Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 1/3*

Esercizio 1 (6 punti) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Con la sostituzione $t = e^x$ si ottiene $x = \ln t$, da cui $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x &= \int_1^3 \frac{1}{(t^2+1)\,t}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\right]_1^3 \\
&= \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Soluzione: Poiché $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$, allora $\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to 0}{\to} 1$, dunque la funzione ha lo stesso andamento di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

Quanto all'altro integrale, poiché $\frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt{x}} \le \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ e quest'ultima funzione ha integrale convergente, allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{converge.}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 2/3*

Esercizio 3 (6 punti) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 e^{\frac{1}{k}}-k-k^2\right); \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(k^2 e^{\frac{1}{k}}-k-k^2\right).$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)$ otteniamo che $n^2 e^{\frac{1}{n}}-n-n^2 \to \frac{1}{2}$, quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 e^{\frac{1}{k}}-k-k^2\right) \qquad \text{non converge.}$$

Per lo stesso motivo, anche la seconda serie non è infinitesima e dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(k^2 e^{\frac{1}{k}}-k-k^2\right) \qquad \text{non converge.}$$

Esercizio 4 (6 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$z^5 = \frac{1}{\sqrt{3}+\imath}.$$

Soluzione: Il numero $w = \frac{1}{\sqrt{3}+\imath} = \frac{1}{\sqrt{3}+\imath}\frac{\sqrt{3}-\imath}{\sqrt{3}-\imath} = \frac{\sqrt{3}-\imath}{4}$ in forma trigonometrica come $w = re^{\imath t}$ con $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$ e $t = \frac{11}{6}\pi$, le sue radici quarte sono $z = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}e^{\imath\left(\frac{11}{30}\pi+\frac{2k\pi}{5}\right)}$ con $k = 0,1,2,3$, cioè:

$$z = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}e^{\imath\left(\frac{11}{30}\pi+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad \text{con } k = 0,1,2,3.$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.

Nome:	Cognome:	Matricola:

Prova di Analisi I (fac-simile) - foglio 3/3*

Esercizio 5 (6 punti) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^+ \sin(nx)\mathrm{d}x; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x^+ \cos(nx)\mathrm{d}x; \qquad \text{dove } x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x^+ \sin(nx)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \left[x\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x \\
&= -\pi\frac{(-1)^n}{n} - \left[\frac{-\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= -\pi\frac{(-1)^n}{n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x^+ \cos(nx)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.
\end{aligned}$$

*Istruzioni: Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; scrivere nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei tre fogli. Non è necessario consegnare altri fogli.