Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 1/3*

Esercizio 1 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con la sostituzione $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ si ottiene $x = 2\mathrm{arctg}t$, dunque $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\\ &= [\ln|1+t|]_0^1\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3}}}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to 0}{\to} 1$, dunque la funzione ha lo stesso andamento di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

Quanto all'altro integrale, essendo $\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{1}{x}^{\frac{5}{6}}} \underset{x\to +\infty}{\to} 1$, la funzione ha l'andamento di $\frac{1}{x^{\frac{5}{6}}}$ e cioè

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x \qquad \text{diverge.}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 2/3*

Esercizio 3 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{k+1}-1\right)^2, \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{k+1}-1\right)^2.$$

Soluzione: Poiché $\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)^2=\left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}-1\right)^2$ ha lo stesso andamento asintotico di $\dfrac{\ln^2 n}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^2 k}{k^2}$ converge per il criterio degli infinitesimi con $p=\dfrac{3}{2}$, allora dal criterio del confronto si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{k+1}-1\right)^2 \qquad\qquad \text{converge.}$$

Per lo stesso motivo, la seconda serie converge assolutamente e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{k+1}-1\right)^2 \qquad\qquad \text{converge.}$$

Esercizio 4 (6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^9=(1+\imath)^2-(1-\imath)^2.$$

Soluzione: Il numero $w=(1+\imath)^2-(1-\imath)^2=2\imath-(-2\imath)=4\imath$ in forma trigonometrica come $w=re^{\imath t}$ con $r=\sqrt{(0)^2+(4)^2}=4$ e $t=\dfrac{\pi}{2}$, le sue radici none sono:

$$z=\sqrt[9]{4}e^{\imath\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{9}\right)}, \qquad\qquad \text{con } k=0,1,2,3,4,5,6,7,8.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 3/3*

Esercizio 5 (6 punti) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^+\right)^2 \sin(nx)\mathrm{d}x; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^+\right)^2 \cos(nx)\mathrm{d}x; \qquad \text{dove } x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^+\right)^2 \sin(nx)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \left[x^2 \frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{-\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x \\
&= -\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} - \left(\left[2x\frac{-\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{-\sin(nx)}{n^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= -\pi\frac{(-1)^n}{n} + 2\left[\frac{\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} \\
&= -\pi\frac{(-1)^n}{n} + 2\frac{(-1)^n - 1}{n^3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^+\right)^2 \cos(nx)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x \\
&= -\left(\left[2x\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{-\cos(nx)}{n^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= -\left(-2\pi\frac{(-1)^n}{n} - \left[2\frac{-\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= 2\pi\frac{(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.