
- (1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
- (2 punti) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
- (2 punti) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: La funzione è definita per tutti valori per cui l'argomento della radice è non-negativo, ovvero

$$\left\{x \geq -\frac{1}{2}\right\}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari né periodica.

Segno: La funzione è sempre positiva ad eccezione dei valori che annullano l'argomento della radice, cioè

$$f(x) > 0 \iff x > -\frac{1}{2};$$

poiché l'argomento della radice si annulla in $x = -\frac{1}{2}$, allora

l'intersezione con l'asse orizzontale ha luogo nel punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$;

essendo inoltre $f(0) = 1$, allora

l'intersezione con l'asse verticale ha luogo nel punto $(0, 1)$.

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = 0,$$

dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

ontinuità e derivabilità: Le funzioni elementari che definiscono f non hanno problemi di continuità, dunque

La funzione è continua su tutto il suo insieme di definizione.

Quanto alla derivabilità, la funzione potrebbe avere un problema nel punto in cui si annulla la radice, e infatti

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt{2x+1}e^{-x}}{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{2e} \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} = +\infty,$$

dunque

$$\text{la funzione è derivabile in } x \neq -\frac{1}{2}.$$

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{2xe^{-x}}{\sqrt{2x+1}};$$

ha il segno opposto di x e si annulla per $x=0$, dunque

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{è crescente se } -\frac{1}{2} < x < 0, \\ f(x) & \text{è decrescente se } x > 0, \\ f(x) & \text{ha un punto di massimo in } x = 0. \end{array}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\left(4x^2-2\right)e^{-x}}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}};$$

ha lo stesso segno di $4x^2-2$, cioè è positiva se e solo se $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ e si annulla in $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; ricordando che la funzione è definita solo per $x > -\frac{1}{2}$ deduciamo che:

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{è convessa se } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ f(x) & \text{è concava se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ f(x) & \text{ha un punto di flesso in } x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

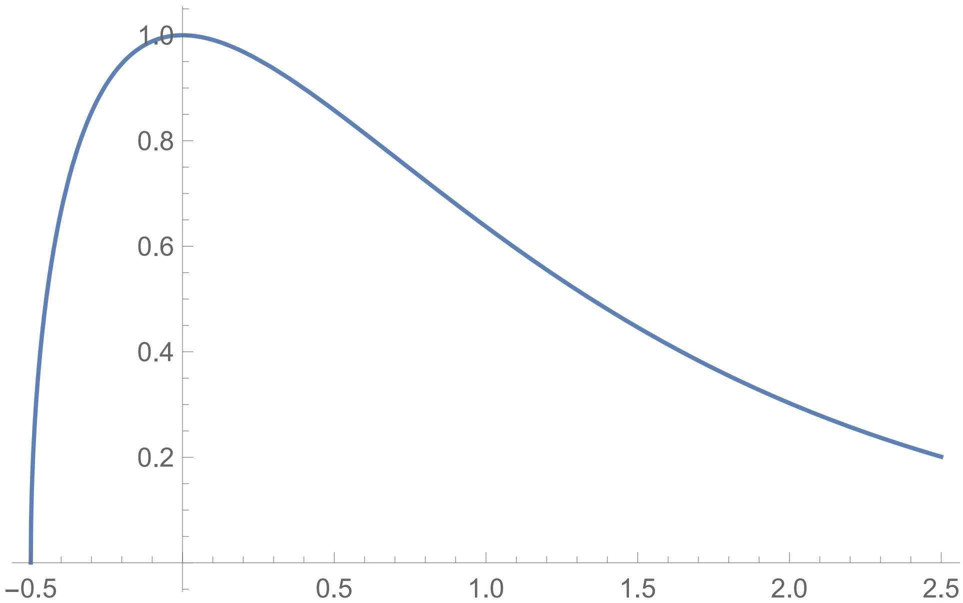

Figura 1: Grafico di $f(x) = \sqrt{2x+1}e^{-x}$.