CONO POSITIVO SU UNA SUPERFICIE

Nel seguito descriveremo alcune proprietà del cono positivo di una superficie. Per definizioni e notazioni facciamo riferimento al libro di Lazarsfeld [L].

Per assenza di referenza premettiamo il seguente

Lemma 0.1. *Sia X una varietà normale proiettiva su $\mathbb{C}$ e siano $b \in \mathrm{Big}(X)$ e $f \in \overline{\mathrm{Eff}(X)}$. Allora $b + f \in \mathrm{Big}(X)$.*

Proof. Per [L, Prop.2.2.22(ii)] esistono $a \in \mathrm{Amp}(X)$ ed $e \in \mathrm{Eff}(X)$ tali che $b = a + e$. Per [L, Ex.1.3.14] esiste un disco (nella topologia Euclidea di $N^1(X)_{\mathbb{R}}$) $D_\varepsilon(a) \subseteq \mathrm{Amp}(X)$. Sia $e' \in \mathrm{Eff}(X)$ tale che $||f - e'|| < \varepsilon$. Allora $b + f = a + (f - e') + e' + e \in \mathrm{Big}(X)$ per[L, Prop.2.2.22(ii)] dato che $a + (f - e') \in D_\varepsilon(a)$ ed è dunque ampio, mentre $e + e'$ è effettivo. $\square$

Sia S una superficie liscia proiettiva irriducibile su $\mathbb{C}$ e sia $h \in \mathrm{Amp}(S)$. Il **cono aperto positivo di** S è

$$\mathrm{Pos}(S) = \{x \in N^1(S)_{\mathbb{R}} : x^2 > 0, x \cdot h > 0\}$$

ed il **cono positivo di** S è

$$\overline{\mathrm{Pos}(S)} = \{x \in N^1(S)_{\mathbb{R}} : x^2 \geq 0, x \cdot h \geq 0\}.$$

Vedremo dopo che le definizioni non dipendono dalla scelta di h. Per ora osserviamo che la notazione ha senso, cioè $\overline{\mathrm{Pos}(S)}$ è la chiusura di $\mathrm{Pos}(S)$. Infatti, per la continuità della forma di intersezione, $\overline{\mathrm{Pos}(S)}$ è chiuso. Inoltre se $x \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$ e $m \in \mathbb{N}$ allora $x + \frac{1}{m}h \in \mathrm{Pos}(S)$: $(x + \frac{1}{m}h)^2 = x^2 + \frac{1}{m^2}h^2 + \frac{2}{m}x \cdot h > 0$ e $(x + \frac{1}{m}h) \cdot h = x \cdot h + \frac{1}{m}h^2 > 0$. Ovviamente $\lim_{m\to\infty}(x + \frac{1}{m}h) = x$, da cui x è nella chiusura di $\mathrm{Pos}(S)$.

Consideriamo ora la dualità, definita dalla forma di intersezione "$\cdot$" su S:

$$\begin{array}{ccc} N^1(S)_{\mathbb{R}} \times N^1(S)_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ (\delta, \gamma) & \to & \delta \cdot \gamma \end{array}$$

e definiamo, per ogni $X \subseteq N^1(S)_{\mathbb{R}}$,

$$X^\vee = \{y \in N^1(S)_{\mathbb{R}} : y \cdot x \geq 0 \text{ per ogni } x \in X\}.$$

Come è noto [L, Ex.1.3.15] $N^1(S)_{\mathbb{R}}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita ρ su $\mathbb{R}$, nel quale prenderemo la topologia Euclidea. Per il Teorema dell'indice di Hodge [H, Thm.V.1.9], la forma di intersezione su $N^1(S)_{\mathbb{R}}$ ha segnatura $(1, \rho - 1)$ e, per il Teorema di Sylvester, esiste una sua base $\{e_1, \dots, e_\rho\}$ tale che

$$e_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2}}, e_1^2 = 1, e_i^2 = -1 \text{ per } i = 2, \dots, \rho \text{ e } e_i \cdot e_j = 0 \text{ per } 1 \leq i < j \leq \rho.$$

Nel seguito useremo tale base per scrivere gli elementi $x = x_1 e_1 + \ldots + x_\rho e_\rho \in N^1(S)_{\mathbb{R}}$. Per ogni $D \in \mathrm{Div}(S)_{\mathbb{R}}$ denotiamo $[D] \in N^1(S)_{\mathbb{R}}$ la classe di equivalenza numerica di D e con

$$\mathrm{Neg}(S) = \{[C] : C \subset S \text{ curva irriducibile tale che } C^2 < 0\}.$$

Proposition 0.2.

(i) $\mathrm{Pos}(S)=\{x\in N^1(S)_{\mathbb{R}}:\ x_1>0,\ x_1^2>\sum_{i=2}^{\rho}x_i^2\ \}$;

(ii) $\overline{\mathrm{Pos}(S)}=\{x\in N^1(S)_{\mathbb{R}}:\ x_1\geq 0,\ x_1^2\geq\sum_{i=2}^{\rho}x_i^2\ \}$;

(iii) *Se* $x,y\in\overline{\mathrm{Pos}(S)}$ *allora* $x\cdot y\geq 0$ *e* $x\cdot y>0$ *se* $x\neq 0$ *e* $y\in\mathrm{Pos}(S)$ *o* $y\neq 0$ *e* $x\in\mathrm{Pos}(S)$ *(cfr.* [BPV, VIII.1]*);*

(iv) *Le definizioni di* $\mathrm{Pos}(S)$ *e di* $\overline{\mathrm{Pos}(S)}$ *non dipendono dalla scelta di* h*;*

(v) *Per ogni* $y\in N^1(S)_{\mathbb{R}}$ *esistono* $x\in\overline{\mathrm{Pos}(S)}$ *e* $u\in\mathbb{R}$ *tali che* $y=x+uh$*;*

(vi) $\overline{\mathrm{Pos}(S)}=\big(\overline{\mathrm{Pos}(S)}\big)^{\vee}$*;*

(vii) $\mathrm{Amp}(S)\subseteq\mathrm{Pos}(S)\subseteq\mathrm{Big}(S)$*;*

(viii) $\mathrm{Nef}(S)\subseteq\overline{\mathrm{Pos}(S)}\subseteq\overline{NE(S)}$*;*

(ix) *Per ogni* $y\in\overline{NE(S)}$ *esistono* $p\in\mathrm{Nef}(S)$ *e* $n\in\mathrm{Eff}(S)$ *tali che* $y=p+n$ *e* $p\cdot n=0$*;*

(x) $\overline{NE(S)}=\overline{\mathrm{Pos}(S)}+\sum_{[C]\in\mathrm{Neg}(S)}\mathbb{R}_{\geq 0}[C]=\mathrm{Nef}(S)+\sum_{[C]\in\mathrm{Neg}(S)}\mathbb{R}_{\geq 0}[C]$.

(xi) *Se* $x\in\overline{\mathrm{Pos}(S)},a\geq 0,y^2\geq -a$ *e* $y\cdot h>0$ *allora*
$$x\cdot y\geq\frac{\big(y\cdot h-\sqrt{(y\cdot h)^2+ah^2}\big)x\cdot h}{h^2}$$
(questa disuguaglianza può essere utile per studiare i (-1)- cicli o i (-2)-cicli).

Proof. Se $x=x_1e_1+\ldots+x_\rho e_\rho$ si ha
$$x\cdot h=(x_1e_1+\ldots+x_\rho e_\rho)\cdot\sqrt{h^2}e_1=\sqrt{h^2}x_1$$
e
$$x^2=(x_1e_1+\ldots+x_\rho e_\rho)^2=x_1^2-x_2^2\ldots-x_\rho^2$$
e questo dimostra (i) e (ii).

Vediamo ora due dimostrazioni della (iii), la prima senza l'uso di coordinate e la seconda in coordinate.

Siano $x,y\in\overline{\mathrm{Pos}(S)}$.

Se $x\cdot h=0$ allora $x^2\leq 0$ dato che $x\in h^{\perp}$. Ma abbiamo per ipotesi che $x^2\geq 0$, quindi $x^2=0$, da cui $x=0$ dato che la forma di intersezione è definita negativa in $h^{\perp}$. Quindi certamente $x\cdot y\geq 0$. Analogamente se $y\cdot h=0$. Dunque possiamo supporre $x\cdot h>0$ e $y\cdot h>0$. Siano
$$v=\frac{\sqrt{h^2}}{x\cdot h}x-\frac{1}{\sqrt{h^2}}h \text{ e } w=\frac{\sqrt{h^2}}{y\cdot h}y-\frac{1}{\sqrt{h^2}}h.$$
Notiamo che $v\cdot h=\sqrt{h^2}-\frac{h^2}{\sqrt{h^2}}=0$ ed analogamente $w\cdot h=0$, da cui $v,w\in h^{\perp}$. Come detto la forma di intersezione è definita negativa in $h^{\perp}$, quindi se definiamo $v*w=-v\cdot w$ si ha che "$*$" è un prodotto scalare su $h^{\perp}$. In particolare vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$-v\cdot w=v*w\leq|v*w|\leq||v||||w|| \tag{1}$$

dove $||v||=\sqrt{v*v}=\sqrt{-v\cdot v}$ e $||w||=\sqrt{w*w}=\sqrt{-w\cdot w}$. Ora

$$-v\cdot v=-\big(\frac{\sqrt{h^2}}{x\cdot h}x-\frac{1}{\sqrt{h^2}}h\big)\cdot\big(\frac{\sqrt{h^2}}{x\cdot h}x-\frac{1}{\sqrt{h^2}}h\big)=1-\frac{h^2}{(x\cdot h)^2}x^2 \tag{2}$$

da cui $0\leq -v\cdot v\leq 1$, la seconda perchè $x^2\geq 0$ e la prima per il Teorema dell'Indice di Hodge: ciò è vero se x ed h sono classi intere ([H, Thm.V.1.9]), quindi, moltiplicando per un opportuno intero, se sono razionali, quindi, passando al limite, se sono reali. Analogamente si ha $0 \leq -w \cdot w \leq 1$, quindi $||v|| \leq 1, ||w|| \leq 1$ e la (2) implica che

$$-v \cdot w \leq 1. \tag{3}$$

Ma

$$-v \cdot w = -\big(\frac{\sqrt{h^2}}{x \cdot h}x - \frac{1}{\sqrt{h^2}}h\big) \cdot \big(\frac{\sqrt{h^2}}{y \cdot h}y - \frac{1}{\sqrt{h^2}}h\big) = 1 - \frac{h^2}{(x \cdot h)(y \cdot h)} x \cdot y$$

e la (3) equivale a

$$1 - \frac{h^2}{(x \cdot h)(y \cdot h)} x \cdot y \leq 1 \tag{4}$$

cioè

$$\frac{h^2}{(x \cdot h)(y \cdot h)} x \cdot y \geq 0$$

da cui

$$x \cdot y \geq 0$$

e questo dimostra la prima parte della (iii). Del resto se $x \cdot y = 0$ allora c'è uguaglianza nella (4), quindi nella (3). Di conseguenza, $||v|| = 1, ||w|| = 1$ e la (2) implica che $x^2 = y^2 = 0$. Quindi se $x \neq 0$ e $y \in \mathrm{Pos}(S)$ o $y \neq 0$ e $x \in \mathrm{Pos}(S)$ ne segue che $x \cdot y > 0$ e questo dimostra la (iii).

Prima di dimostrare la (iii) in coordinate, vediamo la seguente disuguaglianza:

$$\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2} \geq \sum_{i=2}^{\rho} x_i y_i \text{ per ogni } (x_2, \dots, x_\rho), (y_2, \dots, y_\rho) \in \mathbb{R}^{\rho-1} \ . \tag{5}$$

Tale disuguaglianza è sicuramente vera se $\sum\limits_{i=2}^{\rho} x_i y_i \leq 0$, dunque possiamo supporre che $\sum\limits_{i=2}^{\rho} x_i y_i > 0$ e quindi la (5) è equivalente a

$$\big(\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2\big)\big(\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2\big) \geq \big(\sum_{i=2}^{\rho} x_i y_i\big)^2 \quad . \tag{6}$$

Ora

$$\big(\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2\big)\big(\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2\big) = \sum_{i=2}^{\rho} x_i^2 y_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_i^2 y_j^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_j^2 y_i^2$$

mentre

$$\big(\sum_{i=2}^{\rho} x_i y_i\big)^2 = \sum_{i=2}^{\rho} x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_i y_i x_j y_j$$

e per mostrare la (6) è sufficente dimostrare che

$$\sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_i^2 y_j^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_j^2 y_i^2 \geq 2 \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_i y_i x_j y_j \quad . \tag{7}$$

Per vedere questa basta osservare che

$$0 \leq \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i y_i x_j y_j) =$$
$$= \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_i^2 y_j^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_j^2 y_i^2 - 2 \sum_{2 \leq i < j \leq \rho} x_i y_i x_j y_j \ .$$

Questo dimostra la (5). Ora dimostriamo la (iii) in coordinate.

Siano $x = x_1e_1 + \ldots + x_\rho e_\rho, y = y_1e_1 + \ldots + y_\rho e_\rho$, cosi' che $x \cdot y = x_1y_1 - \sum\limits_{i=2}^{\rho} x_iy_i$. Allora, dato che $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0$, si ha

$$x_1 \geq \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2} \text{ e } y_1 \geq \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2} \tag{8}$$

da cui

$$x_1y_1 \geq \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2} \geq \sum_{i=2}^{\rho} x_iy_i \tag{9}$$

per la (5). Questo dimostra la prima parte della (iii). Se $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0, y \neq 0$, allora c'è uguaglianza in (9), quindi in (8). Allora $x^2 = y^2 = 0$. Quindi se $x \neq 0$ e $y \in \mathrm{Pos}(S)$ o $y \neq 0$ e $x \in \mathrm{Pos}(S)$ ne segue che $x \cdot y > 0$ e questo dimostra la (iii).

Ora la (xi). Per ipotesi, essendo $x_1 \geq 0$, si ha

$$x_1 \geq \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2} \text{ e } \sqrt{y_1^2 + a} \geq \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2} \tag{10}$$

da cui, essendo anche $y_1 \geq 0$, ed usando le (10) e (5), si ha

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x_1y_1 - \sum_{i=2}^{\rho} x_iy_i \geq y_1\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2} - \sum_{i=2}^{\rho} x_iy_i = \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2}\big(\sqrt{y_1^2+a} - \sqrt{y_1^2+a} + y_1\big) - \sum_{i=2}^{\rho} x_iy_i \geq \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} y_i^2} - \sum_{i=2}^{\rho} x_iy_i + \big(y_1 - \sqrt{y_1^2+a}\big)\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho} x_i^2} \geq \big(y_1 - \sqrt{y_1^2+a}\big)x_1 \end{aligned}$$

ed ora basta osservare che

$$\big(y_1 - \sqrt{y_1^2+a}\big)x_1 = \frac{\big(y \cdot h - \sqrt{(y \cdot h)^2 + ah^2}\big)x \cdot h}{h^2}$$

e la (xi) è dimostrata.

Dalla (iii) segue immediatamente la (iv) dato che, ovviamente, $\mathrm{Amp}(S) \subseteq \mathrm{Pos}(S)$. Ora dimostriamo la (v). Sia $y \in N^1(S)_{\mathbb{R}}$ e sia

$$\Delta = (y \cdot h)^2 - h^2y^2. \tag{11}$$

Osserviamo che $\Delta \geq 0$ per il Teorema dell'Indice di Hodge. Sia t la seguente radice del polinomio $(y + Th)^2 = 0$:

$$t = \frac{-y \cdot h + \sqrt{\Delta}}{h^2}. \tag{12}$$

Ora ovviamente $(y + th)^2 = 0$ e $(y + th) \cdot h = \sqrt{\Delta} \geq 0$, cioè $y + th \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$. Allora posto $u = -t$ e $x = y + th$ si ha la (v).

Vediamo ora due dimostrazioni della (vi), la prima senza l'uso di coordinate e la seconda in coordinate.

Osserviamo intanto che la (iii) implica che $\overline{\mathrm{Pos}(S)} \subseteq \big(\overline{\mathrm{Pos}(S)}\big)^\vee$. Sia ora $y \in \big(\overline{\mathrm{Pos}(S)}\big)^\vee$. Dato che $h \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$ si ha $y \cdot h \geq 0$. Siano Δ come in (11) e t come in (12), in modo che sappiamo che $y + th \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$, quindi $y \cdot (y + th) \geq 0$. Se $\Delta = 0$ allora $y^2 = \frac{(y \cdot h)^2}{h^2} \geq 0$, quindi $y \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$. Supponiamo allora $\Delta > 0$. Si ha

$$0 \leq y \cdot (y + th) = y^2 + \frac{-(y \cdot h)^2 + y \cdot h\sqrt{\Delta}}{h^2} = \frac{y^2 h^2 - (y \cdot h)^2 + y \cdot h\sqrt{\Delta}}{h^2} = \frac{-\Delta + y \cdot h\sqrt{\Delta}}{h^2}$$

e quindi

$$\Delta \leq y \cdot h\sqrt{\Delta}$$

cioè

$$\Delta \leq (y \cdot h)^2$$

ovvero

$$(y \cdot h)^2 - h^2 y^2 \leq (y \cdot h)^2$$

da cui

$$h^2 y^2 \geq 0$$

ovvero

$$y^2 \geq 0.$$

Quindi $y \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$ e la (vi) è dimostrata.

Ora vediamo una dimostrazione della (vi) in coordinate. Come sopra la (iii) implica che $\overline{\mathrm{Pos}(S)} \subseteq \big(\overline{\mathrm{Pos}(S)}\big)^{\vee}$. Sia ora $y \in \big(\overline{\mathrm{Pos}(S)}\big)^{\vee}$. Dato che $e_1 \in \mathrm{Pos}(S)$, si ha $0 \leq y \cdot e_1 = y_1$. Se $y_1 = 0$, essendo, per $i \in \{2, \dots, \rho\}$, $e_1 \pm e_i \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$, si ha $0 \leq y \cdot (e_1 \pm e_i) = \mp y_i$, da cui $y_i = 0$ per $i \in \{2, \dots, \rho\}$, quindi $y = 0 \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$. Se $y_1 \neq 0$ sia $v = (\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_\rho}{y_1}) \in \mathbb{R}^{\rho - 1}$. Se $v = 0$ allora $y_i = 0$ per $i \in \{2, \dots, \rho\}$, da cui $y^2 = y_1^2 \geq 0$, cioè $y \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$. Se $v \neq 0$ poniamo $x = y_1 e_1 + \frac{1}{||v||}(y_2 e_2 + \dots y_\rho e_\rho)$. Ora

$$x^2 = y_1^2 - \frac{1}{||v||^2} \sum_{i=2}^{\rho} y_i^2 = y_1^2 \big(1 - \frac{1}{||v||^2} \sum_{i=2}^{\rho} \big(\frac{y_i}{y_1}\big)^2\big) = 0$$

da cui $x \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$ e quindi

$$0 \leq y \cdot x = y_1^2 - \frac{1}{||v||} \sum_{i=2}^{\rho} y_i^2 = y_1^2 \big(1 - \frac{1}{||v||} \sum_{i=2}^{\rho} \big(\frac{y_i}{y_1}\big)^2\big) = y_1^2 (1 - ||v||)$$

quindi

$$||v|| \leq 1$$

ovvero

$$||v||^2 \leq 1$$

cioè

$$\sum_{i=2}^{\rho} \big(\frac{y_i}{y_1}\big)^2 \leq 1$$

da cui

$$y_1^2 \geq \sum_{i=2}^{\rho} y_i^2$$

e quindi $y \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$ e la (vi) è dimostrata.

Ora le (vii) e (viii). È ovvio che $\mathrm{Amp}(S) \subseteq \mathrm{Pos}(S)$ e quindi $\mathrm{Nef}(S) \subseteq \overline{\mathrm{Pos}(S)}$. Inoltre se $x \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$, allora, per la (iii) e l'inclusione $\mathrm{Nef}(S) \subseteq \overline{\mathrm{Pos}(S)}$ si ha $x \cdot n \geq 0$ per ogni $n \in \mathrm{Nef}(S)$, da cui $x \in \mathrm{Nef}(S)^{\vee} = \overline{NE(S)}$ [L, Prop.1.4.28]. Questo dimostra la (viii). Sia ora $x \in \mathrm{Pos}(S)$. Per $0 < \varepsilon \ll 1$ si ha $x - \varepsilon h \in \mathrm{Pos}(S)$: $(x - \varepsilon h)^2 = x^2 + \varepsilon^2 h^2 - 2\varepsilon x \cdot h > 0$

e $(x - \varepsilon h) \cdot h = x \cdot h - \varepsilon h^2 > 0$. Pertanto, per la (viii), $f := x - \varepsilon h \in \overline{NE(S)} = \overline{\mathrm{Eff}(S)}$ e quindi $x = \varepsilon h + f \in \mathrm{Big}(S)$ per il Lemma 0.1 e questo dimostra la (vii). Ora vediamo la (ix). Sia $y \in \overline{NE(S)}$. Se $y = [D], D \in \mathrm{Div}(S)_{\mathbb{R}}$, per [L, Teor.2.3.19] o [B, Teor.14.14] (la dimostrazione vale anche su $\mathbb{R}$) D ha una decomposizione di Zariski $D = P + N$ dove P è nef, N è effettivo, la matrice delle componenti di N è definita negativa e $P \cdot \Gamma = 0$ per ogni Γ componente di N. Allora, posto $p = [P], n = [N]$ si ha $y = [D] = [P] + [N] = p + n$ con $p \in \mathrm{Nef}(S), n \in \mathrm{Eff}(S)$ e $p \cdot n = 0$ e la (ix) è dimostrata. Per vedere la (x) osserviamo che la (viii) implica banalmente che

$$\overline{NE(S)} \supseteq \overline{\mathrm{Pos}(S)} + \sum_{[C] \in \mathrm{Neg}(S)} \mathbb{R}_{\geq 0}[C] \supseteq \mathrm{Nef}(S) + \sum_{[C] \in \mathrm{Neg}(S)} \mathbb{R}_{\geq 0}[C].$$

Viceversa se $y \in \overline{NE(S)}$ la (ix) da $y = p + n$ come sopra. In particolare, essendo la matrice delle componenti di N definita negativa, se Γ è componente di N, allora $\Gamma^2 < 0$ quindi

$$n = [N] \in \sum_{[C] \in \mathrm{Neg}(S)} \mathbb{R}_{\geq 0}[C] \text{ e, ovviamente, } y = p + n \in \mathrm{Nef}(S) + \sum_{[C] \in \mathrm{Neg}(S)} \mathbb{R}_{\geq 0}[C].$$

Ne segue che

$$\overline{NE(S)} \subseteq \mathrm{Nef}(S) + \sum_{[C] \in \mathrm{Neg}(S)} \mathbb{R}_{\geq 0}[C] \subseteq \overline{\mathrm{Pos}(S)} + \sum_{[C] \in \mathrm{Neg}(S)} \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$$

e la (x) è dimostrata. □

References

[B] L. Bădescu. *Algebraic surfaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[BPV] W. Barth, C. Peters, A. van de Ven. *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **4**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.

[H] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[L] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **48**. Springer-Verlag, Berlin, 2004.