GIORNATE DI GEOMETRIA ALGEBRICA ED ARGOMENTI CORRELATI IV

ABSTRACTS

Flavio Angelini

Divisori ampi sullo scoppiamento di $\mathbb{P}^3$ in punti generali

Si dimostra un teorema che fornisce una semplice condizione numerica necessaria e sufficiente affinchè un divisore di un certo tipo sullo scoppiamento di $\mathbb{P}^3$ in punti generali sia ampio. Tale risultato estende un teorema di G. Xu sullo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$. La dimostrazione si presta ad una possibile generalizzazione sia per spazi proiettivi di dimensione più alta, sia per altre varietà tridimensionali.

Alessandra Bertapelle

Modelli di Néron e restrizione di Weil

Siano R un anello di valutazione discreta, completo, e K il suo campo quoziente. Sia inoltre A_K una varietà abeliana su K. È noto che esiste un R-schema (in gruppi) liscio e quasi-compatto A che estende A_K e che è "minimale" rispetto a tale proprietà. Esso viene detto il modello di Néron di A_K. Il funtore di restrizione di Weil permette di confrontare i modelli di Néron di A_K ed $A_{K'}$ per ogni estensione algebrica finita K' di K. Mostreremo come la restrizione di Weil controlli anche nel contesto della geometria rigida la variazione del modello di Néron rispetto ad estensioni algebriche finite del campo di base.

Cristiana Bertolin

G-funzioni e coomologia delle ipersuperfici singolari

Studieremo i moduli differenziali $\mathcal{W}^{(l)}, l \in \mathbb{N}$, introdotti da B. Dwork nei suoi lavori sulla funzione Zeta di una ipersuperficie. Il nostro risultato principale è che $\forall\, l \in \mathbb{N} \;\; \mathcal{W}^{(l)}$ è un modulo differenziale di tipo G, i.e. un modulo differenziale le cui soluzioni sono delle G-funzioni. Dimostreremo questo fatto trovando una maggiorazione effettiva del raggio globale di $\mathcal{W}^{(l)}$, che non dipende da l. Questa maggiorazione è interessante poiché fornisce una stima effettiva per i coefficienti delle soluzioni di $\mathcal{W}^{(l)}$.

Andrea Bruno

Famiglie equisingolari di curve algebriche piane

Mostreremo il seguente teorema. Siano $p_1, \ldots, p_n$ punti generali di $I\!P^2$. Siano $d, m_1 \geq m_2 \ldots \geq m_n \geq 3$ tali che esiste una curva irriducibile di grado d le cui uniche singolarità siano ordinarie e di molteplicità m_i in p_i. Allora:

(i) $H^0(I\!P^2, \mathcal{I}_{\sum m_i p_i}(d))$ ha la dimensione attesa $\binom{d+2}{2} - \sum_i \binom{m_i+1}{2}$

(ii) Il sottoschema $S(d, m_1, \ldots, m_n)$ dello schema di Hilbert delle curve piane di grado d e singolarità di molteplicità m_i in n punti è liscio e della dimensione attesa.

(iii) Il sottoschema dello spazio dei moduli delle curve di genere $\binom{d-1}{2} - \sum_i \binom{m_i}{2}$ con $\sum m_i$ punti marcati che hanno una g^2_d con m_i-ple neutre ai punti marcati ha la dimensione attesa. Gli ingredienti per dimostrare il teorema sono essenzialmente due: utilizzare tecniche di degenerazione di serie lineari a curve stabili con componenti intersecantesi in più di due punti; studiare le proprietà di certe mappe che via riduzione stabile associano a elementi dello spazio delle deformazioni di singolarità ordinarie di curve piane stabili di dato genere con dati punti marcati.

Marco D'Anna

Anelli ridotti di dimensione uno e semigruppi loro associati. Modulo canonico

Sia (R, m) un anello locale, Noetheriano, ridotto di dimensione uno. Se la chiusura integrale $\bar{R}$ di R nel suo anello totale delle frazioni è un R-modulo di tipo finito, è possibile associare ad R un semigruppo di valori $v(R) \subseteq N^d$ (dove d è il numero di ideali massimali di $\bar{R}$; in particolare, se R è l'anello locale di una curva algebrica in un suo punto singolare, d rappresenta il numero dei rami della curva nel punto in questione). Questo semigruppo, se R/m è algebricamente chiuso (o, più in generale, se R è residualmente razionale) è strettamente legato all'anello R. Un esempio di questo legame tra anello e semigruppo è costituito dal modulo canonico di R che, nelle nostre ipotesi, può essere visto come un ideale frazionario ω di R tale che $R \subseteq \omega \subseteq \bar{R}$. L'ideale canonico non è univocamente determinato da quest'ultima condizione, ma è caratterizzato dal suo insieme dei valori: si definisce, cioè, un ideale canonico di semigruppo K e si ha che ω è un ideale canonico di R se e soltanto se $v(\omega) = K$.

Emanuela De Negri

Ideali generati da Pfaffiani

Dato un campo k e una matrice $n \times n$ antisimmetrica $X = (X_{i,j})$ di indeterminate, consideriamo l'anello dei polinomi $k[X]$ a coefficienti in K nelle variabili $\{X_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n\}$ e alcune classi di anelli quoziente di $k[X]$, definiti da ideali generati da Pfaffiani della matrice X. Tali anelli fanno parte della famiglia degli anelli determinantali, che comprende anche anelli definiti dai minori di una matrice generica e dai minori di una matrice simmetrica di indeterminate. Lo studio degli anelli determinantali è stato portato avanti negli ultimi anni per mezzo di nuovi metodi, che nascono dall'applicazione della teoria delle basi di Gröbner e della teoria delle algebre con legge di raddrizzamento. In questo seminario vedremo in particolare come queste tecniche permettono di ottenere nuovi risultati sugli anelli definiti da Pfaffiani.

Sandra Di Rocco

Varietà complesse con primo fibrato jet decomponibile

Sia X una varietà complessa, compatta e liscia, e L un fibrato lineare olomorfo su X. Se L è molto ampio, il primo fibrato jet $J_1(L)$ può fornire importanti informazioni su X come sottovarietà di $\mathbb{P}^{h^0(L)-1}$. Se la struttura di $J_1(L)$ è particolarmente semplice, senza ulteriori ipotesi sulla positività di L, è possibile caratterizzare (X, L). Durante il seminario verrà presentato il caso in cui $J_1(L) = H \oplus ... \oplus H$, dove H è un fibrato lineare globalmente generato su X. In questo caso si dimostra che se X è proiettiva, (X, L) deve essere necessariamente $((\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a))$ o (Varietà Abeliana, $\mathcal{O}$).

Rita Fioresi

Gruppi quantici e varietà proiettive quantiche

I gruppi quantici hanno suscitato grande interesse nell'ultimo decennio nella comunità dei fisici e dei matematici. Dopo una breve introduzione di carattere generale all'argomento, intendiamo restringere l'attenzione ai gruppi algebrici quantici e ai loro spazi omogenei. Per gruppo algebrico quantico si intende una deformazione non banale dell'anello delle coordinate di un gruppo algebrico visto come algebra di Hopf. L'azione dei gruppi algebrici classici sulla varietà di bandiera svolge un ruolo fondamentale nella teoria dei gruppi algebrici. Intendiamo dare la nozione di varietà di bandiera quantica come deformazione dell'anello delle coordinate della varietà di bandiera classica insieme ad una deformazione della coazione di un gruppo quantico su di essa. Saremo principalmente interessati alle deformazioni del gruppo $SL_n(k)$ e della sua varietà di bandiera, tuttavia cercheremo di formulare enunciati più generali quando possibile.

Marco Franciosi

Fasci invertibili su curve proiettive

Si propone un'estensione di risultati classici concernenti sistemi lineari su curve lisce al caso generale di curve proiettive Cohen-Macauly (eventualmente non ridotte o riducibili), sviluppando alcuni risultati sulle superficie algebriche. Si mostrano criteri numerici sufficienti affinché un fascio invertibile $\mathcal{L}$ su una curva C sia molto ampio, e si studia la mappa canonica di una curva di Gorenstein. Si illustrano quindi alcuni risultati parziali sull'anello graduato $R = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(C, \mathcal{L}^{\otimes k})$.

Paola Frediani

Curve algebriche reali, funzioni algebriche reali e loro monodromie

Diamo una descrizione combinatorica completa delle monodromie delle funzioni algebriche reali generiche, ossia funzioni olomorfe non costanti $f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dove C è una superficie di Riemann compatta connessa di genere $g \geq 0$ e f ha grado $d \geq 2$, f ha solo ramificazione semplice ed è reale. Questo significa che esiste un'involuzione antiolomorfa σ su C tale che $\forall x \in C$, $f \circ \sigma(x) = \overline{f(x)}$. Inoltre vengono descritte anche le monodromie di tali funzioni algebriche reali che hanno tutti i valori critici generici (i.e. semplici), eccetto al più ∞ che può non essere generico. Infine si riesce a determinare in molti casi, il tipo topologico dell'involuzione σ, una volta conosciuto il grafo della monodromia. Si dimostra inoltre che il numero di componenti connesse dello spazio delle funzioni algebriche (complesse) lemniscato generiche (ossia i cui valori critici sono tutti distinti e hanno valori assoluti distinti) è uguale al numero delle classi di isomorfismo dei grafi della monodromia delle funzioni algebriche reali generiche i cui valori critici sono tutti reali.

Federica Galluzzi

La congettura di Hodge per le varietà abeliane, il gruppo di Mumford-Tate e le famiglie di tipo Mumford

Le famiglie di tipo Mumford sono formate da varietà abeliane complesse di dimensione quattro e costituiscono un esempio in cui la fibra generica ha gruppo di Mumfor-Tate "piccolo". Inoltre poichè l'algebra degli endomorfismi della fibra generica è banale, per lo studio dei cicli non possono essere utilizzate tecniche algebriche. Questi sono i principali motivi di interesse nello studio dei cicli e della congettura di Hodge per queste famiglie.

Michele Grassi

Annullamento locale della coomologia caratteristica

La coomologia carattersitica è uno strumento coomologico adatto allo studio delle leggi di conservazione per equazioni differenziali alle derivate parziali e alla classificazione delle Lagrangiane su varietà differenziali. Uno dei primi problemi che si pongono nello studio di questi oggetti è quello di verificare se si hanno dei risultati di annullamento nel caso in cui la varietà sia contrattile. Il seminario verterà sulla descrizione di un teorema, che verifica una congettura di P.Griffiths concernente tale annullamento. Dopo una prima parte in cui si descriverà il problema e si introdurranno i principali concetti della teoria, si affronterà in modo schematico la dimostrazione del teorema, che comporta l'uso di strumenti di algebra commutativa e di algebra omologica.

Laila Mainò

Curve stabili arricchite

Si introduce il concetto di *curva stabile arricchita* al fine di estendere la teoria delle serie lineari limiti alle curve stabili non di tipo compatto. Sia X una curva stabile e $\mathcal{X} \to B$ una famiglia ad un parametro di curve lisce che si specializzano ad X, con spazio totale e base lisci. Una famiglia di fibrati lineari su $\mathcal{X} - X$, ammette su X infiniti limiti non isomorfi, che differiscono tra loro per un fibrato lineare $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)|_X$, dove D è un divisore di $\mathcal{X}$ il cui supporto è contenuto in X. In generale i fibrati lineari $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)|_X$ dipendono dalla famiglia $\mathcal{X}$. Una *struttura arricchita* su una curva stabile X è il dato di γ fibrati lineari $\{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X_i)|_X\}$, dove X_i, con $i = 1, \ldots, \gamma$, sono le componenti irriducibili di X e $\mathcal{X}$ una famiglia che soddisfa le suddette condizioni. Una *curva stabile arricchita* è una coppia (X, ρ), dove X è una curva stabile, e ρ una struttura arricchita su X. In questo seminario si vuole studiare la dipendenza di una struttura arricchita dalla famiglia che la induce, caratterizzare lo spazio di tutte le strutture arricchite per una fissata curva stabile X e costruire lo spazio dei moduli delle curve stabili arricchite.

Marina Marchisio

Alcuni nuovi esempi di ipersuperficie quartiche lisce unirazionali di $\mathbb{P}^4$

Il problema di decidere se l'ipersuperficie quartica generale (liscia) di $\mathbb{P}^4$ sia unirazionale oppure no è uno dei problemi di razionalità tuttora aperti più noti e più difficili da risolvere. Un esempio di ipersuperficie quartica liscia unirazionale di $\mathbb{P}^4$ è stato dato da B. Segre ed essa, non essendo razionale per un risultato generale di Manin e Iskovskikh, ha costituito il primo controesempio noto al problema di Lüroth. Proveremo come si possano costruire altri esempi di tali ipersuperficie quartiche lisce unirazionali di $\mathbb{P}^4$ utilizzando la determinazione da noi effettuata, anche con l'ausilio di un sistema di calcolo simbolico, di tutte le superficie quartiche monoidali (cioè, dotate di un punto di triplo) di $\mathbb{P}^3$ ad asintotiche separabili.

Massimiliano Mella

Spazi di Fano-Mori

Un morfismo suriettivo $f : X \to W$ a fibre connesse tra varietà normali è detto di Fano-Mori se il divisore canonico è relativamente ampio. Tali spazi sono importanti in quanto la congettura dei modelli minimali predice che tutte le varietà di dimensione di Kodaira negativa siano birazionali ad uno spazio di Fano-Mori e tutti i morfismi birazionali tra varietà lisce siano fattorizzabili tramite spazi di Fano-Mori.

Fabrizio Ponza

Famiglie di punti di Weierstrass di tipo speciale

Data una famiglia piatta propria $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ di curve proiettive lisce e connesse su $\mathbb{C}$, si definiscono i luoghi dei punti di $\mathcal{X}$, che sono di Weierstrass di peso almeno $k \geq 1$ sulla fibra a cui appartengono, come schemi degli zeri di opportune "derivate lungo le fibre" del Wronskiano relativo. Queste sono sezioni di certi fibrati dei jets di fibrati vettoriali su $\mathcal{X}$ e sono un caso particolare di un tipo di sezioni molto più generali, denominate *Sezioni Wronskiane Generalizzate*, che trovano nelle Derivate del Wronskiano la principale motivazione per ulteriori studi. Grazie a queste sezioni si dà una struttura di schema ai luoghi nello spazio dei moduli $\mathcal{M}_g$ delle curve aventi un punto di Weierstrass di peso almeno k, denotati come $wt(k)$. Si può mostrare che $wt(2)$ e $wt(3)$ hanno la codimensione attesa, quindi si calcolano le rispettive classi di Chow in $A^*(\mathcal{M}_g)$, l'ultima delle quali ha codimensione 2. Rimangono varie questioni aperte riguardo ai luoghi $wt(k)$ ed alle applicazioni delle Sezioni Wronskiane Generalizzate di tipo più generale.

Ottavio Rizzo

Media dei numeri di radice per famiglie di curve ellittiche

Il numero di radice di una curva ellittica E è il segno dell'equazione funzionale della funzione L di E: per la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer, questo è -1 elevato al rango di E. Dopo aver discusso il concetto di media di una funzione razionale, introduco una *misura d'altezza*: grazie ad essa, posso applicare metodi analitici a formule di David Rohrlich per il numero di radice di twist di curve ellittiche. Ad esempio, provo così che, data una curva ellitica E a coefficienti in $\mathbb{Q}$, esiste una famiglia di twist di E in cui una percentuale arbitraria di twist ha rango positivo, cioè infiniti punti a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

Barbara Russo

Sottofibrati massimali di fibrati su curve

Sia E un fibrato vettoriale di rango r e di grado d su una curva proiettiva liscia X. Si definisce $s_k(E) = k \deg E - r \max \deg H$ dove il massimo è preso fra i sottofibrati di E di rango k. Un sottofibrato H è detto *massimale* se il suo grado è massimo, cioè se

$\deg H = \frac{-s_k(E)+k \deg E}{r}$. Sia $M_k(E)$ l'insieme dei sottofibrati massimali di E di rango k. È stato provato che se $s_k(E) = k(r-k)g$ (cioè $s_k(E)$ assume il suo valore massimo) allora $\dim M_k(E) = k(r-k)$. Teixidor i Bigas ed io abbiamo provato l'unicità del sottofibrato massimale di rango k per un fibrato generale in ciascuno strato della stratificazione indotta da s_k (come funzione definita su $M(r,d)$ a valori naturali). In rango 2, Maruyama aveva congetturato che se E è indecomponibile ed $s_1(E)$ non assume il suo valore massimo, allora ha un unico sottofibrato massimale. Nel 1983 Lange and Narasimhan hanno trovato un controesempio alla congettura costruendo un fibrato di rango 2, E, con $s_1(E) << g$ e $\dim M_k(E) = 1$ via opportuni rivestimenti finiti di X. Recentemente D.Butler, sotto opportune ipotesi numeriche, ha caratterizzato i fibrati vettoriali di rango 2 con s_1 non massimo e $\dim M_k(E) = 1$. È interessante studiare il problema in rango più alto.

Francesco Russo

Le antiinvoluzioni birazionali del piano e la classificazione delle superfici di Del Pezzo reali

Le trasformazioni antibirazionali del piano complesso sono definite come il prodotto di una trasformazione cremoniana per il coniugio e sono determinate da una antiproiettività tra le rette del piano e le curve di una rete omaloidica del piano; quelle involutorie si dicono antiinvoluzioni birazionali del piano. Lo studio delle classi di coniugio tramite trasformazioni cremoniane di antiinvoluzioni birazionali del piano non definite in $r \leq 8$ punti generici consente di determinare le classi di equivalenza di strutture reali sulle superfici di Del Pezzo e quindi di classificare e descrivere la geometria delle superfici di Del Pezzo reali (numero di rette reali, topologia, spazio di moduli, etc); i modelli minimali reali sono allora associati alle (anti)involuzioni classiche di tipo antiquadratico senza punti uniti, di De Jonquières, Geiser, Bertini, come osservato nei lavori di A. Comessatti.

Andrea Sambusetti

Entropia minimale di varietà proiettive complesse

Lo studio dei funzionali riemanniani e dei loro minimi, sebbene generalmente dettato da problemi di ordine geometrico-differenziale, conduce sovente nell'ambito della geometria algebrica. È il caso del funzionale *entropia volumica*, il quale è strettamente legato a notevoli proprietà di rigidità degli spazi localmente simmetrici a curvatura negativa. Esso misura il tasso di crescita esponenziale del gruppo fondamentale di una varietà riemanniana rispetto alla propria metrica. Discuteremo un risultato di proporzionalità tra entropia minimale e volume simpliciale su una classe significativa di varietà proiettive (che costituisce essenzialmente l'unica classe di varietà complesse per le quali sia noto il valore minimo di tale funzionale). Illustreremo infine alcuni esempi espliciti di superfici proiettive minimali di tipo generale che rientrano in questa classe.

Enrico Schlesinger

Sul problema del massimo genere per curve nello spazio proiettivo

Il problema del massimo genere è il seguente: determinare il massimo genere G(d,t) di una curva di grado d in $\mathbb{P}^3$ che non sia contenuta su una superficie di grado $t-1$. Per le curve lisce si tratta di un problema classico già considerato da Halphen; per le curve localmente Cohen-Macaulay senza punti isolati, che giocano un ruolo centrale nel programma di classificazione delle curve sgembe di Martin-Deschamps e Perrin, un limite per $G(d,t)$, congetturalmente preciso, è stato dimostrato da V. Beorchia in carattestica zero. Discuteremo una dimostrazione valida in ogni caratteristica del teorema di V. Beorchia.

Paola Supino

Ipersuperfici di $\mathbb{P}^r$ con singolarità ordinarie

Si studiano alcune superfici regolari e alcune 3-varietà X con $h^1(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 0$ aventi una mappa birazionale p sopra una ipersuperficie F dello spazio proiettivo con singolarità ordinarie. L'equazione di F è data dall'annullarsi del determinante della matrice di polinomi omogenei che compare nella risoluzione minimale, di lunghezza 1, del modulo $M = \oplus H^0(F, iH_F)$ sull'anello delle coordinate dello spazio proiettivo.

Cecilia Trifogli

Luoghi focali ipersuperfici algebriche

Il luogo focale è tradizionalmente definito per una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$. Come era già noto ai geometri della fine del secolo scorso, tuttavia, nella definizione di luogo focale interviene essenzialmente soltanto la struttura ortogonale dello spazio euclideo e non anche quella metrica. Può essere definito, quindi, un luogo focale per una sottovarietà algebrica dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n$ con ortogonalità. Nella mia conferenza tratterò del luogo focale di una ipersuperficie algebrica. In particolare, presenterò la costruzione del luogo focale ed esporrò alcuni risultati generali relativi a questa costruzione. Tali risultati riguardano l'irriducibilità del divisore di ramificazione dell'applicazione punto-finale, la dimensione del luogo singolare di questo divisore, la birazionalità dell'applicazione focale e il grado del luogo focale.

Mariagrazia Violo

Varietà con un punto doppio apparente

Data una varietà liscia V di dimensione n immersa in $\mathbb{P}^{2n+1}$, la generica proiezione di V in $\mathbb{P}^{2n}$ determina una varietà $\tilde{V}$ con d punti singolari, necessariamente doppi; V è detta possedere *d punti doppi apparenti*. Si darà una classificazione delle varietà di dimensione 3 con un punto doppio apparente. Sotto opportune ipotesi, si ha che le sole varietà 3-dimensionali in $\mathbb{P}^7$ con un punto doppio apparente sono i divisori di tipo $(1,2)$ e $(0,2)$ su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$, che chiameremo *varietà di Edge*. Si utilizza la teoria dei punti focali per determinare il luogo dei fuochi del primo ordine della famiglia delle corde di una varietà V con un punto doppio apparente e successivamente si caratterizzano le sezioni iperpiane di tale 3-fold. Dalle caratteristiche della proiezione in $\mathbb{P}^4$ della sezione iperpiana e utilizzando le classificazioni di varietà polarizzate con Δ-genere basso, si prova che, in dimensione 3, soltanto le varietà di Edge possiedono un punto doppio apparente.