Sul rango aritmetico di certi ideali

Margherita Barile
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bari
Campus Universitario
Via E. Orabona 4
70125 Bari

Sia X una matrice $n \times n$ di indeterminate su di un anello commutativo unitario B, e sia B[X] il corrispondente anello polinomiale. Se X é simmetrica, denotiamo con $I_t(X)$ l'ideale di B[X] generato dai t-minori di X per $1 \leq t \leq n$; se X é alternante, denotiamo con $Pf_t(X)$ l'ideale generato dai t-pfaffiani di X, per ogni t pari tale che $2 \leq t \leq n$. Vogliamo dare una formula che esprima il *rango aritmetico* (ara) di $I_t(X)$ e $Pf_t(X)$ in termini di n e t. Qui il rango aritmetico di un ideale é il minimo numero di generatori dell'ideale a meno di radicale, equivalentemente il minimo numero di equazioni necessarie a definire la varietà algebrica associata. Bruns e Schwänzl hanno risolto il problema nel caso in cui X é una matrice generica. Per mezzo della teoria delle *algebre con leggi di raddrizzamento (ASL)* sviluppata da De Concini-Eisenbud-Procesi, essi sono stati in grado di ridurre la questione al calcolo di un certo modulo di coomologia étale.

I metodi, in parte combinatori ed in parte topologici, possono essere estesi, con maggiore difficoltà tecnica ai casi simmetrico ed alternante. Si trova che nel caso simmetrico ara $I_t(X)$ dipende strettamente dalla caratteristica di B. Pare si tratti del primo esempio di ideale avente questa proprietà.

Teorema Sia X una matrice n x n simmetrica di indeterminate su B.

(a) Se char $B \neq 2$, allora per ogni $1 \leq t \leq n$

$$\operatorname{ara} I_t(X) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2} + 1$$

(b) Se char B = 2, allora per $1 \leq t \leq n$

$$\operatorname{ara} I_t(X) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2} + 1 & \text{se t é dispari} \\ \frac{n(n-1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2} + 1 & \text{se t é pari} \end{cases}$$

In caratteristica 0 si prova inoltre l'identità tra il rango aritmetico e la dimensione coomologica locale.

Maggiorazioni per il genere delle curve nello spazio proiettivo

Valentina Beorchia
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Ferrara
Via Machiavelli 35
44100 Ferrara

Sunto

Nell'ambito della classificazione delle curve localmente di Cohen-Macaulay dello spazio proiettivo, cioé dei sottoschemi chiusi di P^3 equidimensionali di dimensione pura uno, si pone il problema di determinare il genere aritmetico massimo di tali curve di grado fissato. Il metodo di Castelnuovo di stima della funzione di Hilbert della generica sezione piana permette di mostrare la seguente maggiorazione del genere di una curva C di grado d

$$p_a(C) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

dove l'eguaglianza é verificata se e solo se la curva C é piana, come nel caso delle curve integre. La stessa tecnica permette di dimostrare che per una curva sghemba C di grado $d \geq 3$ vale

$$p_a(C) \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2},$$

e le curve che verificano l'eguaglianza sono contenute in una superficie quadrica, eventualmente riducibile o non ridotta.

Più in generale, si può considerare il problema di trovare il massimo genere $P_a(d,t)$ delle curve di grado fissato d, non contenute in una superficie di grado t -1 con $t \geq 2$ un numero naturale assegnato. Usando alcuni risultati di Strano, ed i risultati di Gruson e Peskine concernenti l'analogo problema nel contesto delle curve integre, si dimostra che

$$P_a(d,t) \leq \begin{cases} (t-1)d + 1 - \binom{t+2}{3}, & \text{se } t \leq d \leq 2t, \\ \frac{1}{2}(d-t)(d-t-1) - \binom{t-1}{3}, & \text{se } d \geq 2t+1 \end{cases}.$$

Per $t \leq 4$, inoltre, la maggiorazione é ottimale, e le curve di genere massimo sono contenute in una superficie di grado t. Per $t \geq 5$, mediante la costruzione di esempi espliciti di curve di genere alto, si ottiene la seguente minorazione

$$P_a(d,t) \geq \frac{1}{2}(d-t)(d-t-1) - 3\binom{t-1}{3}, \text{ con } d \geq 2t-1.$$

CLASSI DI BILIAISON PER FASCI RIFLESSIVI

Antonella Buraggina
SISSA
Via Beirut 4
34014 Trieste

Per sottoschemi di uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ la biliaison – o liaison pari – é una relazione di equivalenza generata dalla nozione geometrica classica di "legame": grossomodo, due sottoschemi della stessa dimensione sono legati se la loro unione é una intersezione completa e due sottoschemi sono nella stessa classe di biliaison se si può passare dall'uno all'altro con un numero pari di legami semplici. Queste classi, almeno per sottoschemi di codimensione due, ammettono una caratterizzazione algebrica. In particolare, le classi di biliaison di curve in $\mathbf{P}^3_K$ sono parametrizzate dai $K[x_0,x_1,x_2,x_3]$-moduli graduati di lunghezza finita identificati a meno di shift nella graduazione (la corrispondenza associa ad una curva C il suo modulo di Hartshorne-Rao $H^1_*\mathcal{I}_C := \oplus_{t\in Z} H^1\mathcal{I}_C(t)$) (Rao, 1979)

Questa é la motivazione – attraverso la corrispondenza di Hartshorne-Serre fra fasci riflessivi e curve – per la definizione di biliaison che diamo per fasci riflessivi di rango due su $\mathbf{P}^3_K$: $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sono nella stessa classe di biliaison se $H^1_*\mathcal{F} \cong H^1_*\mathcal{F}'$ (notare che anche la graduazione deve essere la stessa). Le classi di equivalenza così ottenute sono parametrizzate dai $K[x_0,x_1,x_2,x_3]$-moduli graduati di lunghezza finita o, equivalentemente, dalle classi di equivalenza stabile (forte) di fibrati $\mathcal{E}$ su $\mathbf{P}^3_K$ con $H^2_*\mathcal{E} = 0$. In analogia alla già consolidata teoria della biliaison per sottoschemi di codimensione due, la struttura delle classi é descritta dalla cosiddetta proprietà alla Lazarsfeld-Rao: in ogni classe, tranne quella associata al modulo nullo, esiste un elemento minimale, unico a meno di deformazioni, a partire dal quale si può costruire tutta la classe mediante un procedimento elementare ripetuto più volte e, eventualmente, una deformazione.

Il punto chiave per arrivare a dimostrare questa proprietà sta nel fatto che ogni fascio riflessivo su $\mathbf{P}^3_K$ ammette una particolare risoluzione legata ad una risoluzione libera minimale del suo primo modulo di coomologia. Più precisamente, se $H^1_*\mathcal{F}$ ha una r. l. m. del tipo

$$0 \to L_4 \to L_3 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to H^1_*\mathcal{F} \to 0$$

e $N_0 = \ker(L_1 \to L_0)$, il fascio associato $\mathcal{N}_0$ é localmente libero con $H^1_*\mathcal{N}_0 \cong H^1_*\mathcal{F}$ e $H^2_*\mathcal{N}_0 = 0$, inoltre se $H^1_*\mathcal{F} \neq 0$, $\mathcal{N}_0$ ha rango almeno 3. Allora $\mathcal{F}$ ammette una sequenza esatta della forma

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{B} \to \mathcal{F} \to 0$$

dove $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono somme dirette di fibrati in rette e in più c'é una condizione di minimalità che rende la sequenza unica a meno di isomorfismi. Ciò permette di vedere gli elementi

della classe di biliaison di $\mathcal{F}$ come l'insieme delle coppie $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ tali che rango$\mathcal{A}$ = rango$\mathcal{N}_0$ + rango$\mathcal{B}$ - 2, e tali che esista un morfismo $\mathcal{A} \to \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{B}$ che abbia quoziente riflessivo. Descrivere la classe di $\mathcal{F}$ significa dunque descrivere tutte le possibili coppie come sopra. Questo viene fatto utilizzando alcuni risultati di M. Martin-Deschamps e D. Perrin. La struttura alla Lazarsfeld-Rao delle classi permette poi di dimostrare ad esempio che la prima e la terza classe di Chern dei fasci di una data classe hanno un minimo, che é realizzato dagli elementi minimali della classe. Una conseguenza interessante di ciò é che nelle classi che contengono fibrati gli elementi minimali sono necessariamente dei fibrati.

Un teorema per fibrati sullo spazio proiettivo

Davide Franco
SISSA
Via Beirut 2-4
34013 TRIESTE
FRANCOD@TSMI19.SISSA.IT

Sia E un fibrato stabile di rango due su $\mathbf{P}^3$ con prima classe di Chern nulla e seconda classe di Chern c_2. In base ad un teorema di Barth, la restrizione E_H di E ad un piano generale H e' stabile. Un teorema di Hartshorne implica che $h^1(E_H(p)) = 0$ quando p $> c_2 - 3$. Come più volte osservato in letteratura (vedere a questo proposito i lavori citati) tale risultato non é ottimale. Si dimostra il seguente

Teorema: Nelle ipotesi appena esposte si trova $h^1(E_H(p)) = 0$ quando $p > \frac{c_2(E) - 3}{2}$.

Inoltre, se $c_2(E)$ é dispari e $h^1(E_H(\frac{c_2(E) - 3}{2})) \neq 0$ per ogni piano H di $\mathbf{P}^3$ allora per E vale una delle seguenti proprietà:

a) il fibrato E é a spettro massimale, quindi E(1) ha una sezione che si annulla su di una struttura doppia Y con supporto su una curva piana Y_0 di grado $\frac{c_2(E) + 1}{2}$ tale che $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-2)$;

b) il fibrato E é un istantone speciale associato a $c_2 + 1$ rette sghembe su una quadrica di $\mathbf{P}^3$.

Sulla base di tale risultato ed applicando un metodo "alla Castelnuovo" sviluppato nei lavori citati si dimostra il seguente teorema di annullamento che migliora nella parte quadratica le stime esistenti:

Teorema: Sia E un fibrato stabile di rango due su $\mathbf{P}^3$ con $c_1 = 0$. Allora

$h^1(E(k)) = 0$ quando $k \geq \frac{c_2^2}{2} + \frac{c_2}{2} + \frac{m(1 - m)}{2}$ dove $m = \left[\frac{c_2 - 1}{2}\right]$.

Citazioni

Ph. Ellia: Some vanishings for the cohomology of stable rank two vector bundles on $\mathbf{P}^3$. J. reine angew. Math. 451, 1-14 (1994)

D. Franco: Some vanishing for the cohomology of rank 2 stable reflexive sheaves on $\mathbf{P}^3$ and for their restriction to a general plane. Commun. in Algebra 23, 2281-2289 (1995)

D.Franco: Vanishings for the cohomology of certain families of stable rank two vector bundles on $\mathbf{P}^3$. In corso di pubblicazione sugli Annali di Matematica pura ed applicata.

D. Franco: A vanishing for the cohomology of the general plane restriction of stable rank two vector bundles on $\mathbf{P}^3$. Preprint

P. Gurrola: A bound for the vanishing of the first cohomology group of a rank two stable reflexive sheaf on $\mathbf{P}^3$. Comm. in Algebra 19, 2487-2494 (1991).

Rivestimenti, deformazioni e Geometria Rigida

Marco Andrea Garuti
Université Paris - Sud
Mathematiques - Bât.425
91405 Orsay Cedex - France

Sia k un campo algebricamente chiuso ed R un anello di valutazione discreta completo che ammette k come campo residuo. Se X_k é una curva liscia su k, non vi sono ostruzioni al sollevamento di X_k ad una curva relativa (formale) X liscia su R; se X_k é proiettiva, X é una curva algebrica. Il sollevamento X non é unico: in quel che segue ne fisseremo uno.

Vogliamo studiare il problema del sollevamento di un rivestimento $Y_k \to X_k$ finito galoisiano di gruppo G.

La soluzione del problema dipende dalla ramificazione del rivestimento: Grothendieck ha mostrato che se il rivestimento é étale esiste un unico sollevamento $Y \to X$ (SGA 1, chapt. I); con delle tecniche (eccessivamente?) sofisticate, ha anche dimostrato che se il rivestimento é *moderatamente* ramificato (i.e. se la caratteristica di k non divide gli indici di ramificazione, in particolare quindi se k é di caratteristica zero) per ogni deformazione del divisore della ramificazione (in X) esiste un unico sollevamento $Y \to X$ ramificato sul divisore scelto (SGA 1, chapt. XIII).

D'altra parte, se k é di caratteristica p, in alcuni casi non é possibile sollevare un rivestimento *selvaggiamente* ramificato. Ad esempio se Y_k é una curva con più di 84(g -1) automorfismi e se R é di caratteristica 0, sappiamo che non esiste alcun sollevamento di $Y_k \to X_k = Y_k/Aut(Y_k)$ (un esempio di una tale curva é la $y^2 = x^p - x$, di genere $(p - 1)/2$, sulla quale agiscono $PGL(2, \mathbf{F}_p)$ e l'involuzione iperellittica, per un totale di $2p(p^2 - 1)$ automorfismi).

La situazione in caratteristica p é quindi disperata. La soluzione che proponiamo consiste nell'accettare dei sollevamenti singolari:

Teorema 1. *Sia X una curva propria liscia su R, e sia*

$$\rho_k : Y_k \to X_k$$

un rivestimento finito, genericamente étale e galoisiano di gruppo G di curve proprie e liscie su k. Esiste allora un'estensione finita R'/R ed un rivestimento di gruppo G

$$\rho' : Y' \to X' = X \times_R R'$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

(1) *Y' é una curva propria e normale su R'.*

(2) *Esiste un G-morfismo* υ

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r, "\upsilon"] & Y'_k \arrow[d, "\rho'_k"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

che é un isomorfismo sul complementare del divisore della ramificazione di ρ_k.

(3) *La fibra speciale* Y_k *é ridotta, i suoi punti singolari sono cuspidi e* υ *é la sua normalizzazione; in particolare* Y_k *é omeomorfa a* Y_k.

Per dimostrare il teorema, consideriamo la restrizione del rivestimento all'aperto U_k, complementare in X_k del divisore della ramificazione selvaggia Σ. Per i risultati di Grothendieck possiamo sollevare questo rivestimento: poiché la U_k, non é completa, troveremo un rivestimento di curve formali.

La *Geometria Analitica Rigida*, introdotta da Tate negli anni '60, permette di associare ad uno schema formale uno spazio analitico (p-adico, naturalmente) che ha luogo di fibra generica; nel nostro caso, se K é il campo delle frazioni di R, lo spazio analitico in questione non é altro che il complementare in $X \times_R K$, (fibra generica dello schema X) dei punti che si specializzano su Σ.

La figura che si deve tenere a mente é una superficie di Riemann (la $X \times_R K$) alla quale vengono tolti un certo numero di dischetti aperti. L'analogia é tra K e $\mathbb{C}$ e la differenza rispetto al caso complesso é data dal fatto che la topologia del campo K é totalmente sconnessa: occorre quindi usare una certa cautela nella scelta dei ricoprimenti aperti, se si vuole poter trovare un risultato globale incollando dati locali, da cui la denominazione "rigida".

Quel che vogliamo fare é appunto trovare dei rivestimenti nei dischetti mancanti ed incollarli in modo da trovare un rivestimento di $X \times_R K$, e prenderne in seguito la normalizzazione in X: la tappa fondamentale é data dunque dal risultato seguente, banale nel caso complesso, che ben evidenzia le difficoltà della teoria:

Teorema 2. Dato *un rivestimento finito, étale, galoisiano di gruppo G del cerchio*

$$C = \{z \in K : |z| = 1\}$$

esiste un'estensione finita K'/K ed un rivestimento di gruppo G del disco

$$D = \{z \in K' : |z| \leq 1\}$$

ramificato al più in un numero finito di punti, che prolunga il precedente dopo estensione degli scalari.

Se anche K é di caratteristica p, si può concentrare la ramificazione nell'origine.

La dimostrazione del Teorema 2 riposa su uno studio dettagliato della coomologia del gruppo fondamentale profinito degli spazi analitici rigidi C e D-{numero finito di punti}.

SUL PROBLEMA DI SCHOTTKY

Giambattista Marini
Via Flavio Stilicone 148
00175 Roma

Consideriamo una curva algebrica complessa liscia e proiettiva (semplicemente curva) C e la sua Jacobiana principalmente polarizzata $(J(C),\theta)$. Il teorema di Torelli assicura che l'applicazione Jacobiana (di Torelli) é una immersione dello spazio dei moduli delle curve di genere g $\mathfrak{M}_g$ nello spazio dei moduli delle varietà abeliane principalmente polarizzate ed indecomponibili (v.a.p.p.i.) $\mathfrak{A}_g$. Il problema di Schottky é quello di caratterizzare il luogo Jacobiano nello spazio dei modulli delle v.a.p.p.i. . La formula di Fay, l'esistenza di una famiglia di trisecanti la varietà di Kummer di J(C), il fatto che la funzione theta di Riemann di una Jacobiana soddisfa una gerarchia di Kadomtsev-Petviashvilli (K.P.) di equazioni differenziali non-lineari, sono aspetti diversi di uno stesso fenomeno (che caratterizza le Jacobiane) e sono conseguenza dell'uguaglianza

$$W_{g-1} \cap (W_{g-1} + p - q) = (W_g^1 - q) \cup (W_{g-2} + p),$$

dove

$W_d^r = \{|L|: \deg L = d, \dim|L| \geq r\}$, $W_d = W_d^0$.

Novikov congetturò che una v.a.p.p.i. é la Jacobiana di una curva algebrica se e solo se la funzione theta di Riemann che rappresenta la polarizzazione soddisfa la prima delle equazioni differenziali della gerarchia K.P., i.e., in un certo senso, che il "*germe infinitesimale*" della proprietà geometrica di cui sopra caratterizza le Jacobiane. Shiota prova in [S] la congettura di Novikov utilizzando tecniche di teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Io presento del teorema di Shiota una dimostrazione che utilizza tecniche classiche della teoria delle varietà abeliane. Il mio approccio al problema é quello algebro-geometrico di Arbarello e De Concini ([AD] é un chiaro survey). Il punto chiave é che la gerarchia K.P., indipendentemente dai parametri da cui dipende, operando sulla sezione della polarizzazione produce una successione di sezioni del fascio $\mathcal{O}(2\theta)$, e che alla luce del criterio di Welters é sufficiente trovare dei parametri in modo tale che la successione in questione é identicamente la successione nulla. Questo approccio mi ha portato ad enunciare e dimostrare il risultato che segue (si noti che nell'enunciato non compare alcuna equazione differenziale e che esso é di natura puramente algebro-geometrica).

"Una v.a.p.p. (X,θ) é la Jacobiana di una curva iperellittica se e solo se il fascio $\mathcal{O}_\theta(\theta)$ ammette una sezione le cui componenti sono non-ridotte e se, inoltre, il luogo singolare di

θ ha codimensione 2 in X (quest'ultima ipotesi é di natura tecnica e probabilmente può essere sostituita con quella della indecomponibilità; in effetti si congettura l'equivalenza delle due ipotesi)."

BIBLIOGRAFIA

[A] E. Arbarello, *Fay's trisecant formula and a characterization of Jacobian Varieties.* Proc. of Symposia in Pure Mathematics Vol. 46 (1987).

[AD] E. Arbarello, C. De Concini, *Geometrical aspects of the Kadormsev-Petviashvili equation,* L.N.M. n⁰ 1451 (1990), 95-137.

[Ma] G. Marini, *A characterization of hyperelliptic Jacobians*, Manuscripta Mathematica 79, (1993), 335-341.

[Ma1] G. Marini, *A geometrical proof of Shiota's theorem on a conjecture of S.P. Novikov*, preprint.

[S] T. Shiota, *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations,* Inventh. Math. 83 (1986) 333-382.

[W] G. Welters. *A criterion for Jacobi varieties*, Ann. Math. 120 (1984), 497-504.

Sottovarietà totalmente geodetiche e isometrie

Andrea Pagano
Via Cagliari 11
00198 Roma

Il presente lavoro trae spunto dal seguente risultato di K. Nomizu (cfr. Journal of Differential Geometry 8 1973).

Teorema. Sia M una varietà Kaehleriana di dimensione 2n. Se per ogni sottospazio olomorfo S di T_pM di dimensione 2k esiste una sottovarietà totalmente geodetica V tale che $T_pV = S$, allora M ha curvatura sezionale olomorfa costante.

Alla luce di questo risultato nasce spontaneo chiedersi in che modo il numero di sottovarietà totalmente geodetiche possa determinare le proprietà della curvatura per varietà diverse da quelle prese in esame da Nomizu.

Il primo caso da affrontare é quello degli spazi localmente simmetrici che sono caratterizzati dalla seguente proprietà:

$$\nabla R = 0$$

dove R rappresenta il tensore curvatura.

Consideriamo per prima cosa il seguente

Lemma: Sia M una varietà Riemanniana e sia Aut(M) il gruppo degli automorfismi di M. Sia S un insieme di punti fissi per l'azione di un sottospazio di Aut(M). Si ha che S é una sottovarietà totalmente geodetica.

Restringiamo ora la nostra attenzione al caso di varietà complesse. Data una sottovarietà complessa possiamo definire la proprietà di essere totalmente geodetica sia attraverso la connessione di Levi-Civita sia attraverso la connessione associata alla metrica hermitiana. Le due definizioni risultano equivalenti.

Utilizzando la caratterizzazione di Cartan dei domini simmetrici, il lemma e l'osservazione appena fatta é possibile determinare tutte le sottovarietà totalmente geodetiche di tali domini. In questo modo possiamo dimostrare un risultato analogo al teorema di Nomizu il cui enunciato é il seguente:

Teorema: Sia D un dominio simmetrico complesso di dimensione 2n. Se esistono 2n superfici totalmente geodetiche (non equivalenti rispetto all'azione di Aut(D)), allora D ha curvatura sezionale olomorfa costante.

Fibrati omogenei su spazi proiettivi e quadriche

Raffaella Paoletti
Dipartimento di matematica Pura ed Applicata
Università degli Studi di L'Aquila
Via Vetoio, Loc. Coppito
67100 L'Aquila

Spazi proiettivi e quadriche sono, insieme alle grassmanniane, gli esempi più semplici di varietà *omogenee, su* cui, cioé, il gruppo degli automorfismi olomorfi agisce transitivamente. Le varietà razionali omogenee si possono rappresentare come prodotti di quozienti G/P, dove G é un gruppo di Lie semplice, connesso e semplicemente connesso, e P é un sottogruppo parabolico di G. Su una varietà omogenea X acquistano particolare interesse i fibrati "invarianti" per l'azione di Aut (X), che sono detti *omogenei.*
Non tutti i fibrati omogenei (indecomponibili) sono stabili. E' noto che i fibrati omogenei irriducibili (i.e. associati ad una rappresentazione irriducibile di P) sono stabili mentre non si conoscono esempi di fibrati omogenei semplici e non stabili. Questo lascia aperta la congettura

omogeneo e *semplice* $\Rightarrow$ *stabile.*

Proveremo la stabilità di due classi di fibrati omogenei semplici: gli E_k sullo spazio proiettivo complesso $\mathbf{P}^n$ e gli ψ_k sull'ipersuperficie quadrica liscia $\mathbf{Q}_n \hookrightarrow \mathbf{P}^{n+1}$.
Per ogni intero positivo k chiamiamo E_k il fibrato vettoriale

$$E_k := \mathrm{Ker}\Big((H^0(\mathbf{P}^n,\mathcal{O}(k)) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}(k)).\Big)$$

Quindi per ogni punto $p \in \mathbf{P}^n$, la fibra $E_k(p)$ é formata dalle equazioni delle ipersuperfici di grado k di $\mathbf{P}^n$ che passano per p. Se $k = 1$, E_1 é isomorfo al fibrato delle 1-forme olomorfe tensorizzato col fibrato iperpiano. L' importanza dei fibrati E_k e delle loro potenze esterne é stata posta in evidenza da diversi autori (Ballico, Green, Migliore, Mirò-Roig).

Teorema 1. I fibrati E_k e le loro potenze esterne $\wedge^q E_k$ per $q \leq n - 1$ sono stabili. Inoltre, tutti i sottofibrati omogenei propri degli E_k sono semistabili.

Corollario. Il fibrato normale $\mathcal{N}$ alla varietà di Veronese definita dall'immersione $\mathbf{P}^n \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ associata al sistema lineare completo $|\mathcal{O}(k)|$ é semistabile.

I fibrati ψ_k sono stati introdotti da M.M. Kapranov per formulare per le quadriche un analogo del teorema di Beilinson per gli spazi proiettivi e si possono definire per induzione nel modo seguente: si ponga

$$\psi_0 := \mathcal{O}_Q, \ \psi_1 := \Omega^1(1)|_Q.$$

Allora ψ_k é definito dall'unica successione non banale

$$0 \to \Omega^k(k)|_Q \to \psi_k \to \psi_{k-2} \to 0.$$

Se $0 \leq k \leq n - 1$, i fibrati ψ_k sono semplici e omogenei, ma riducibili e si ha:

Teorema 2. I fibrati ψ_k sono stabili se $0 \leq k \leq n - 1$.

L'esponente del gruppo delle classi in campi di funzione

Francesco Pappalardi
Via S. Jacini 68
00191 Roma

L'esponente $e(G)$ di un gruppo finito G é il minimo intero $t > 0$ tale che per ogni $x \in G$, $x^t = 1$. Sia E una curva irriducibile definita su $\mathbb{F}_q$ allora $J_0(E)$ indica l'insieme dei punti della Jacobiana razionali su $\mathbb{F}_q$. $J_0(E)$ é un gruppo finito e, per "l'ipotesi di Riemann" per curve definite su $\mathbb{F}_q$, si ha che

$$|J_0(E)| \geq (\sqrt{q}-1)^{2g_E}$$

E' possibile dimostrare che $J_0(E)$ ha al più $2g_E$ generatori e quindi $e(E) := e(J_0(E)) \geq \sqrt{q}-1$. Il nostro problema é quello di migliorare questa stima.

Teorema. (R.Schoof) Se E é una curva ellittica senza moltiplicazione complessa definita su $\mathbb{Q}$, allora per ogni numero primo p,

$$e(E) >>_E \frac{\sqrt{p}\log p}{\log\log p}$$

Il metodo di Schoof non può essere esteso a varietà abeliane. Un esempio dei risultati che dimostriamo é

Teorema 0. Sia $n \in \mathbb{N}$ dispari e sia $E/\mathbb{F}_q$ la curva iperellittica definita da $E: y^2 = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ allora

$$e(E) \geq \frac{n \log q}{2 \log 72n}$$

ANALOGO ALGEBRICO

Sia $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un campo quadratico immaginario e sia $\mathcal{O}_d$ il suo anello degli interi. $C(d)$ indica il gruppo delle classi, $h_d = |C(d)|$ il numero di classe e $e(d) = e(C(d))$ il relativo esponente. Come nel caso della Jacobiana, si ha buon controllo sul numero di classi infatti é noto (Teorema di Siegel) che $h_d >> d^{1/2-\varepsilon}$ e che l'ipotesi di Riemann estesa implica che $h_d >> \sqrt{d}/\log d$. L'"esponente é una quantità meno conosciuta, e la Congettura di Iwasawa afferma che $e(d) \to \infty$ se $d \to \infty$. E' un risultato di Boyd e Kisilevsky il fatto che l'ipotesi estesa di Riemann implica che

$$e(E) \geq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{\log d}{\log\log d} \qquad (1)$$

Infine l'autore ha dimostrato nella sua tesi di dottorato che la stima (1) é valida per quasi tutti i d. Se $d = 42132596$ (esempio dovuto a Dyaz y Dyaz e Shankas) allora $h_d = 3456$ e $e(d) = 24$.

IL METODO DI BOYD E KISILEVSKY

La stima (1) viene dimostrata in due passi:

Passo 1. Consideriamo un numero primo p tale che $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$, cioé tale che l'ideale primo (p) si decompone in $\mathcal{O}_E$. Allora scriviamo $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Adesso $\mathfrak{p}_1^{e(d)}$ é un ideale primo (α) per definizione di esponente. Prendendo la norma otteniamo che $p^{e(d)} \geq N(\alpha) \geq d/4$. L'ultima disuguaglianza é sempre verificata in un campo quadratico immaginario ed é il punto cruciale di questa parte della dimostrazione. Infine si ha che

$$e(d) >> \log d/\log p$$

Il problema é quindi trasformato in quello di trovare una stima per il più piccolo p con $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$.

Passo 2. Si ha che l'ipotesi di Riemann estesa implica che

$$\min\left\{p \,\middle|\, \left(\frac{-d}{p}\right) = 1\right\} \leq (\log d)^{2+\varepsilon} \qquad (2)$$

e ciò chiaramente implica (1). L'affermazione in (2) può oggi esser dimostrata come una diretta conseguenza del Teorema di densità di Chebotarev che nella sua versione dimostrata sotto l'assunzione dell'ipotesi di Riemann generalizzata (Lagarias e Odlizko) afferma nel caso di estensioni quadratiche quanto segue

$$\#\left\{p \leq x \,\middle|\, \left(\frac{-d}{p}\right) = 1\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{li}(x) + O(\sqrt{x}\log dx)$$

IL CASO GEOMETRICO

Consideriamo una proiezione di E su $\mathbb{P}^1$ che supponiamo separabile. Inoltre su $\mathbb{P}^1$ fissiamo ∞ in modo che la sua fibra sia costituita da un solo punto. Ciò corrisponde a considerare E come un'estensione di $\mathbb{F}_q(x)$, $E = \mathbb{F}_q(x,y)$ ove supponiamo che esista un'unica valutazione sopra la valutazione di $\mathbb{F}_q(x)$ corrispondente al grado. Infine definiamo $\mathcal{O}_E$ come la chiusura integrale di $\mathbb{F}_q(x)$ in E. $\mathcal{O}_E$ é un anello di Dedekind ed é possibile considerare il suo gruppo delle classi $C(\mathcal{O}_E)$. Sebbene questo gruppo non sia un invariante intrinseco di E, si ha che $J_0(E)$ può essere immerso in $C(\mathcal{O}_E)$ e che $C(\mathcal{O}_E)/J_0(E) \cong \mathbb{Z}_h$ ove h é il grado dell'unica valutazione di E che "é sopra infinito". Quindi $e(E)$ e $e(C(\mathcal{O}_E))$ sono paragonabili e nei casi che considereremo accadrà sempre che $h = 1$ cioé che "infinito é totalmente ramificato". Per applicare il metodo di Boyd e Kisilevsky a $e(C(\mathcal{O}_E))$ abbiamo bisogno di

TEOREMA DI DENSITA' DI CHEBOTAREV IN CAMPI DI FUNZIONI

Sia $E/\mathbb{F}_q(x)$ un'estensione di Galois (separabile) di campi di funzioni, sia L la chiusura integrale di $\mathbb{F}_q$ in E, $n = [L : \mathbb{F}_q]$ (grado algebrico), $m = [E : L(x)]$ (grado geometrico). Se $\mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{F}_q[x])$, allora $N(\mathfrak{p})$ indica il numero di elementi nel campo residuo di $\mathbb{F}_q(x)$ a $\mathfrak{p}$ e deg $\mathfrak{p}$ la dimensione di tale campo residuo su $\mathbb{F}_q$. Infine per ogni $k \in \mathbb{N}$, poniamo

$\Pi_k(\mathcal{O}_E) = \#\{\mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{F}_q[x]) \mid \deg \mathfrak{p} = k, \mathfrak{p}$ é non ramificato e si decompone completamente in $\mathcal{O}_E)\}$.

Il Teorema di Densità di Chebotarev afferma che $\Pi_k(\mathcal{O}_E) = 0$ se $n \nmid k$ e che, se $n \mid k$, allora

$$\left|\Pi_k(\mathcal{O}_E) - \frac{q^k}{k\, m}\right| < 4q^{k/2}\left(1 + \frac{g_E}{m}\right).$$

Per i nostri scopi é stato necessario dimostrare il seguente

Corollario. Con le notazioni precedenti, esiste $\mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{F}_q[x])$ che é non ramificato e si decompone totalmente in $\mathcal{O}_E$ tale che

$$N(\mathfrak{p}) \leq 16\left(g_E + mn + \frac{14m\log(g_E + mn)}{\log q}\right)^2.$$

Questo completa il secondo passo. Per quanto riguarda il primo passo, abbiamo bisogno di

STIME PER LE NORME

L'obbiettivo é quello di caratterizzare estensioni di $\mathbb{F}_q(x)$ in cui la norma degli elementi "interi e non-costanti" possa essere sottostimata in termine del genere e del grado dell'estensione.

E' condizione necessaria affinché tale stima sussista il fatto che l'anello degli interi non contenga alcuna unità non banale. Ciò avviene nel caso di estensioni in cui c'é un unico elemento "sopra infinito".

Il nostro primo risultato ammette il Teorema 0 come caso particolare

Teorema 1. *Sia $E = \mathbb{F}_q(x,y)$ con le seguenti proprietà: a) $y^m = f(x) \in \mathbb{F}_q(x)$; b) $char(\mathbb{F}_q) \nmid m$ (quindi $E/\mathbb{F}_q(x)$ é un'estensione moderatamente ramificata); c) (deg f,m) = 1 (quindi infinito é totalmente ramificato); d) $f(x) = \prod_{i=1}^{r} p_i(x)^{s_i}$ con $p_i(x)$ irriducibile e $(s_i, m) = 1$. Allora per ogni $\alpha \in \mathcal{O}_E \setminus \mathbb{F}_q[x]$,*

$$\deg N(\alpha) > \frac{2g_E}{m-1}$$

Quindi in questo caso

$$e(E) \geq \frac{g_E \log q}{(m-1)\log r}$$

ove $r \approx 4(g_E + m\varphi(m))$.

Il nostro secondo risultato comprende anche il caso di estensioni non necessariamente ramificate.

Teorema 2. Sia $E/\mathbb{F}_q(x)$ un'estensione di grado primo l in cui infinito é totalmente ramificato. Allora per ogni $\alpha \in \mathcal{O}_E \setminus \mathbb{F}_q[x]$,

$$\deg N(\alpha) > \frac{2(g_E - 1)}{l-1}.$$

Quindi se la chiusura di Galois $\bar{E}$ di E é un'estensione moderatamente ramificata di $\mathbb{F}_q(x)$ allora

$$e(E) \geq \frac{(g_E - 1)\log q}{(m-1)\log 120\, \bar{m}^2(g_E/m + \bar{n})}$$

ove $\bar{m} = [\bar{E} : \mathbb{F}_q(x)]$ e $\bar{n} = [\bar{L} : \mathbb{F}_q]$.

Estimation du degre d'une isogenie entre courbes elliptiques.

Federico Pellarin
Equipe Problèmes Diophantiens, Tour 46-56, 5ème ètage,
Universitè Pierre et Marie Curie,
4, Place Jussieu 75252 Paris CEDEX 5.
(pellarin@ccr .jussieu.fr)

Una curva ellittica é data con un modello di Weierstrass $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. Una curva ellittica E é definita su un campo k se i suoi invarianti g_2 e g_3 appartengono a k. Trattiamo di isogenie tra E e una seconda curva ellittica definita su k. Ricordiamo che nel lemma 6.1 di [?], si dimostra che queste isogenie sono definite su una estensione finita di k di grado al più uguale a 12. Supponiamo che E sia definita su un campo di numeri k e associamogli la quantità $\omega(E) = \max\{1, h(g_2), h(g_3)\}$ dove h denota l'altezza di Weil logaritmica assoluta. Dimostriamo il raffinamento seguente del risultato principale di [?].

Teorema. - Esiste una costante assoluta effettiva c con la proprietà seguente: sia k un campo di numeri di grado d e E una curva ellittica definita su k; se E* é un'altra curva ellittica definita su k e isogena a E, esiste un'isogenia tra E e E* di grado al più $cd^4(\omega(E))^2$.

Questo risultato é già conosciuto se E ammette moltiplicazioni complesse (vedere [?] p. 21). Diamo un cenno di dimostrazione nel caso in cui E non ammette moltiplicazioni complesse. La dimostrazione di questo risultato é una applicazione del metodo di Baker effettivo per le forme lineari in logaritmi ellittici (due forme simultanee). La dimostrazione si articola in due parti: una parte di natura essenzialmente analitica in cui si costruisce una funzione ausiliaria di tipo polinomiale con "molti zeri" (nei punti di torsione di un gruppo algebrico fissato $G = E^2 \times E^{*2}$), la seconda parte di estrapolazione algebrica in cui dallo studio dei sottogruppi algebrici del gruppo algebrico ambiente G soggetti a stime dei gradi parziali ottenute dall'esistenza della funzione ausiliaria si ottengono isogenie di grado maggiorato in modo ottimale. Le novità rispetto alla dimostrazione di [?] consistono in una migliore stima della crescita analitica della funzione ausiliaria e in una analisi molto fina dei sottogruppi algebrici di G. In particolare la dimostrazione fornita é ottimale per i metodi di trascendenza applicati. Una versione della dimostrazione e di prossima pubblicazione: [?].

References

[1] D.W. Masser & G. Wüstholz. *Estimating isogenies on elliptic curves,* Inventiones Mathematicae 100, (1990) 1-24.

[2] F. Pellarin. *Degree estimates for isogenies.* di prossima pubblicazione.

Caratterizzazione delle applicazioni olomorfe fra Jacobiane indotte da applicazioni olomorfe fra superfici di Riemann

Elena Rubei
Via IV Novembre 5
57025 Piombino (LI)

Siano X' e X due superfici di Riemann compatte connesse di genere g' e g rispettivamente, con $g' \geq g \geq 1$. Se $f : X' \to X$ é un'applicazione olomorfa surgettiva, ovviamente f induce un'applicazione fra le corrispondenti Jacobiane. Ci si può chiedere quali siano condizioni necessarie e sufficienti affinché un'applicazione $F: J(X') \to J(X)$ sia indotta da un'applicazione da X' su X. Si danno qui due risposte a questa questione; entrambe imitano il teorema di Torelli.

Notazioni. Fissiamo un punto Q' di X'; sia ν la mappa di Abel di X' a partire da Q'. L'immagine in J(X') di ν di $X'^{(d)}$ sarà denotata con V^d; la sua traslata per un elemento $a \in J(X')$ sarà denotata con V^d_a.

Analogamente fissiamo un punto Q di X e sia μ la mappa di Abel di X a partire da Q; definiamo $W^d = \mu(X^{(d)})$ e $W^d_b = W^d + b$.

Sia θ' la seguente polarizzazione su $\mathrm{Pic}^0(X')$: sia $\{a_i,b_i\}_{i=1...g'}$ una base simplettica di $H_1(X',Z)$ e sia $\{a_i^\vee,b_i^\vee\}_{i=1...g'}$, la base duale di $H^1(X',Z)$; nel ricoprimento universale di $\mathrm{Pic}^0(X')$ consideriamo le coordinate s_i, $s_{i+g'}$ duali di $\{a_i^\vee,b_i^\vee\}$; sia $\theta' = \sum_{i=1}^{g'} ds_i \wedge ds_{i+g'}$.

Chiamiamo θ la analoga polarizzazione su $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Proposizione 1. Sia $F: J(X') \to J(X)$ una mappa olomorfa tale che $F(0) = 0$ e $\exists K \in J(X')$ t.c $F(V_K^{g-1}) = W^{g-1}$. Supponiamo che per $m = g - 1, g$, la mappa dal prodotto simmetrico $(F(V^1))^{(m)}$ su $F(V^m)$ data dall'addizione sia tale che per un punto generico di $F(V^m)$ l'immagine é solo un elemento di $(F(V^1))^{(m)}$.

Allora c'é una mappa olomorfa surgettiva $f : X' \to X$ che induce o F o -F.

Proposizione 2. Sia F una mappa olomorfa non costante $J(X') \to J(X)$ t.c. $F(0) = 0$. Definiamo $d = \deg F|_{V^1}$ e P la mappa duale di F. Sia $P^*: H^2(\mathrm{Pic}^0(X'),Z) \to H^2(\mathrm{Pic}^0(X),Z)$ tale che $P^*\theta' = d\theta$ ($\Leftrightarrow F_*: (H_2(J(X'),Z) \to (H_2(J(X),Z)$ e tale che $F_*([V^1]) = d[W^1]$).

Allora c'é una mappa olomorfa surgettiva $f : X' \to X$ che induce o F o -F.

TEORIA ASSIOMATICA DELLA TRASVERSALITA' E TEOREMI DI BERTINI

Maria Luisa Spreafico
Dipartimento di Matemadica
Politecnico di Torino
Corso Duca degli Abruzzi 24
10129 Torino

Lo scopo é stato quello di costruire una teoria assiomatica (cfr.[CGM]) della trasversalità (cfr [S]) che ha generalizzato le teorie appena citate, inglobandole. Come applicazioni si sono ottenuti miglioramenti di teoremi tipo Bertini già noti, come quelli dimostrati in [J] (per qualche proprietà geometrica, in [Ro] (per i fibrati vettoriali) ed in [F] (per anelli locali) .

Uno degli aspetti fondamentali é che si lavora su campi base di caratteristica qualsiasi e non necessariamente algebricamente chiusi. Rifacendosi alla teoria, della trasversalità si considera il seguente diagramma di schemi di tipo finito su di un campo k:

(A)
$$\begin{tikzcd}
W = X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\
S &
\end{tikzcd}$$

Si da' una condizione sulla coppia (f, π) affinché $\forall$ g : Y $\rightarrow$ Z residualmetne separabile e di tipo finito, qualunque sia la proprietà geometrica di Y (purché soddisfacente ad assiomi fissati) questa sia conservata dalla generica fibra W_S di $\pi o p_1$.

Si procede allora in questo modo: si danno gli assiomi per le proprietà geometriche; data la condizione su (f,π) si dimostra un teorema assiomatico valevole su campi algebricamente chiusi; utilizzando proprietà topologiche dei punti razionali dello schema S, si dimostra il teorema assiomatico valevole su ogni campo base; si danno applicazioni dei risultati ottenuti.

Come applicazione troviamo, ad esempio. il seguente corollario che generalizza ampiamente il risultato in [Ro, Th.3.7].

Corollario 1. Sia k un campo infinito e C una sottovarietà proiettiva di $\mathbf{P}^n_k$. Sia F un fibrato vettoriale generato dalle sezioni globali e si consideri il fibrato E = F(1) se char(k) > 0, ed E = F se char (k) = O. Sia, IP una proprietà soddisfacente agli assiomi A1, A2, ed A4 (ad es. IP = regolare, ridotto, normale S_r, R_s, WN1 + S_2).

Allora la generica sezione di E definisce un sottoschema di C che é geometricamente IP nei punti di C che sono geometricamente IP.

[CGM] C.Cumino, S. Greco, M.Manaresi, *An axiomatic approach to the second theorem of Bertini,* Journal of Algebra, 98 (1986), 171-182.

[F] H.Flenner, *Die sätze von Bertini für lokale Ringe.* Math. Annalen, 229 (1977), 97-111.

[J] J.P.Jouanolou, "Théorèmes de Bertini et Applications", Birkhaüser, Boston, 1983.

[Ro]. M.Roggero, *Teoremi di Bertini, Fasci riflessivi e Curve Sottocanoniche,* Seminari di Geometria 1987-88, Università di Bologna, Dip. di Matematica.

[S] R.Speiser, *Transversality Theorems for families of maps.* LNM 1311 (1988), Proc. 1986 Sundace Conference, 235-252.

Il problema di sollevamento in codimensione due *

Alfonso Tortora[†]
D.I.I.M.A.
Università di Salerno

Sia $X \subseteq \mathbf{P}^{n+2}$ una varietà ridotta, irriducibile e non degenere di codimensione 2, e sia $Y = X \cap H$ la generica sezione iperpiana.
Una sezione non sollevabile di $\mathcal{I}_Y$ in grado s é un elemento non nullo
$\alpha \in \text{coker}\,(H^0(\mathcal{I}_X(s)) \to H^0(\mathcal{I}_Y(s)) = \ker\,((H^1(\mathcal{I}_X(s-1)) \to H^1(\mathcal{I}_X(s))$;
usando la terminologia di [?], diciamo che α é uno zero sporadico di X di grado s.

L'ordine di un elemento $\beta \in H^1(\mathcal{I}_X(s)$ é il massimo intero p tale che β é della forma $\beta = H^p\gamma$, $\gamma \in H^1(\mathcal{I}_X(s-p))$. β si dice primitivo se ha ordine zero.

Siano C e Γ le sezioni di X con i generici P^3 e P^2 rispettivamente; si prova che C ha uno zero sporadico in grado $\leq$ s.

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo articolo:

Teorema 0.1 Sia $r = \dim \mathcal{I}_{X,s}$, e si assuma che le seguenti condizioni siano verificate:
(i) X ha uno zero sporadico di grado s;
(ii) $\mathcal{I}_{\Gamma,s-1} = 0$;
(iii) C ha uno zero sporadico primitivo di grado s.
Allora

$$\deg X \leq s^2 - (n + r - 1)s + \binom{n+r}{2} + 1. \qquad (1)$$

Nota: Il teorema ?? é un caso particolare di una congettura di Mezzetti [?]. Le tecniche maggiormente usate in questo articolo sono parte della teoria degli ideali iniziali [?].

References

[G] M.Green, *Generic initial ideals*, unpublished notes, 1992.
[M] E. Mezzetti, *Differential-geometric methods for the lifting problem and linear systems of plane curves*, J. Algebraic Geom. 3 (1994), 375-398.

*1991 *Mathematics Subiect Cls~ification:* Primary 14Mo7
[†]Finanziato dal CNR

Sul metodo funzionale per le curve sghembe: da Cayley fino ad oggi...

Valerio Vassallo
Départment de Mathématiques
Université de Lille
USTL - 59655 Villeneuve D'Ascq
France

Nella conferenza daremo le idee essenziali della dimostrazione della legittimità del **metodo funzionale**. Qui ricordiamo brevemente i fatti...

Indicheremo con $\mathbf{P}^3$ lo spazio proiettivo complesso $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

Nel 1888 Guido Castelnuovo [3], poi nel 1900 Luigi Berzolari, seguito qualche mese dopo da Francesco Severi [5], pubblicano diversi articoli ([1],[2]) contenenti numerose formule enumerative relative soprattutto alle curve sghembe.

Berzolari, ma soprattutto Castelnuovo e Severi si ispirano, per trovare le suddette formule, al *metodo funzionale* introdotto da Cayley [4] in un articolo del 1863: *On skew surfaces, otherwise scrolls* per trovare delle formule enumerative relative alle secanti multiple di una curva sghemba.
Una di tali formule é la seguente.
Sia X una curva di $\mathbf{P}^3$ di grado n con h punti doppi apparenti.

Se indichiamo con t(X) il numero delle rette trisecanti che incontrano X e una retta fissa, allora si ha la seguente formula di Cayley (1863):

$$t(X) = h(n-2) - \binom{n}{3}\ . \qquad (1)$$

L'idea del metodo funzionale di Cayley consiste nel supporre che *ogni formula k-secante* é a priori *una funzione che dipende soltanto dagli invarianti proiettivi della curva*: il grado n della curva e il suo numero h di punti doppi apparenti definito sopra.

Vediamo in modo più preciso, su di un esempio, come Severi utilizza il metodo funzionale.
Severi indica con $\varphi(n,h)$ il numero delle coniche 6-secanti a una curva X e che incontrano due rette fisse. Se n' e h' sono rispettivamente il grado e il numero dei punti doppi apparenti di un'altra curva X' (disgiunta da X) allora n + n' e h + h' + nn' sono rispettivamente il grado e il numero dei punti doppi apparenti della curva $X'' = X \cup X'$. Il numero delle coniche che incontrano X" in 6 punti e le due rette fisse é dato dalla somma:

del numero $\varphi(n,h)$ delle coniche 6-secanti a X che incontrano le due rette fisse, del numero $\varphi(n',h')$ delle coniche 6-secanti a X' che incontrano le due rette fisse e del numero f(n,h,n',h') di tutte le coniche k-secanti a X, (6 - k)-secanti a X' e che incontrano le due rette fisse (con $1 \leq k \leq 5$).

In definitiva, il numero $\varphi(n + n', h + h' + nn')$ delle coniche che incontrano la curva X" in 6 punti e due rette fisse é dato dall'*equazione funzionale*

$$\varphi(n + n',h + h'+ nn') = \varphi(n,h) + \varphi(n',h') + f(n,h,n',h') \qquad (2)$$

(donde il nome di *metodo delle equazioni funzionali* o, brevemente, *metodo funzionale*) .

La funzione f(n,h,n',h') é supposta conosciuta, in quanto si tratta di una somma di formule k-secanti con $k \leq 5$ (ottenute in precedenza). Grazie alla (2) e a un teorema contenuto nella sua tesi di Laurea, Severi trova esplicitamente la funzione φ e quindi la formula cercata (che omettiamo per brevità) .

Nel 1950, commentando i suoi articoli del 1900, Severi scrive: "*Una volta stabilita la piena validità delle formule di Schubert* (problema conosciuto come XV problema di Hilbert) *occorrerebbe dimostrare la legittimità dell 'applicazione del metodo funzionale.*"

Già il Castenuovo, nel suo articolo del 1888, osservava: "*Si é indotti a ritenere che i numeri dati nei paragrafi seguenti dipendano solo dall'ordine e dal genere della curva, dal fatto che nel piano e nello spazio ordinario quei numeri si possono calcolare con metodi più diretti in funzione dell'ordine e del genere soltanto.*"

Nelle " Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni ...", di Federigo Enriques e Oscar Chisini troviamo scritto (Vol 1. par. 43, 1915) : "*Tuttavia, perché le formule anzidette* (formule trisecanti e quadrisecanti a una curva sghemba) *vengano dimostrate per questa via occorrerebbe sapere* a priori *che i numeri cercati dipendono soltanto dai caratteri n e h*".

In un articolo apparso nel 94 [6], dimostriamo un teorema che permette di giustificare il metodo funzionale e dal quale risulta, come corollario, che l'espressione di una formula k-secante per una curva di grado n con h punti doppi apparenti é data da un polinomio in n e h di grado al più k in n e $[\frac{k}{2}]$ in h (dove [ ] indica la parte intera).

Bibliografia

[1] L. Berzolari, Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche (1), Rend. del R. Ist. Lomb. di Sci. e Lett. (2), 33 (1900), 664-674.

[2] L. Berzolari, Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche (2), Rend. del R. Ist. Lomb. di Sci. e Lett. (2), 33 (1900), 809-821.

[3] G. Castelnuovo, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, Rend. Circ. Mat. Palermo (3), (1889), 27-37.

[4] A. Cayley, On the skew surfaces, otherwise scrolls, Collected Mathematical papers, Vol. 5, 168-220.

[5] F. Severi, Memorie scelte, Vol. I, a cura di Beniamino Segre, 1950.

[6] V. Vassallo, Justification de la méthode fonctionnelle pour les courbes gauches, Acta Mathematica, t. 172, 1994, 257-297.

Superfici con applicazione canonica di grado tre

Francesco Zucconi
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pisa
Via Buonarroti 2
56127 Pisa

Siano S una superficie algebrica su **C** liscia proiettiva minimale, K un divisore canonico ossia tale che $\mathcal{O}_S(K) \simeq \Omega_S^2$, |K| il sistema lineare dei divisori linearmente equivalenti a K, $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\mathcal{O}_S(K))$, $q = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S,\mathcal{O}_S(K))$ e $\Phi_K : S \dashrightarrow \mathbf{P}^{p_g - 1}$ l'applicazione canonica.

Quando $\Phi_{|K|}(S) = \Sigma$ é una superficie, $\Phi_{|K|}$ induce un'applicazione genericamente finita $\Phi_K : S \dashrightarrow \Sigma$ di grado d. Scopo del seminario é di illustrare i due seguenti teoremi, contenuti nella mia tesi di dottorato, sulle superfici con d = 3:

Teorema [I] Sia S come sopra. Se $K^2 = 3p_g - 5$ e d = 3 allora q(X) = 0, $p_g = 4$ e Σ é un cono sopra una curva razionale di grado 2. Inoltre posto $W = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(4))$, detti T il divisore tautologico e Π la fibra della proiezione canonica $\pi : W \to \mathbf{P}^1$, si ha che S é birazionale a $Y \subset W$ con $Y \in |4T - 6\Pi|$; infine Y ha come singolarità solamente dei punti doppi razionali e un'unica conica doppia concentrata su di una fibra.

Teorema [II] Se d = 3 e q > 0 allora $K^2 \geq 3p_g - 3$.

Ho quindi diviso il seminario in due parti.

Nella prima parte, dopo aver cercato di esplicitare la filosofia sottesa alle ricerche sulle superfici con d > 1, richiamo la famosa seconda disuguaglianza di Castelnuovo, d = 1 $\Rightarrow K^2 \geq 3p_g - 7$ [Be], ricordo la classificazione delle superfici con d = 3 e $K^2 = 3p_g - 6$ [K1], che motiva lo studio delle superfici con d = 3 e $K^2 \geq 3p_g - 5$. Termino la prima parte ricordando la limitazione $K^2 \geq 3p_g - 4$ se d = 3 e q > 0 dovuta a Debarre [De].

La seconda parte verte su i due teoremi; le rispettive dimostrazioni sono simili e basate, oltre che su risultati generali per superfici con d > 1,

a) su un'analisi dettagliata del divisore K, resa possibile dalle limitazioni numeriche imposte,

b) sulla classificazione di Del Pezzo delle superfici di grado minimo,

c) sulle proprietà del fascio dualizzante relativo $f_*\omega_{S|C}$ dove f: $S \to C$ é una fibrazione su una curva C.

Ricordo, infine, che la caratterizzazione di S nel teorema I richiede un recente risultato di Konno [K2] sulle fibrazioni con fibra non iperellittica di genere tre.

Bibliografia

[Be] A. Beauville, *L'application canonique pour les surfaces de type général,* Invent. Math. (1979), 121-140.

[De] O. Debarre, *Inégalités numériques pour les surfaces de type général,* Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 319-346.

[K1] K. Konno, *Algebraic surfaces of general type with* $c_2 = 3p_g - 6$, Math. Ann. 290 (1991), 71-107.

[K2] K. Konno, *Non hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces,* preprint