Esercizi su serie

Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k k!}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right); \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \ln \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{3^k k!}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right); \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 \ln \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}.$$

Poiché $n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \to 1$, dal criterio degli infinitesimi con $p = 1$ si ottiene che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \qquad \text{non converge.}$$

Poiché $\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{n!}{(n+1)!} = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{3} \frac{1}{n+1} \to \frac{e}{3} < 1$, applicando il criterio del rapporto si ottiene che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k k!} \qquad \text{converge.}$$

Dallo sviluppo di Taylor $\tan x - x = O\left(x^3\right)$ si ottiene che $n^3 \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ è limitata, dunque dal criterio degli infinitesimi si ottiene che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right) \qquad \text{converge.}$$

Essendo $\ln \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+1}{n^2} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, dal limite notevole $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$ si ottiene $n^2 \ln \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \frac{1}{2} n^2 \ln \frac{n^2+1}{n^2} \to \frac{1}{2}$, dunque la serie non è infinitesima e quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \ln \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} \qquad \text{non converge.}$$

Poiché $n\frac{\ln n}{n} \to +\infty$, dal criterio degli infinitesimi segue che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} \qquad \text{non converge.}$$

Poiché la successione $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ è positiva, infinitesima e decrescente, dal criterio di convergenza per serie alternate segue che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \qquad \text{converge.}$$

Poiché $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k k!}$ converge, come visto in precedenza, la serie è assolutamente convergente e dunque:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{3^k k!} \qquad \text{converge.}$$

Essendo $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right)$ convergente, la serie è assolutamente convergente e quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right) \qquad \text{converge.}$$

Poiché $n^2 \ln \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \not\to 0$, la serie non è infinitesima e quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 \ln \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} \qquad \text{non converge.}$$

La successione $\frac{\ln n}{n}$ è positiva e decrescente e inoltre, essendo $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0$ per $x \geq e$, la successione è anche decrescente per n grande; pertanto, dal criterio per serie alternate si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \qquad \text{converge.}$$