Dispense sulle serie di funzioni, serie di potenze e serie di Fourier

Luca Biasco[1]

12 gennaio 2021

[1]Alcune parti di queste dispense sono prese, quasi verbatim, dal libro di Analisi Matematica 2 del mio maestro e amico Luigi Chierchia, che ringrazio per avermi insegnato queste cose ormai oltre vent'anni fa. Ringrazio da ora chiunque vorrà segnalarmi errori o imprecisioni

0.1 Serie di funzioni: convergenza puntuale e totale

Definizione 0.1 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}$. Diremo che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge* **puntualmente** *in E se per ogni $x \in E$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge. Diremo che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge* **totalmente** *in E se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)|$ converge.*

Se una serie di funzioni converge puntualmente in E allora resta definita una funzione $f : E \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,. \tag{0.1}$$

Notiamo che, essendo per ogni $x \in E$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)|$$

la convergenza totale implica quella puntuale, infatti la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente.

Esempio. Prendendo $f_n(x) = x^n$ otteniamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ che converge puntualmente in $(-1, 1)$ e totalmente in tutti gli intervalli della forma $[-r, r]$ con $r < 1$, ma *non* converge totalmente in $(-1, 1)$. Infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[-r,r]} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

che converge per il criterio della radice quando $r < 1$; mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

che diverge!

Teorema 0.2 *Sia E un intervallo reale e siano $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni continue su E tali che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente su E. Allora $f(x)$ definita in (0.1) è una funzione continua.*

Dimostrazione Fissiamo $x_0 \in E$. Per mostrare che $f(x)$ è continua in x_0 dobbiamo far vedere che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ con $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dalla convergenza totale segue che esiste N sufficientemente grande tale che

$$\sum_{n=N}^{\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)| < \varepsilon/3\,.$$

Essendo la somma finita

$$g(x) := \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)$$

ovviamente una funzione continua abbiamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ con $|x - x_0| < \delta$ allora $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/3$. Allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |g(x) - g(x_0)| + \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(x)| + \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

∎

Si noti che in assenza di convergenza totale la sola convergenza puntuale potrebbe non essere sufficiente a garantire la continuità di $f(x)$. Si consideri infatti il seguente esempio: $E = [0,1]$ e $f_n(x) := x^n - x^{n+1}$. Allora

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} (1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^N - x^{N+1}) \\ &= \lim_{N\to\infty} 1 - x^{N+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

che, ovviamente, non è continua in $x = 1$.

Il seguente risultato permette di "scambiare la serie con l'integrale".

Teorema 0.3 *Siano $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni continue su $E \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga totalmente in E. Allora per intervallo finito $(a,b) \subseteq E$ si ha*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,. \tag{0.2}$$

Dimostrazione Notiamo subito che per il teorema precedente $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è una funzione continua su (a,b) e, per la convergenza totale, anche limitata su (a,b); quindi $f(x)$è integrabile in (a,b). Per dimostrare (0.2) basta far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato

$$\left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx - \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

Dalla convergenza totale segue che esiste N sufficientemente grande tale che

$$\sum_{n=N}^{\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Essendo

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N-1} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(sono somme finite!) abbiamo

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx - \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\,dx - \sum_{n=N}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(x)|\,dx + \sum_{n=N}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,dx \leq \int_a^b \sum_{n=N}^{\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)|\,dx + \sum_{n=N}^{\infty} \int_a^b \sup_{x\in E} |f_n(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dx + (b-a) \sum_{n=N}^{\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Si noti che in assenza di convergenza totale la sola convergenza puntuale potrebbe non essere sufficiente a garantire la validità della (0.2). Si consideri il caso di $(a, b) = (0, 1)$ e $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Si verifica subito che, in questo caso, (0.2) diventa

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b 0\, dx = 0 \neq -1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,.$$

Il seguente risultato permette di "scambiare la serie con la derivata".

Teorema 0.4 *Sia E un intervallo aperto e $x_0 \in E$. Siano $f_n \in C^1(E)$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge totalmente in E e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge. Allora $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in C^1(E)$ e si ha*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\,. \tag{0.3}$$

Dimostrazione Abbiamo

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt\,.$$

Sommando otteniamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)\, dt\,,$$

per il teorema 0.3. Derivando tale espressione si ottiene la (0.3). $\blacksquare$

0.2 Serie di potenze

Si consideri la seguente particolare serie di funzioni detta "serie di potenze":

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{0.4}$$

dove x è una variabile reale o complessa e a_n sono numeri reali o complessi dati. Il problema è studiare la convergenza della successione $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ per $N \to \infty$ per valori di x in un intorno di 0.

N.B. quanto segue varrà indifferentemente per x reale o complesso. Naturalmente nel primo caso $|x|$ sarà il valore assoluto di x, nel secondo caso il modulo di x, ovvero $|x| = \sqrt{x\bar{x}}$, dove $\bar{x}$ è il complesso coniugato di x.
Inoltre, qui sviluppiamo vicino a zero, ma si potrebbe sviluppare vicino a qualsiasi x_0, considerando $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$; la teoria non cambia.

Teorema 0.5 *Sia*[1] $R := \left(\lim |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$, *qualora il limite esista*[2]. *La serie* $\sum a_n x^n$ *converge puntualmente (e assolutamente*[3]*) se* $|x| < R$ *e non converge se* $|x| > R$. *Inoltre converge totalmente in ogni intervallo della forma* $[-r, r]$ *con* $0 < r < R$. *Di conseguenza la serie* $\sum a_n x^n$ *converge ad una funzione continua definita su* $(-R, R)$.

Dimostrazione Si ha:

$$\lim(|a_n||x|^n)^{\frac{1}{n}} = |x| \lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = |x|\frac{1}{R}$$

e la convergenza puntuale segue dal criterio della radice per serie numeriche[4]. Riguardo la convergenza totale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[-r,r]} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \, ,$$

che converge per il criterio della radice, essendo $r/R < 1$. ∎

Definizione 0.6 *Il valore* $R =: \rho(f) \in [0, \infty]$ *definito nel Teorema 0.5 prende il nome di* **raggio di convergenza** *della serie di potenze* $f = \sum a_n x^n$.

Esempio 0.7 È immediato verificare che

$$\textbf{(1)} \quad \rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}\Big) = \infty \, , \quad \textbf{(2)} \quad \rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n\Big) = 0 \, , \quad \textbf{(3)} \quad \rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n\Big) = 1$$

e, nel caso **(3)**, per $\alpha = 0$ la serie non converge per $|x| = 1$, per $\alpha < -1$ la serie converge per ogni $|x| = 1$, e per $-1 \le \alpha < 0$ la serie diverge per $x = 1$ e converge per $x = -1$ (criterio di Leibniz). Quindi, la convergenza per $|x|$ uguale al raggio di convergenza va discussa di volta in volta.

Data la serie di potenze in (0.4) con raggio di convergenza $R > 0$, e fissato un intero $k \ge 0$, si chiama "polinomio di Taylor di grado k", il seguente polinomio:

$$p_k(x) := \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \, . \tag{0.5}$$

Si ha che

$$f(x) = p_k(x) + x^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n x^{n-k-1} = p_k(x) + x^{k+1} g_k(x) \, , \tag{0.6}$$

---

[1] Adottiamo qui la convenzione che $R = 0$ se il limite superiore è $+\infty$ ed $R = +\infty$ se il limite superiore è 0.

[2] In generale si pone $R := \left(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$ e tale definizione funziona per *ogni* successione . Per definizione, data una successione b_n si pone $\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} b_n$. Notiamo che, a differenza del limite, il lim sup esiste per qualsiasi successione. Qualora il limite esista allora $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n$, ma per esempio $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ non esiste, mentre $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

[3] Ovvero $\sum |a_n||x^n|$ converge se $|x| < R$.

[4] Si ricorda il criterio della radice per serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: *se* $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ *allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente; se* $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *non converge.*

dove

$$g_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k+1} x^n \, .$$

Notiamo che quest'ultima è anch'essa una serie di potenze con *lo stesso* raggio di convergenza R. Dal Teorema 0.5 segue che g_k *è una funzione continua per ogni* $|x| < R$. Invece della (0.6) scriveremo spesso più brevemente

$$f(x) = p_k(x) + O(x^{k+1}) \, . \tag{0.7}$$

Notiamo che esiste finito il

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p_k(x)}{x^{k+1}} = a_{k+1} \, . \tag{0.8}$$

Data una serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, con raggio di convergenza $R = \rho(f) > 0$, consideriamo le serie ottenute derivando termine a termine la serie f:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \ , \\ f_k &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)^{(k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1) \ x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n \ , \qquad \big(k \geq 2\big) \ . \end{aligned} \tag{0.9}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}(n+h)^{\frac{1}{n}} = 1$ per ogni h, si vede immediatamente che $\rho(f_k) = \rho(f)$ per ogni $k \geq 1$. Analogamente se consideriamo le serie ottenute integrando termine a termine la serie f:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \ dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \ , \\ F_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_{n-k}}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} x^n \ , \quad k \geq 2 \ . \end{aligned} \tag{0.10}$$

si vede subito che $\rho(F_k) = \rho(f)$ per ogni $k \geq 1$.

Teorema 0.8 *Sia $f = \sum a_n x^n$ e siano f_k e F_k le serie di potenze definite in* (0.9) *e* (0.10)*. Se R è il raggio di convergenza della serie f, si ha $\rho(f_k) = R = \rho(F_k)$ (per ogni $k \geq 1$) ed inoltre f è una funzione*[5] *$C^\infty(\{x : |x| < R\})$ e valgono le relazioni*

$$f^{(k)} = f_k \quad , (k \geq 1), \tag{0.11}$$

$$\int_0^x f(t)dt = F_1(x) \ , ..., \int_0^x F_{k-1}(t)dt = F_k(x) \quad , (k \geq 2). \tag{0.12}$$

Come applicazione consideriamo il seguente

[5] Ovvero derivabile infinite volte

Esempio 0.9 Sappiamo che la serie geometrica di ragione x con $|x| < 1$ ha somma $(1-x)^{-1}$ cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ . \tag{0.13}$$

Derivando k volte la funzione $(1-x)^{-1}$ si ottiene

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{1-x} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \ . \tag{0.14}$$

Dunque, da (0.9), da (0.14) e dal Teorema 0.8 otteniamo la relazione

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \ x^n \tag{0.15}$$

ossia

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \ x^n \ , \tag{0.16}$$

che dunque rappresenta l'espansione in serie della funzione $(1-x)^{-(k+1)}$.

Sia $f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Dal Teorema 0.8 sappiamo che $f \in C^\infty(\{x : |x| < R\})$ e calcolando la k–esima derivata in $x = 0$ otteniamo

$$f^{(k)}(0) = a_k \ k! \ , \qquad \text{cioè} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n \geq 0) \ . \tag{0.17}$$

Abbiamo visto che una serie di potenze $u = \sum a_n x^n$ è derivabile infinite volte nell'intervallo aperto $\{x : |x| < R\}$ dove $R = \rho(u)$ denota il raggio di convergenza di u. Una domanda naturale è quindi: "Esistono funzioni C^∞ che non siano rappresentabili tramite serie di potenze?" La risposta è affermativa e quindi le serie di potenze sono una classe funzionale più piccola delle funzioni indefinitamente differenziabili. Prima di motivare tale risposta, diamo due definizioni.

Definizione 0.10 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, k un intero positivo o $+\infty$ ed f una funzione definita su E. Diremo che $f \in C^k(E)$, se esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $f \in C^k(A)$.*

Tale definizione generalizza la nozione di funzione C^k e permette di parlare di funzioni derivabili su insiemi chiusi[6].

Definizione 0.11 *Sia $f \in C^\infty(\{x_0\})$, si chiama serie di Taylor di f la seguente serie di potenze*

$$\sum a_n (x - x_0)^n \ , \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \ . \tag{0.18}$$

Per il teorema sulla formula di Taylor, i troncamenti all'ordine N della serie di Taylor di[7] $f \in C^\infty(\{x_0\})$ approssimano la funzione f a meno di una quantità di ordine $O(|x - x_0|^{N+1})$.

[6] Per esempio, $f \in C^\infty(\{0\})$ significa che esiste $r > 0$ tale che $f \in C^\infty(-r, r)$. Si noti che tale definizione è data per $k > 0$ ma non per $k = 0$; infatti esistono funzioni continue in un punto ma che non sono continue su alcun intorno di tale punto.

[7] Ossia i polinomi di ordine N $\sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n$ con $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Esempio 0.12 Si consideri ora la seguente funzione di una variabile reale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases} \tag{0.19}$$

Dimostriamo che $g \in C^\infty$. Cominciamo col dimostrare che per $x > 0$, la derivata k–esima di g ha la forma

$$g^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x}) \tag{0.20}$$

dove $P_k(y)$ è un polinomio in y di grado $2k$. Infatti per $k = 1$, si ha che

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \ , \qquad (x > 0) \tag{0.21}$$

e quindi l'asserto è vero con $P_1(y) := y^2$. Assumiamo l'asserto vero per $0, ..., k-1$ e dimostriamolo per k.

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x) &= \Big(g^{(k-1)}(x)\Big)' \\ &= \Big[P'_{k-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + P_{k-1}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] e^{-\frac{1}{x}} \\ &:= P_k\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

il che implica che l'asserto è vero anche per k. Poiché per ogni $k > 0$ si ha che

$$\lim_{y \to \infty} y^k \exp(-y) = 0 \ ,$$

da (0.20) segue che[8], per ogni intero $k, p \geq 0$

$$\lim_{x \downarrow 0} g^{(k)}(x) x^{-p} = 0 \ . \tag{0.22}$$

In particolare (poiché $g^{(k)}(x) := 0$ per ogni $x < 0$) segue che $g^{(k)}(0+) = g^{(k)}(0-) = 0$, per ogni $k \geq 0$. Da tale relazione segue anche che $g^{(k)}(0) = 0$ per ogni k. Infatti per $k = 0$ è vero per definizione. Assumiamo che $k \geq 1$ e che $g^{(k-1)}(0) = 0$. Allora

$$g^{(k)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g^{(k-1)}(h)}{h} = 0 \ .$$

Dunque poiché g è chiaramente $C^\infty(0, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, 0)$ segue che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ma allora (essendo $g^{(k)}(0) = 0$) la serie di Taylor di g è la serie banale ($a_n := 0$) che ha raggio di convergenza infinito. D'altra parte non può esistere nessun intorno di 0 in cui la somma della serie di Taylor (e cioè 0) eguagli g poiché $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Questa discussione motiva la seguente

Definizione 0.13 (Funzioni reali analitiche) *Una funzione $f \in C^\infty(\{x_0\})$ a valori reali si dice (reale) analitica in x_0 se la sua serie di Taylor ha raggio di convergenza positivo e se $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ (con a_n definiti in (0.18)) in un intorno di x_0. Una funzione $f \in C^\infty(E)$ si dice (reale) analitica su E se f è (reale) analitica in ogni punto x_0 di E; la classe di tali funzione si denota con $C^\omega(E)$.*

[8] Si ricorda che $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 con $x > x_0$; analogamente $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 con $x < x_0$.

Osservazione 0.14 (i) Una funzione reale analitica è, dunque, una funzione che localmente si rappresenta come una serie di potenze coincidente con la sua serie di Taylor. Quindi la funzione g dell'Esempio 0.12 è $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non $C^\omega(\mathbb{R})$ [più precisamente $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^\omega(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ma $f \notin C^\omega(\{0\})$].

(ii) Dal Teorema 0.8, segue che una serie di potenze $f = \sum a_n(x-x_0)^n$ con $R := \rho(f) > 0$ (e $a_n \in \mathbb{R}$) è di classe $C^\omega((x_0 - R, x_0 + R))$; il "viceversa" di tale affermazione, in generale, non è però vero: la funzione $f(x) := 1/(1+x^2)$, per il punto (ii), è $C^\omega(\mathbb{R})$ ma la serie di Taylor di f in 0 è data da

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \ ,$$

che, come si verifica immediatamente, ha raggio di convergenza 1.

N.B.: ho aggiunto quello che segue fino alla fine di questa sottosezione per completezza, al fine di chiarire alcuni punti teorici, ma, visto che quello che segue non è stato fatto a lezione, non farà parte dell'esame orale.

La funzione esponenziale nel campo complesso

Definiamo per $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ . \tag{0.23}$$

Poiché $\lim \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} = 0$ si ha che *il raggio di convergenza della serie esponenziale* (0.23) *è infinito*. Dal Teorema 0.5 segue che $\exp(z)$ *è una funzione continua* per ogni $z \in \mathbb{C}$ o $z \in \mathbb{R}$. Notiamo anche che se $x \in \mathbb{R}$ allora $\exp(x) \in \mathbb{R}$.

Vale *la regola di addizione per la funzione esponenziale complessa* ossia:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \qquad \forall \quad z, w \in \mathbb{C} \ . \tag{0.24}$$

Prima di passare a discutere le funzioni trigonometriche consideriamo brevemente la funzione $\exp(x)$ per x reali. Innanzitutto facciamo vedere che[9]

$$\exp(x) = e^x \qquad \forall \ x \in \mathbb{R} \ . \tag{0.25}$$

Da (0.24) si ha, per ogni numero intero positivo q, che

$$\underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ volte}} = \exp(1) := e \ , \tag{0.26}$$

ossia

$$\exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}} \ . \tag{0.27}$$

Da (0.26) e da (0.24), se p e q sono numeri interi positivi,

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{p \text{ volte}} = e^{\frac{p}{q}} \ . \tag{0.28}$$

[9] Dove e^x significa il numero di Nepero e elevato al numero x.

Le funzioni $\exp(x)$ e e^x sono continue su $[0,\infty)$ e, per quanto appena visto, coincidono sul sottoinsieme denso (in $[0,\infty)$) dei razionali positivi; quindi coincidono in tutto $[0,\infty)$. Se $x < 0$, da (0.24) segue che $e^{-x} = \exp(-x) = \exp(x)^{-1} = 1/e^x$ e dunque $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} = \left(e^{-x}\right)^{-1} = e^x$, il che mostra la validità di (0.25) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora facilmente ridimostrare le proprietà fondamentali della funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x = \exp(x)$: dalla definizione di $\exp(x)$ segue che $e^x > 0$ per $x \geq 0$ e poiché, per $x < 0$, $\exp(x) = 1/\exp(-x) = 1/\exp(|x|)$ si ha che

$$\exp(x) = e^x > 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{0.29}$$

Per ogni intero positivo k e per ogni $x > 0$, $e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, dunque $e^x/x^k > x/(k+1)!$ e quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^k = 0 \qquad \forall\; k \in \mathbb{N} \,. \tag{0.30}$$

In vista della (0.25) è *uso comune definire* e^z*, per ogni* $z \in \mathbb{C}$*, come* $\exp(z)$.

Dalle (0.5), (0.8) con $k = 0$ e (0.23) segue il seguente limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \,. \tag{0.31}$$

Consideriamo il rapporto incrementale della funzione e^x in un punto x_0, ovvero

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \,.$$

Da (0.24), (0.31) otteniamo subito che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} > 0 \,.$$

Ne segue subito che e^x è una funzione strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Funzioni trigonometriche

Definizione 0.15 *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si pone*

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \,, \qquad \operatorname{sen} z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \,. \tag{0.32}$$

Come per l'esponenziale si verifica immediatamente che *il raggio di convergenza di tali serie è infinito*. Inolte è immediato verificare che , per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x \in \mathbb{R} \ , \ \operatorname{sen} x \in \mathbb{R} \ , \tag{0.33}$$

$$\cos(-z) = \cos z \ , \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \ , \tag{0.34}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ , \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ , \tag{0.35}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \quad \text{(formula di Eulero)} \ , \tag{0.36}$$

$$\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x \ , \ \operatorname{Im} e^{ix} = \operatorname{sen} x \ ; \tag{0.37}$$

$$\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \ , \tag{0.38}$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \ , \tag{0.39}$$

$$|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \ , \tag{0.40}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \, , \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \, , \qquad \text{(limiti notevoli)} \ , \tag{0.41}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\operatorname{sen} x_0 \ , \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \cos x_0 \ . \tag{0.42}$$

Le (0.33) e (0.34) seguono immediatamente dalla definizione 0.15; la (0.35) segue addizionando le serie esponenziali (cosa possibile essendo tali serie assolutamente convergenti); la (0.36) segue da (0.35); la (0.37) segue da (0.36) e da (0.33); le (0.38) e (0.39) seguono da (0.35), (0.24) e (0.36); da (0.24) segue che $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{(e^{ix})} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$ ossia la (0.40); i limiti notevoli in (0.41) seguono dalle (0.5), (0.8) con $k = 0$ e $k = 1$ rispettivamente e dalla (0.32); la (0.42) segue dalle (0.38),(0.39),(0.41).

Possiamo ora dare una definizione "analitica" di "pigreco", il cui valore numerico è

$$\begin{aligned} \pi \quad = \quad & 3.14159265358979323846264338327950288419716 9 \\ & 3993751058209749445923078164062862089986 28 \\ & 0348253421170679821480865132823066470938 44 \\ & 6095505822317253594081284811174502841027 01 \\ & 9385211055596446229489549303819644288109 75 \\ & 6659334461284756482337867831652712019091 45 \\ & 6485669234603486104543266482133936072602 49 \\ & 1412737245870066063155881748815209209 62 .... \ , \end{aligned}$$

Sia A l'insieme degli zeri positivi del coseno ossia $A := \{x > 0 : \ \cos x = 0\}$. Tale insieme è non vuoto. Infatti il coseno è una funzione continua tale che $\cos 0 = 1$ mentre

$$\cos 2 := 1 - 2 + \frac{2}{3} - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \cdots < -\frac{1}{3} \ .$$

Definizione 0.16 $\pi = 2\alpha_1$ *dove* $\alpha_1 := \inf A$.

Da tale definizione seguono le seguenti ben (?) note proprietà di periodicità e di simmetria delle funzioni seno e coseno: per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \ , \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \ , \qquad e^{i\pi} = -1 \ , \qquad e^{i2\pi k} = 1 \ \ \forall k \in \mathbb{Z} \ , \tag{0.43}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \ , \qquad \cos(z+2\pi) = \cos z \ , \qquad \operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z \ , \tag{0.44}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-z\right) \ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right) \ , \tag{0.45}$$

$$\operatorname{sen}(\pi+z) = -\operatorname{sen}(\pi-z) \ , \qquad \cos(\pi+z) = \cos(\pi-z) \ . \tag{0.46}$$

Notiamo subito che $\cos x > 0$ per $x \in [0, \pi/2)$ (come segue dalla definizione di π e da $\cos 0 = 1$). Allora dal secondo limite in (0.42) segue che la funzione $\operatorname{sen} x$ è strettamente crescente in $[0, \pi/2)$. Mostriamo ora la (0.43). Infatti, essendo $\pi/2 = \alpha_1$ uno zero del coseno, da (0.40) segue che $\operatorname{sen}(\pi/2) = \pm 1$, d'altra parte la funzione $\operatorname{sen} x$, che vale 0 in 0 risulta strettamente crescente tra 0 e $\pi/2$ quindi $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$; dunque $e^{i\pi/2} = i$; da (0.24) segue che $e^{i\pi} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = e^{i\pi}e^{i\pi} = 1, e^{2\pi i k} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1$ con il che abbiamo dimostrato la validità di (0.43). Le (0.44), (0.45) e (0.46) seguono ora immediatamente da (0.43) e da (0.24) o da (0.38) e (0.39).

Si noti che da tali proprietà di periodicità, simmetria e monotonia seguono i ben noti (?) grafici di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (per $x \in \mathbb{R}$).

0.3 Serie di Fourier

Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici

Una funzione f di variabile reale si dice **periodica di periodo** $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se f è una funzione periodica di periodo T, la funzione $\tilde{f}$ definita da $\tilde{f}(x) := f(x\frac{T}{2\pi})$ è periodica di periodo 2π; pertanto consideremo solo funzioni di periodo 2π.

Definizione 0.17 *Dato $p \in \mathbb{N}$ diremo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartiene a $C^p(\mathbb{R})$ se è derivabile p volte e la sua derivata p-esima, $f^{(p)}$ è continua*[10]*. Inoltre*

$$C^p_{\text{per}} := \{f \in C^p(\mathbb{R}) : \ f(x+2\pi) = f(x) \ , \quad \forall \ x \in \mathbb{R}\} \, .$$

Le funzioni 2π-periodiche e continue si indicheranno semplicemente con $C_{\text{per}}(\mathbb{R}) = C^0_{\text{per}}(\mathbb{R})$ (sottoinsieme delle funzioni continue $C(\mathbb{R}) = C^0(\mathbb{R})$).

Esempi naturali di funzioni C^p_{per} per ogni $p \in \mathbb{N}$ sono le costanti, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$,... e loro combinazioni lineari:

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \ , \qquad a_n, b_n \in \mathbb{R} \ ; \tag{0.47}$$

(il ruolo, del tutto formale, del fattore $1/2$ davanti alla costante a_0 apparirà chiaro in seguito). Una tale espressione si chiama *polinomio trigonometrico (reale) di grado N*. Una classe assai più vasta di funzioni periodiche si ottiene considerando limiti, per N che tende ad infinito, di polinomi trigonometrici:

[10] Questo implica che f e tutte le sue derivate fino a $f^{(p)}$ sono continue.

Proposizione 0.18 *Siano $\{a_n\}_{n\geq 0}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ due successioni di numeri reali tali che per $p \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)\ n^p < \infty \ . \tag{0.48}$$

Allora, $s_N(x)$ (definito in (0.47)) converge, per N che tende ad infinito, totalmente su $\mathbb{R}$ ad una funzione $f \in C^p_{\rm per}$.

Il limite di polinomi trigonometrici ossia un'espressione della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{0.49}$$

prende il nome di *serie di Fourier*; dunque il risultato appena esposto può essere riformulato dicendo: "*se i numeri a_n e b_n soddisfano* (0.48) *allora la serie di Fourier* (0.49) *ad essi associata converge totalmente su $\mathbb{R}$ e definisce una funzione di classe $C^p_{\rm per}$*".

Dimostrazione (della Proposizione 0.18) Grazie a (0.48), per ogni $0 \leq k \leq p$, la serie delle derivate $\sum u_n^{(k)}$, con $u_0 := a_0/2$ e (per $n \geq 1$) $u_n := a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, converge totalmente in $\mathbb{R}$ e i Teoremi 0.2 e 0.4 implicano che $\sum u_n$ converge ad una funzione $f \in C^p(\mathbb{R})$. La periodicità di f deriva dalla periodicità di s_N:

$$f(x + 2\pi) = \lim_{N\to\infty} s_N(x + 2\pi) = \lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x) \ . \quad \blacksquare$$

Più interessante è la questione inversa: *data una funzione $f \in C^p_{\rm per}$, trovare una successione di polinomi trigonometrici che converga ad f.*

Prima di analizzare tale questione, si noti che, dato $n \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \tag{0.50}$$

e dunque $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$ sono, rispettivamente, la parte reale ed immaginaria di e^{inx}: questa osservazione suggerisce una riscrittura più compatta, in forma complessa, dei polinomi trigonometrici (0.47). Ponendo

$$c_0 := \frac{a_0}{2} \ , \qquad c_{\pm n} := \frac{a_n \mp i b_n}{2} \qquad (\forall\ n \geq 1) \ , \tag{0.51}$$

ed osservando che la "trasformazione inversa" di tale relazione (ossia la relazione che dà gli a_n e b_n in termini dei $c_{\pm n}$) è data da

$$a_0 = 2c_0 \ , \quad \text{e per } n \geq 1 \ , \quad a_n = c_n + c_{-n} \ , \quad b_n = ic_n - ic_{-n} \ , \tag{0.52}$$

si ha che[11]

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\|n|\le N}} c_n\, e^{inx} \;=\; c_0+\sum_{n=1}^{N}(c_n+c_{-n})\cos nx+(ic_n-ic_{-n})\,\mathrm{sen}\,nx$$

$$:= \;\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sen}\,nx \;:=\; s_N(x)\ . \tag{0.54}$$

Osservazione 0.19 (i) Nel caso che stiamo considerando a_n e b_n sono numeri reali e quindi $c_{-n}=\bar c_n$ (dove, come al solito al barra denota "complesso coniugato"). Naturalmente avrebbe senso considerare il caso (apparentemente più generale) in cui a_n e b_n sono numeri complessi, nel qual caso i polinomi trigonometrici $s_N(x)$ sarebbero delle funzioni complesse di variabile reale. In questo capitolo considereremo *polinomi trigonometrici e serie di Fourier reali* anche se useremo spesso la notazione complessa che presenta dei vantaggi dal punto di vista algebrico.
(ii) Si noti che per ogni coppia di numeri reali α e β si ha[12]

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\le|\alpha|+|\beta|\le\sqrt{2}\,\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ . \tag{0.55}$$

Si noti anche che, se a_n, b_n e c_n sono legati da (0.51) (e $b_0:=0$), si ha

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac12\,\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ,\qquad \forall\ n\ge 0\ . \tag{0.56}$$

Dunque (se a_n, b_n e c_n sono legati da (0.51)) la condizione (0.48) è equivalente a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|\ |n|^p<\infty\ , \tag{0.57}$$

e la Proposizione 0.18 può essere riformulata come segue
se $\bar c_n=c_{-n}$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n||n|^p<\infty$ *allora* $f(x):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}\in C^p_{\rm per}$.

Coefficienti di Fourier

Consideriamo una funzione complessa di variabile reale, ovvero $z:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ con $z(x)=u(x)+iv(x)$ dove, per ogni $x\in\mathbb{R}$, $u(x)\in\mathbb{R}$ e $v(x)\in\mathbb{R}$ sono la parte reale e immaginaria di $z(x)$. Se $u(x)$ e $v(x)$ sono continue[13] possiamo definire

$$\int_a^b z(x)dx=:\int_a^b u(x)dx+i\int_a^b v(x)dx.$$

[11]Se z_n, per $n\in\mathbb{Z}$, sono numeri complessi, i simboli

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\|n|\le N}} z_n\ ,\qquad \sum_{n=-N}^{N} z_n\ ,\qquad \sum_{-N}^{N} z_n \tag{0.53}$$

denotano, per N intero positivo, la somma $z_{-N}+z_{-N+1}+\cdots+z_{N-1}+z_N$; naturalmente il simbolo $\sum_{n=-N}^{M} z_n$ o (qualora non vi sia ambiguità) $\sum_{-N}^{M} z_n$, denoterà la somma $z_{-N}+z_{-N+1}+\cdots+z_{M-1}+z_M$; i simbolo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ o $\sum_{-\infty}^{\infty} z_n$ denotano il limite, qualora esista, $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} z_n$. Ricordiamo che la nozione di convergenza nei complessi: diremo che una successione di numeri complessi z_n converge al numero complesso z se $|z_n-z|\to 0$ quando $n\to\infty$.

[12]Come si verifica elevando al quadrato.

[13]Basterebbe integrabili.

Sia $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ una serie di Fourier con $\sum |c_n| < \infty$, cosicché $f \in C_{\rm per}$ per la Proposizione 0.18 (con $p = 0$). È possibile calcolare i numeri c_n (o, equivalentemente, i numeri a_n e b_n) dalla sola conoscenza della funzione $f(x)$? La risposta (affermativa) è contenuta nella seguente

Proposizione 0.20 *Siano c_n, per $n \in \mathbb{Z}$, numeri complessi tali che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ e sia $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Allora*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \ . \tag{0.58}$$

Dalle relazioni (0.51) ne consegue che i numeri a_n e b_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \ dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx \ dx \quad (n \geq 1) \ . \tag{0.59}$$

Dimostrazione (della Proposizione 0.20) Dal Teorema0.3 segue che[14]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{|m|\leq N} c_m e^{imx}e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{|m|\leq N} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx = c_n \ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Motivati da questa discussione (e cambiando punto di vista!) diamo la seguente

Definizione 0.21 *Sia f una funzione periodica di periodo 2π e continua su $[0, 2\pi]$. Si chiamano coefficienti di Fourier di f i numeri complessi*

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \ , \qquad \forall \ n \in \mathbb{Z}. \tag{0.60}$$

Osservazione 0.22 (i) Anche i numeri a_n e b_n definiti in (0.59) (per f una funzione periodica di periodo 2π ed integrabile su $[0, 2\pi]$) vengono, a volte, chiamati coefficienti di Fourier di f (o coefficienti "reali" di Fourier di f).

(ii) Naturalmente il ruolo dell'intervallo $[0, 2\pi]$ può esser giocato da un *qualunque intervallo lungo* 2π poiché la conoscenza di f su di un qualunque intervallo lungo quanto il suo periodo permettere di ricostruire f su tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio si ha: *se $f(x)$ è una funzione periodica e continua su $[0, 2\pi]$ allora l'integrale su un qualunque intervallo lungo 2π coincide con l'integrale tra 0 e 2π.* Infatti, per ogni $a < b$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{a+2k\pi}^{b+2k\pi} f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (si ponga $t = x + 2k\pi$), dunque, per ogni x_0,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)dx &= \int_{x_0}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{x_0+2\pi} f(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{2\pi} f(x)dx + \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx \ .\end{aligned}$$

[14] (i) Si noti che $\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx$ è nullo se $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ ed è uguale a 2π se $k = 0$. (iii) Qui ed in seguito espressioni quali $\sum_{|m|\leq N} z_m$ sono abbreviazioni per $\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ |m|\leq N}} z_m$.

In particolare, se f è periodica e continua su $[0, 2\pi]$ tale è $f(x)e^{-inx}$ e dunque il calcolo dei coefficienti di Fourier di f può essere fatto sostituendo $[0, 2\pi]$ con un qualunque intervallo lungo 2π. Ad esempio, è, a volte, utile usare la formula

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \ . \tag{0.61}$$

Lemma 0.23 *[di Riemann-Lebesgue] Se $f \in C^1_{\rm per}$ allora per $n \neq 0$*

$$|\hat{f}_n| \leq M/|n| \, , \qquad M := \max |f'| \, .$$

In particolare $\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}_n = 0$. *Analogamente se $f \in C^2_{\rm per}$ allora per $n \neq 0$*

$$|\hat{f}_n| \leq S/n^2 \, , \qquad S := \max |f''| \, . \tag{0.62}$$

Dimostrazione Integrando per parti (0.60) e tenendo conto della periodicità di f otteniamo

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \, .$$

Passando ai moduli

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{2\pi |n|} \int_0^{2\pi} |f'(x)| dx$$

e ricordando che $|e^{-inx}| = 1$. La tesi segue immediatamente. Il caso della derivata seconda segue analogamente integrando due volte per parti. ∎

Teorema 0.24 *Se $f \in C^2_{\rm per}$ allora la serie di Fourier*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}$$

converge totalmente su $\mathbb{R}$. Inoltre la serie di Fourier coincide con la funzione, ovvero

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx} := \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx} \, . \tag{0.63}$$

Dimostrazione Da (0.62) segue che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{f}_n e^{inx}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S}{n^2}$$

che converge, da cui la convergenza totale. Dimostriamo[15] ora (0.63). Sia

$$G(y) := \begin{cases} \dfrac{f(x+y) - f(x)}{e^{iy} - 1} & \text{se } y \neq 2\pi k \\ -if'(x) & \text{se } y = 2\pi k \end{cases} \, .$$

Dalle ipotesi segue che tale funzione (complessa di variabile reale) è periodica di periodo 2π e inoltre $C^1_{\rm per}$. Infatti gli unici punti in cui non risulta evidente la continuità e l'esistenza della

[15] L'idea della dimostrazione è tratta da "Appunti sulle serie di Fourier" di A. Figà–Talamanca.

derivata (e la sua continuità) sono $y = 2\pi k$. Naturalmente, data la periodicità, basta limitarsi a studiare cosa accade in $y = 0$. In un intorno di $y = 0$ risulta $G(y) = F(y)/g(y)$ dove

$$F(y) := \begin{cases} \dfrac{f(x+y) - f(x)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ f'(x) & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

e

$$g(y) := \begin{cases} \dfrac{e^{iy} - 1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ i & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che la funzione $g(y)$ è infinitamente derivabile (è analitica!). Dallo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{1}{2}f''(x)y^2 + o(y^2)$ segue che, per $y \neq 0$

$$F(y) = f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)y + o(y)$$

da cui segue che F è derivabile in $y = 0$ ed anche che $F'(y)$ è continua. Ricapitolando

$$G \in C^1_{\text{per}}.$$

Dunque

$$f(x+y) - f(x) = G(y)e^{iy} - G(y)$$

ed essendo ambo i membri di tale identità (come funzioni di y) periodici e continui, possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier (ossia moltiplicare ambo i membri per $e^{-iny}/(2\pi)$ ed integrare da 0 a 2π) ottenendo le relazioni[16]

$$\hat{f}_0 = \hat{G}_{-1} - \hat{G}_0 + f(x) \ , \qquad \hat{f}_n e^{inx} = \hat{G}_{n-1} - \hat{G}_n \quad (\text{per } n \neq 0) \ . \tag{0.64}$$

Dunque, per ogni $N \geq 1$,

$$\sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} = f(x) + \sum_{|n| \leq N} (\hat{G}_{n-1} - \hat{G}_n) = \hat{G}_{-N-1} - \hat{G}_N + f(x) \ . \tag{0.65}$$

Essendo $G \in C^1_{\text{per}}$, dal Lemma 0.23 segue che $\lim_{N \to \pm\infty} \hat{G}_N = 0$ e dunque, prendendo il limite per $N \to \infty$ nella (0.65), si ottiene la (0.63). ∎

Dal precedente teorema e dal Teorema 0.4 segue subito il seguente

Teorema 0.25 *Se $f \in C^p_{\text{per}}$ con $p \geq 2$ allora per ogni $1 \leq k < p$ la derivata k-esima si scrive*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k \hat{f}_n e^{inx} := \lim_{N \to \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}_n e^{inx} \ ,$$

ovvero

$$\widehat{f^{(k)}}_n = (in)^k \hat{f}_n \ .$$

Il precedente teorema si può parafrasare dicendo che "la serie di Fourier trasforma la derivata in una moltiplicazione". Questo fatto riveste una capitale importanza nelle equazioni differenziali.

[16] Per il punto (ii) dell'Osservazione 0.22 si trova che $\int_0^{2\pi} f(x-y)dy = \int_{x-2\pi}^{x} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt = 2\pi \hat{f}_0$.