Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 11/12/20 - foglio 1/3*

Esercizio 1 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}}\right)^{\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{n}} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{n}} \\
&= e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(8^n\operatorname{arctg}\left(2^{-n}\right)-4^n\right).$$

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$$\operatorname{arctg}\left(2^{-n}\right)=2^{-n}-\frac{2^{-3n}}{3}+O\left(2^{-5n}\right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(8^n\operatorname{arctg}\left(2^{-n}\right)-4^n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(2^{3n}\left(2^{-n}-\frac{2^{-3n}}{3}+O\left(2^{-5n}\right)\right)-2^{2n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(2^{2n}-\frac{1}{3}+O\left(2^{-2n}\right)-2^{2n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}+O\left(2^{-2n}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 11/12/20 - foglio 2/3*

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

Soluzione: Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right) \qquad \sin x=x+O\left(x^3\right), \qquad \sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+O\left(x^3\right),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+2x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x+O\left(x^3\right)}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)\right)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)\right)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+O\left(x^3\right)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{O\left(x^3\right)}{x^2}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x^2+1}-x^2.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x^2+1}-x^2 &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I - 11/12/20 - foglio 3/3*

Esercizio 5 (10 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3},$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;
(1 punto) Eventuali simmetrie e periodicità;
(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;
(2 punti) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
(1 punto) Eventuali punti di discontinuità e non derivabilità;
(2 punti) Studio della derivata prima con intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi;
(2 punti) Studio della derivata seconda con intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi.

Dominio: La funzione è definita per tutti valori il cui seno è diverso da -1, ovvero

$$\left\{x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Simmetrie:

La funzione non è pari né dispari ed ha periodo 2π, dunque è sufficiente studiarla nell'intervallo $[-\pi, \pi)$.

Segno: Poiché il numeratore e denominatore sono sempre positivi sull'insieme di definizione, allora

$f(x) > 0$ per tutti i valori per cui è definita;

poiché la funzione non si annulla mai, allora

il grafico non interseca mai l'asse orizzontale;

essendo inoltre $f(0) = 1$, allora

l'intersezione con l'asse verticale ha luogo nel punto $(0, 1)$.

Estremi del dominio: I limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x) = +\infty.$$

dunque la retta $x = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto verticale.

ontinuità e derivabilità:

La funzione è continua e derivabile su tutto il suo insieme di definizione.

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

ha il segno opposto di $\cos x$ e si annulla in $x = \frac{\pi}{2}$, dunque

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{è crescente negli intervalli } \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ f(x) & \text{è decrescente nell'intervallo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ f(x) & \text{ha un punto di minimo in } x = \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1+\sin x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^3};$$

è sempre positiva sul dominio di $f(x)$, dunque

$f(x)$ è convessa su tutto il suo insieme di definizione e non ha punti di flesso.

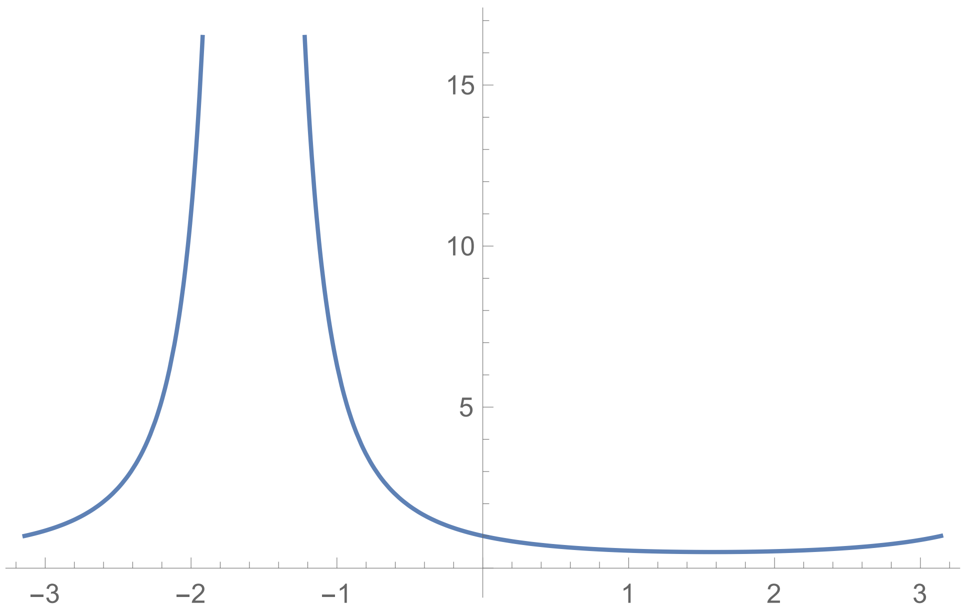

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$.