Coppie ammissibili e quozienti di threefold di Calabi-Yau

Filippo F. Favale

CIRM - FBK

Giornate di Geometria Algebrica e Argomenti Correlati XII

7 giugno 2014

Varietà di Calabi-Yau

Una *varietà di Calabi-Yau* di dimensione n è una varietà Kähleriana compatta X tale che:

- $\Omega_X^n = \bigwedge^n \Omega_X^1 \simeq \mathcal{O}_X$ $\leftrightsquigarrow$ Esiste una n-forma olomorfa mai nulla
- $\mathrm{H}^{p,0}(X) = 0$ per $0 < p < n$ $\leftrightsquigarrow$ L'unica p-forma olomorfa è quella banale

Esempi di Calabi-Yau

Esempi di varietà di Calabi-Yau:

- Dimensione 1: Curve ellittiche
- Dimensione 2: Superfici $K3$

Esempi di Calabi-Yau

Esempi di varietà di Calabi-Yau:

- Dimensione 1: Curve ellittiche
- Dimensione 2: Superfici $K3$
- $CICY$: Intersezioni complete di (opportune) ipersuperfici in prodotti di spazi proiettivi (Candelas, Braun, Davies, ...)

Esempi di Calabi-Yau

Esempi di varietà di Calabi-Yau:

- Dimensione 1: Curve ellittiche
- Dimensione 2: Superfici $K3$
- *CICY*: Intersezioni complete di (opportune) ipersuperfici in prodotti di spazi proiettivi (Candelas, Braun, Davies, ...)
- Risoluzioni crepanti di ipersuperfici anticanoniche in Fano fourfold torici (Batyrev, Kreuzer, Skarke,...)
- ...

Esempi di Calabi-Yau

Esempi di varietà di Calabi-Yau:

- Dimensione 1: Curve ellittiche
- Dimensione 2: Superfici $K3$
- *CICY*: Intersezioni complete di (opportune) ipersuperfici in prodotti di spazi proiettivi (Candelas, Braun, Davies, ...)
- Risoluzioni crepanti di ipersuperfici anticanoniche in Fano fourfold torici (Batyrev, Kreuzer, Skarke,...)
- ...

Diamante di Hodge di un threefold di Calabi-Yau:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{1,2} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

Esempi di Calabi-Yau

Esempi di varietà di Calabi-Yau:

- Dimensione 1: Curve ellittiche
- Dimensione 2: Superfici $K3$
- *CICY*: Intersezioni complete di (opportune) ipersuperfici in prodotti di spazi proiettivi (Candelas, Braun, Davies, ...)
- Risoluzioni crepanti di ipersuperfici anticanoniche in Fano fourfold torici (Batyrev, Kreuzer, Skarke,...)
- ...

Diamante di Hodge di un threefold di Calabi-Yau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{1,2} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

$$\chi(X) = 2(h^{1,1}(X) - h^{1,2}(X))$$

$$\mathrm{h}(X) := \mathrm{h}^{1,1}(X) + \mathrm{h}^{1,2}(X)$$

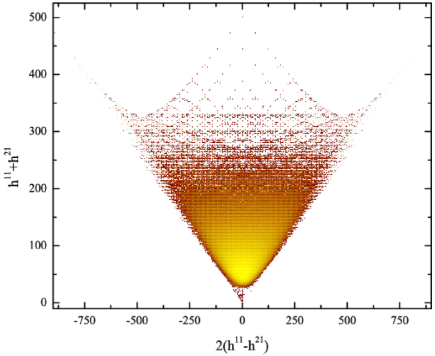
Come si distribuisce la coppia $\left(\mathrm{h}^{1,1}(X), \mathrm{h}^{1,2}(X)\right)$?

Diamante di Hodge di un threefold di Calabi-Yau:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{1,2} & & h^{1,2} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$$\chi(X) = 2(h^{1,1}(X) - h^{1,2}(X))$$

$$\mathrm{h}(X) := \mathrm{h}^{1,1}(X) + \mathrm{h}^{1,2}(X)$$



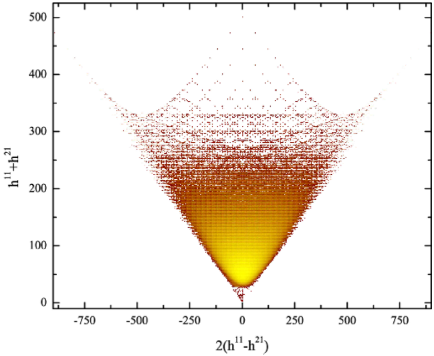
Come si distribuisce la coppia $\left(\mathrm{h}^{1,1}(X), \mathrm{h}^{1,2}(X)\right)$?

Diamante di Hodge di un threefold di Calabi-Yau:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{1,2} & & h^{1,2} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

$$\chi(X) = 2(h^{1,1}(X) - h^{1,2}(X))$$

$$\mathrm{h}(X) := \mathrm{h}^{1,1}(X) + \mathrm{h}^{1,2}(X)$$



Solo esempi sporadici di threefold di Calabi-Yau hanno $h \leq 30$: quasi tutti della forma Y/G con Y Calabi-Yau e G gruppo finito che agisce liberamente su Y.

Alcuni esempi:

[Tian, Yau - 1986][1] : Calabi-Yau Y/G con Y divisore nel prodotto di due cubiche di $\mathbb{P}^3$ e $G \simeq \mathbb{Z}_3$: numeri di Hodge $(6, 9)$.
[Candelas, Davies - 2010][2] : Calabi-Yau Y/G con Y intersezione completa in $(\mathbb{P}^2)^4$ e $G \simeq \mathrm{Dic}_3$: numeri di Hodge $(1, 4)$.

[1] G.Tian, Shing-Tung Yau, *Three-dimensional algebraic manifolds with $c_1 = 0$ and $\chi = -6$.* Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), **1** (1987), pages 543–559. World Sci. Publishing, Singapore

[2] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi–Yau manifolds with small Hodge numbers* Fortschr. Phys., **58** (2010), 383–466.

[3] G. Bini, F.F. Favale, *Groups Acting Freely on Calabi–Yau Threefolds Embedded in a Product of del Pezzo Surfaces.* Advances in Theoretical and Mathematical Physics **16** (2012), no. 3, 887–933.

Alcuni esempi:

[Tian, Yau - 1986][1] : Calabi-Yau Y/G con Y divisore nel prodotto di due cubiche di $\mathbb{P}^3$ e $G \simeq \mathbb{Z}_3$: numeri di Hodge $(6, 9)$.
[Candelas, Davies - 2010][2] : Calabi-Yau Y/G con Y intersezione completa in $(\mathbb{P}^2)^4$ e $G \simeq \mathrm{Dic}_3$: numeri di Hodge $(1, 4)$.

Generalizzazione: [Bini, Favale - 2012][3] : Quozienti liberi di Calabi-Yau threefold immersi nel prodotto di due superfici di del Pezzo.

---

[1] G.Tian, Shing-Tung Yau, *Three-dimensional algebraic manifolds with $c_1 = 0$ and $\chi = -6$*. Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), **1** (1987), pages 543–559. World Sci. Publishing, Singapore

[2] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi–Yau manifolds with small Hodge numbers* Fortschr. Phys., **58** (2010), 383–466.

[3] G. Bini, F.F. Favale, *Groups Acting Freely on Calabi–Yau Threefolds Embedded in a Product of del Pezzo Surfaces.* Advances in Theoretical and Mathematical Physics **16** (2012), no. 3, 887–933.

Siano S_1 e S_2 due superfici di del Pezzo e sia $X := S_1 \times S_2$.

Siano S_1 e S_2 due superfici di del Pezzo e sia $X := S_1 \times S_2$.

Una **coppia ammissibile** in X è una coppia (Y, G) tale che

- $Y \in |-K_X|$ divisore liscio
- $G \leq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(Y)$
- $\mathrm{Fix}(G) \cap Y = \emptyset$

Siano S_1 e S_2 due superfici di del Pezzo e sia $X := S_1 \times S_2$.

Una **coppia ammissibile** in X è una coppia (Y, G) tale che

- $Y \in |-K_X|$ divisore liscio ($\Longrightarrow Y$ è un threefold di Calabi-Yau)
- $G \leq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(Y)$
- $\mathrm{Fix}(G) \cap Y = \emptyset$

Siano S_1 e S_2 due superfici di del Pezzo e sia $X := S_1 \times S_2$.

Una **coppia ammissibile** in X è una coppia (Y, G) tale che

- $Y \in |-K_X|$ divisore liscio ($\Longrightarrow Y$ è un threefold di Calabi-Yau)
- $G \leq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(Y)$ ($\Longrightarrow G \twoheadrightarrow \tilde{G} := \{g|_Y \,:\, g \in G\} \leq \mathrm{Aut}(Y)$)
- $\mathrm{Fix}(G) \cap Y = \emptyset$

Siano S_1 e S_2 due superfici di del Pezzo e sia $X := S_1 \times S_2$.

Una **coppia ammissibile** in X è una coppia (Y, G) tale che

- $Y \in |-K_X|$ divisore liscio $(\Longrightarrow Y$ è un threefold di Calabi-Yau$)$
- $G \leq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(Y)$ $(\Longrightarrow G \twoheadrightarrow \tilde{G} := \{g|_Y \ : \ g \in G\} \leq \mathrm{Aut}(Y))$
- $\mathrm{Fix}(G) \cap Y = \emptyset$ $(\Longrightarrow G \simeq \tilde{G}$ e $\tilde{G}$ agisce liberamente su $Y)$

Siano S_1 e S_2 due superfici di del Pezzo e sia $X := S_1 \times S_2$.

Una **coppia ammissibile** in X è una coppia (Y, G) tale che

- $Y \in |-K_X|$ divisore liscio ($\Longrightarrow Y$ è un threefold di Calabi-Yau)
- $G \leq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(Y)$ ($\Longrightarrow G \twoheadrightarrow \tilde{G} := \{g|_Y \,:\, g \in G\} \leq \mathrm{Aut}(Y)$)
- $\mathrm{Fix}(G) \cap Y = \emptyset$ ($\Longrightarrow G \simeq \tilde{G}$ e $\tilde{G}$ agisce liberamente su Y)

Coppia ammissibile (Y, G) in X $\leftrightsquigarrow$ Calabi-Yau Y/G con $h(Y/G) \leq h(Y)$.

A (Y, G) con $|G|$ massimo corrispondono Calabi-Yau con altezza congetturalmente minima tra quelle ottenibili con quozienti di Calabi-Yau in X.

Scopo del lavoro: ricavare $m(X) := \max\{|G| \mid (Y,G)\,\text{ammissibile}\}$ al variare di S_1 e S_2.

Scopo del lavoro: ricavare $m(X) := \max\{|G| \mid (Y, G) \text{ ammissibile}\}$ al variare di S_1 e S_2.

Approccio:

1. $m(X)$ è finito : se $Y \subset X$ è una Calabi-Yau allora $\chi(Y) = -2K_1^2K_2^2 \neq 0$. Se (Y, G) è una coppia ammissibile allora $|G|$ divide $\chi(Y)$.

Scopo del lavoro: ricavare $m(X) := \max\{|G| \mid (Y,G) \text{ ammissibile}\}$ al variare di S_1 e S_2.

Approccio:

1. $m(X)$ è finito : se $Y \subset X$ è una Calabi-Yau allora $\chi(Y) = -2K_1^2K_2^2 \neq 0$. Se (Y,G) è una coppia ammissibile allora $|G|$ divide $\chi(Y)$.
2. Stima di $m(X)$:

$$M(X) := \mathrm{MCD}\left(-K_1^2K_2^2, K_1^2K_2^2 + K_2^2 + K_1^2\right)$$

Per ogni coppia ammissibili (Y,G) si ha $|G| \leq m(X)|M(X)$.

Scopo del lavoro: ricavare $m(X) := \max\{|G| \,|\, (Y,G) \text{ ammissibile}\}$ al variare di S_1 e S_2.

Approccio:

1. $m(X)$ è finito : se $Y \subset X$ è una Calabi-Yau allora $\chi(Y) = -2K_1^2K_2^2 \neq 0$. Se (Y,G) è una coppia ammissibile allora $|G|$ divide $\chi(Y)$.
2. Stima di $m(X)$:

$$M(X) := \mathrm{MCD}\left(-K_1^2K_2^2, K_1^2K_2^2 + K_2^2 + K_1^2\right) =$$

$$= \mathrm{MCD}(\chi(Y)/2, \chi(-K_X|_Y))$$

Per ogni coppia ammissibili (Y,G) si ha $|G| \leq m(X)|M(X)$.

Scopo del lavoro: ricavare $m(X) := \max\{|G| \,|\, (Y,G) \text{ ammissibile}\}$ al variare di S_1 e S_2.

Approccio:

1. $m(X)$ è finito : se $Y \subset X$ è una Calabi-Yau allora $\chi(Y) = -2K_1^2K_2^2 \neq 0$. Se (Y,G) è una coppia ammissibile allora $|G|$ divide $\chi(Y)$.
2. Stima di $m(X)$:

$$M(X) := \mathrm{MCD}\left(-K_1^2K_2^2, K_1^2K_2^2 + K_2^2 + K_1^2\right) =$$

$$= \mathrm{MCD}(\chi(Y)/2, \chi(-K_X|_Y))$$

   Per ogni coppia ammissibili (Y,G) si ha $|G| \leq m(X)|M(X)$.
3. Una volta ricavato $M(X)$, si analizzano i vari casi ricavando una coppia ammissibile massimale per ogni X.

Valori, caso per caso, di $m(X)$

$M(X)$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	dP_8	dP_7	dP_6	dP_5	dP_4	dP_3	dP_2	dP_1
$\mathbb{P}^2$	9	1	1	1	3	1	1	3	1	1
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	1	16	16	1	2	1	4	1	2	1
dP_8	1	16	16	1	2	1	4	1	2	1
dP_7	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1
dP_6	3	2	2	1	12	1	2	9	4	1
dP_5	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1
dP_4	1	4	4	1	2	1	8	1	2	1
dP_3	3	1	1	1	9	1	1	3	1	1
dP_2	1	2	2	1	4	1	2	1	4	1
dP_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

n : Casi in cui $M(X) > m(X) = 1$
n : Casi in cui $M(X) = m(X) > 1$
n : Casi in cui $M(X) > m(X) > 1$

S_1	S_2	$\max(\lvert G\rvert)/M$	$\lvert G\rvert$	$\pi_1(Y/H)$	h^{11}	h^{12}	h	min?
$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^2$	$9/9$	9	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	2	11	13	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	2	83	85	N
$\mathbb{P}^2$	dP_6	$3/3$	3	$\mathbb{Z}_3$	3	21	24	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	5	59	64	N
$\mathbb{P}^2$	dP_3	$3/3$	3	$\mathbb{Z}_3$	4	13	17	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	8	35	43	N
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$16/16$	16	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	1	5	6	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	4	68	72	N
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	dP_6	$2/2$	2	$\mathbb{Z}_2$	5	29	34	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	6	54	60	N
dP_6	dP_6	$12/12$	12	Dic_3	1	4	5	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	8	44	52	N
dP_6	dP_4	$2/2$	2	$\mathbb{Z}_2$	7	19	26	?
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	10	34	44	N
dP_6	dP_3	$3/9$	3	$\mathbb{Z}_3$	5	11	16	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	11	29	40	N
dP_5	dP_5	$5/5$	5	$\mathbb{Z}_5$	2	7	9	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	10	35	45	N
dP_4	dP_4	$8/8$	8	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$	3	5	8	?
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	12	28	40	N
dP_3	dP_3	$3/3$	3	$\mathbb{Z}_3$	6	9	15	Y
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	14	23	37	N
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	dP_4	$4/4$	4	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	5	13	18	?
			1	$\{\mathrm{Id}\}$	8	40	48	N

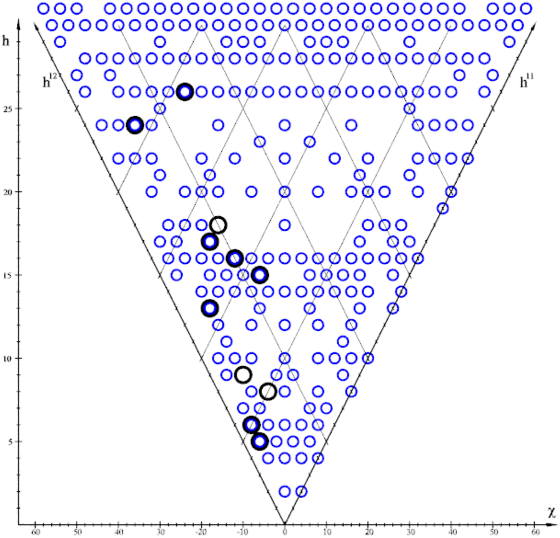


Figura: Varietà di Calabi-Yau con altezza bassa note. Cerchi neri in corrispondenza dei quozienti Y/G con altezza (congetturata) minima. Le coppie (3,5),(2,7) e (5,13) sono *nuove*.

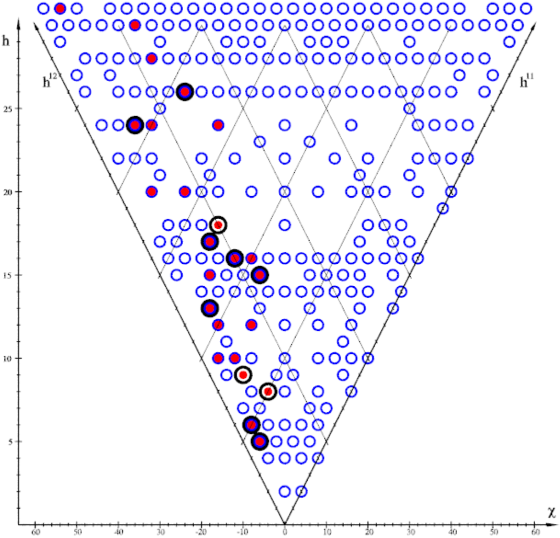


Figura: Varietà di Calabi-Yau con altezza bassa note. Cerchi neri in corrispondenza dei quozienti Y/G con altezza (congetturata) minima. Pallini rossi in corrispondenza di quozienti Y/H con (Y, G) come sopra e $H \leq G$.

Una volta ricavato $m(X)$, quali sono i gruppi che possono far parte di coppie ammissibili (Y, G) massimali, cioè tali che $m(X) = |G|$?

[4] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi–Yau manifolds with small Hodge numbers* Fortschr. Phys., **58** (2010), 383–466.

[5] G. Bini, F.F. Favale, J. Neves, R. Pignatelli, *New examples of Calabi–Yau threefolds and genus zero surfaces*. arXiv:1211.2390, to appear in CCM Journal (2013 issue)

Una volta ricavato $m(X)$, quali sono i gruppi che possono far parte di coppie ammissibili (Y, G) massimali, cioè tali che $m(X) = |G|$?

La domanda è interessante per i casi in cui X ha $m(X)$ alto: questi sono $(\mathbb{P}^1)^4$ (con $m(X) = 16$), $dP_6 \times dP_6$ (con $m(X) = 12$) e $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ (con $m(X) = 9$). Si ha $m(X) \leq 8$ per gli altri casi.

[4] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi–Yau manifolds with small Hodge numbers* Fortschr. Phys., **58** (2010), 383–466.

[5] G. Bini, F.F. Favale, J. Neves, R. Pignatelli, *New examples of Calabi–Yau threefolds and genus zero surfaces*. arXiv:1211.2390, to appear in CCM Journal (2013 issue)

Una volta ricavato $m(X)$, quali sono i gruppi che possono far parte di coppie ammissibili (Y, G) massimali, cioè tali che $m(X) = |G|$?

La domanda è interessante per i casi in cui X ha $m(X)$ alto: questi sono $(\mathbb{P}^1)^4$ (con $m(X) = 16$), $dP_6 \times dP_6$ (con $m(X) = 12$) e $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ (con $m(X) = 9$). Si ha $m(X) \leq 8$ per gli altri casi.

[Candelas, Davies - 2010][4] : Risposta parziale per $X = dP_6 \times dP_6$. Esistono almeno due coppie ammissibili massimali ($|G| = 12$). I gruppi associati a queste coppie sono Dic_3 e $\mathbb{Z}_{12}$.

[4] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi–Yau manifolds with small Hodge numbers* Fortschr. Phys., **58** (2010), 383–466.

[5] G. Bini, F.F. Favale, J. Neves, R. Pignatelli, *New examples of Calabi–Yau threefolds and genus zero surfaces.* arXiv:1211.2390, to appear in CCM Journal (2013 issue)

Una volta ricavato $m(X)$, quali sono i gruppi che possono far parte di coppie ammissibili (Y, G) massimali, cioè tali che $m(X) = |G|$?

La domanda è interessante per i casi in cui X ha $m(X)$ alto: questi sono $(\mathbb{P}^1)^4$ (con $m(X) = 16$), $dP_6 \times dP_6$ (con $m(X) = 12$) e $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ (con $m(X) = 9$). Si ha $m(X) \leq 8$ per gli altri casi.

[Candelas, Davies - 2010][4] : Risposta parziale per $X = dP_6 \times dP_6$. Esistono almeno due coppie ammissibili massimali ($|G| = 12$). I gruppi associati a queste coppie sono Dic_3 e $\mathbb{Z}_{12}$.

[Bini, Favale, Neves, Pignatelli - 2012][5]: Classificazione delle coppie ammissibili in $X := (\mathbb{P}^1)^4$ e studio di particolari superfici nei quozienti.

[4] P. Candelas, R. Davies, *New Calabi–Yau manifolds with small Hodge numbers* Fortschr. Phys., **58** (2010), 383–466.

[5] G. Bini, F.F. Favale, J. Neves, R. Pignatelli, *New examples of Calabi–Yau threefolds and genus zero surfaces*. arXiv:1211.2390, to appear in CCM Journal (2013 issue)

Sia $X = (\mathbb{P}^1)^4$ e siano A e B gli automorfismi di $\mathbb{P}^1$ definiti rispettivamente da

$$(x_0 : x_1) \mapsto (x_0 : -x_1) \quad \text{e} \quad (x_0 : x_1) \mapsto (x_1 : x_0).$$

Sia $X = (\mathbb{P}^1)^4$ e siano A e B gli automorfismi di $\mathbb{P}^1$ definiti rispettivamente da

$$(x_0 : x_1) \mapsto (x_0 : -x_1) \quad \text{e} \quad (x_0 : x_1) \mapsto (x_1 : x_0).$$

Teorema

Sia G un gruppo di ordine 16 in $\mathrm{Aut}(X)$ per il quale esiste una varietà di Calabi-Yau Y con (Y, G) massimale. Allora, a meno di coniugio si ha

1. $G = \langle (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}, A) \circ (1324), (B, B, B, B) \rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$;
2. $G = \langle (\mathrm{Id}, A, \mathrm{Id}, A) \circ (12)(34), (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, B, B) \circ (13)(24) \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$;
3. $G = \langle (\mathrm{Id}, A, \mathrm{Id}, A) \circ (12)(34), (\mathrm{Id}, A, B, AB) \circ (13)(24) \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4$;
4. $G = \langle (\mathrm{Id}, A, \mathrm{Id}, A) \circ (12)(34), (\mathrm{Id}, A, A, \mathrm{Id}) \circ (13)(24), (B, B, B, B) \rangle \simeq Q_8 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Inoltre, ogni quoziente associato a una coppia ammissibile massimale (Y, G) ha numeri di Hodge $(1, 5)$ ed ha $\pi_1(S) = G$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - [illegible] (X Fano);
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - [illegible] $\sigma \in \{id, (12), (12)(34)\}$;
  - [illegible]
  - [illegible] automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
    - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
    - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
  - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
  - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
  - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
  - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
    - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
    - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
    - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
    - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
    - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
  - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
  - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
  - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
  - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
  - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
  - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Punti chiave della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}((\mathbb{P}^1)^4) = S_4 \ltimes \mathrm{PGL}(2)^{\times 4}$;
- $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ gruppo finito può essere parte di una coppia ammissibile solo se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) = 0$:
  - $\mathrm{Fix}(G)$ non può essere vuoto (X Fano + holomorphic Lefschetz fixed point formula);
  - Se $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(G)) > 0$, G non può essere parte di una coppia ammissibile (X Fano).
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 2$. Un'involuzione ι tale che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Fix}(\iota)) = 0$ è coniugata a (A, A, A, A) :
  - Sia $g = (A_1, A_2, A_3, A_4) \circ \sigma$ un'involuzione. A meno di coniugio $\sigma \in \{\mathrm{Id}, (12), (12)(34)\}$;
  - Se $\sigma \neq \mathrm{Id}$ si riesce facilmente a costruire una curva di punti fissi.;
  - Per il caso $\sigma = \mathrm{Id}$ si usa il teorema di Klein sui gruppi finiti di automorfismi di $\mathbb{P}^1$ per concludere.
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 4$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 8$;
- Classificazione delle coppie ammissibili con $|G| = 16$.

Le coppie ammissibili, a meno di coniugio, sono identificate dai gruppi. Questi sono:

$\lvert G\rvert$	$\chi(Y/G)$	G	$\pi(G)$	h^{11}	h^{12}	h
1	-128	$\{\mathrm{Id}\}$	$\{\mathrm{Id}\}$	4	68	72
2	-64	$\mathbb{Z}_2$	$\{\mathrm{Id}\}$	4	36	40
4	-32	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\{\mathrm{Id}\}$	4	20	24
		$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	2	18	20
8	-16	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	2	10	12
		$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_4$	1	9	10
		Q_8	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$			
16	-8	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	1	5	6
		$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$			
		$Q_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$			
		$\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$			

Si può dire qualcosa delle mirror dei quozienti associati a coppie ammissibili?

Due threefold di Calabi-Yau Y e $\tilde{Y}$ sono mirror-simmetriche se

$$\mathrm{h}^{1,1}(Y) = \mathrm{h}^{1,2}(\tilde{Y}) \quad \text{e } \mathrm{h}^{1,2}(Y) = \mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}).$$

[6] V.V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. (3) **3** (1994), 493–535

Si può dire qualcosa delle mirror dei quozienti associati a coppie ammissibili?

Due threefold di Calabi-Yau Y e $\tilde{Y}$ sono mirror-simmetriche se

$$\mathrm{h}^{1,1}(Y) = \mathrm{h}^{1,2}(\tilde{Y}) \quad \text{e} \quad \mathrm{h}^{1,2}(Y) = \mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}).$$

Congettura

Per ogni Calabi-Yau threefold Y non rigido esiste una mirror $\tilde{Y}$.

[6] V.V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*. J. Algebraic Geom. (3) **3** (1994), 493–535

Si può dire qualcosa delle mirror dei quozienti associati a coppie ammissibili?

Due threefold di Calabi-Yau Y e $\tilde{Y}$ sono mirror-simmetriche se

$$\mathrm{h}^{1,1}(Y) = \mathrm{h}^{1,2}(\tilde{Y}) \quad \text{e} \quad \mathrm{h}^{1,2}(Y) = \mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}).$$

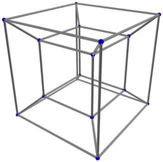
Congettura

Per ogni Calabi-Yau threefold Y non rigido esiste una mirror $\tilde{Y}$.

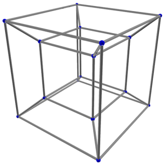
[Batyrev - 1994][6] : La congettura è vera per le risoluzioni crepanti di ipersuperfici anticanoniche in un Fano fourfold torico.

[6] V.V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*. J. Algebraic Geom. (3) **3** (1994), 493–535

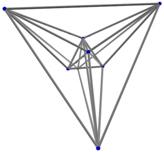
Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.



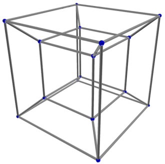
Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.



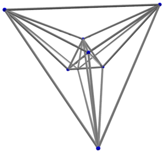
Il politopo duale Δ^o a Δ è l'iperottaedro.



Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.

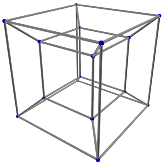


Il politopo duale Δ^o a Δ è l'iperottaedro.



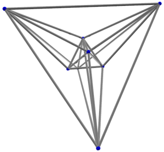
Il fan Σ di $X = (\mathbb{P}^1)^4$ è generato dalle facce di Δ^o.

Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.



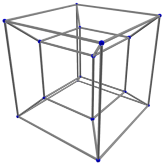
Il fan Σ di $X = (\mathbb{P}^1)^4$ è generato dalle facce di Δ^o.

Il politopo duale Δ^o a Δ è l'iperottaedro.



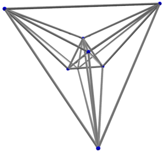
Il fan Σ^o della Fano duale X^o a X è generato dalle facce di Δ.

Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.



Il fan Σ di $X = (\mathbb{P}^1)^4$ è generato dalle facce di Δ^o.

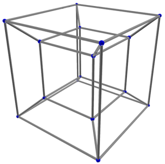
Il politopo duale Δ^o a Δ è l'iperottaedro.



Il fan Σ^o della Fano duale X^o a X è generato dalle facce di Δ.

Sia $\tilde{\Sigma}$ un *qualsiasi* raffinamento massimale proiettivo di Σ^o. $\tilde{X}$ è una risoluzione di X^o.

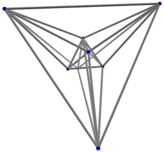
Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.



Il fan Σ di $X = (\mathbb{P}^1)^4$ è generato dalle facce di Δ^o.

La generica ipersuperficie anticanonica Y di X è una varietà di Calabi-Yau con numeri di Hodge $(4, 68)$.

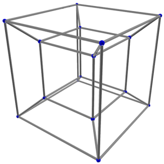
Il politopo duale Δ^o a Δ è l'iperottaedro.



Il fan Σ^o della Fano duale X^o a X è generato dalle facce di Δ.

Sia $\tilde{\Sigma}$ un *qualsiasi* raffinamento massimale proiettivo di Σ^o. $\tilde{X}$ è una risoluzione di X^o.

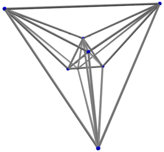
Sia Δ l'ipercubo in $\mathbb{R}^4$.



Il fan Σ di $X = (\mathbb{P}^1)^4$ è generato dalle facce di Δ^o.

La generica ipersuperficie anticanonica Y di X è una varietà di Calabi-Yau con numeri di Hodge $(4, 68)$.

Il politopo duale Δ^o a Δ è l'iperottaedro.



Il fan Σ^o della Fano duale X^o a X è generato dalle facce di Δ.

Sia $\tilde{\Sigma}$ un *qualsiasi* raffinamento massimale proiettivo di Σ^o. $\tilde{X}$ è una risoluzione di X^o.

La generica ipersuperficie anticanonica $\tilde{Y}$ di $\tilde{X}$ è una varietà di Calabi-Yau con numeri di Hodge $(68, 4)$.

Y Calabi-Yau liscia in $X = (\mathbb{P}^1)^4$.

$\tilde{\Sigma}$ *qualsiasi* raffinamento massimale proiettivo di Σ^o.

$$\begin{tikzcd}
& & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook', bend left] \arrow[dd] \arrow[r, dotted, dash] & (68,4) \\
& & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & \\
(4,68) \arrow[r, dotted, dash] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[uurrr, dashed, leftrightarrow, bend left] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] &
\end{tikzcd}$$

(Y, G) coppia ammissibile in $X = (\mathbb{P}^1)^4$.

$\tilde{\Sigma}$ *qualsiasi* raffinamento massimale proiettivo di Σ^o.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook', bend left] \arrow[dd] \arrow[r, dash, dotted] \arrow[ddlll, dashed, leftrightarrow, bend right] & (68,4) \\
 & & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & \\
(4,68) \arrow[r, dash, dotted] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[d, twoheadrightarrow] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] & \\
(a,b) \arrow[r, dash, dotted] & Y/G & & & &
\end{tikzcd}$$

(Y, G) coppia ammissibile in $X = (\mathbb{P}^1)^4$.

$\tilde{\Sigma}$ *qualsiasi* raffinamento massimale proiettivo di Σ^o.

Domanda: esiste un gruppo $\tilde{G} \leq \mathrm{Aut}(\tilde{X})$ in un *opportuna* $\tilde{X}$ tale che Y/G e $\tilde{Y}/\tilde{G}$ siano mirror?

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook', bend left] \arrow[dd] \arrow[dddr, "{[?]}"] \arrow[r, dotted, no head] & (68,4) & \\
 & & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & & \\
(4,68) \arrow[r, dotted, no head] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[d] \arrow[uurrr, dashed, leftrightarrow, bend left] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] & & \\
(a,b) \arrow[r, dotted, no head] & Y/G \arrow[rrrr, dashed, leftrightarrow, "{[?]}"] & & & & \tilde{Y}/\tilde{G} \arrow[r, dotted, no head] & (b,a)
\end{tikzcd}
$$

Il gruppo di simmetria dell'ipercubo (B_4) ha, a meno di coniugio, un unico gruppo isomorfo a

$$M_{16} := \{a, b \,|\, a^8 = b^2 = \mathrm{Id},\ bab = a^5\}.$$

Teorema

Sia $\tilde{\Sigma}$ una risoluzione massimale proiettiva di Σ tale che $\tilde{X} = X_{\tilde{\Sigma}}$ ammette una sezione anticanonica liscia $\tilde{Y}$ e un gruppo $\tilde{G}$ con $\mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}/\tilde{G}) = 5$. Allora, $\tilde{\Sigma}$ deve essere $M_{16}-$simmetrica.

Schema della dimostrazione:

- $\mathrm{Aut}(\tilde{X}) = T \ltimes K$ con $K \leq B_4$;
- Sorgente MAGMA per analizzare $\mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}/K) = 5$ al variare di $K \leq B_4$.

Teorema

Sia $\tilde{\Sigma}$ come nel teorema precedente. Se esiste un gruppo $\tilde{G}$ in $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$ per cui esiste una Calabi-Yau $\tilde{Y}$ che sia $\tilde{G}-$invariante e tale che $\mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}/\tilde{G}) = 5$ allora:

- Il luogo fisso di $\tilde{G}$ su $\tilde{Y}$ ha dimensione 1;
- $\tilde{G}$ agisce banalmente su $\mathrm{H}^0(\Omega^3_{\tilde{Y}})$;
- $\tilde{Z} := \tilde{Y}/\tilde{G}$ è un orbifold di Calabi-Yau;
- $(\mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Z}), \mathrm{h}^{1,2}(\tilde{Z})) = (5, 1)$ e $\pi_1(\tilde{Z}) = \mathbb{Z}_4$.

Teorema

Sia $\tilde{\Sigma}$ come nel teorema precedente. Se esiste un gruppo $\tilde{G}$ in $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$ per cui esiste una Calabi-Yau $\tilde{Y}$ che sia $\tilde{G}-$invariante e tale che $\mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Y}/\tilde{G}) = 5$ allora:

- Il luogo fisso di $\tilde{G}$ su $\tilde{Y}$ ha dimensione 1;
- $\tilde{G}$ agisce banalmente su $\mathrm{H}^0(\Omega^3_{\tilde{Y}})$;
- $\tilde{Z} := \tilde{Y}/\tilde{G}$ è un orbifold di Calabi-Yau;
- $(\mathrm{h}^{1,1}(\tilde{Z}), \mathrm{h}^{1,2}(\tilde{Z})) = (5, 1)$ e $\pi_1(\tilde{Z}) = \mathbb{Z}_4$.

Quindi **non** è possibile ottenere una mirror di Y/G a partire da una coppia ammissibile in $\tilde{X}$ per nessuna scelta di $\tilde{X}$.

Teorema

Ogni risoluzione crepante $\hat{Z}$ di $\tilde{Z}$ è una Calabi-Yau con numeri di Hodge $(8,4)$ e gruppo fondamentale $\pi_1(\hat{Z}) = \mathbb{Z}_4$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook', bend left] \arrow[dd] \arrow[dddr, bend left] \arrow[ddlll, dashed, leftrightarrow, bend right] & & (68,4) \arrow[ll, dotted, no head] \\
 & & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & \hat{Z} \arrow[dd, bend left] & (8,4) \arrow[l, dotted, no head] \\
(4,68) \arrow[r, dotted, no head] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[d] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] & & \\
(1,5) \arrow[r, dotted, no head] & \boxed{Y/G} & & & & \boxed{\tilde{Y}/\tilde{G}} & (5,1) \arrow[l, dotted, no head]
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Sia (Y, G) una coppia ammissibile in X con $G \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8\}$. Allora esiste una risoluzione $\tilde{X}$ di X, un gruppo $\tilde{G}$ e una varietà di Calabi-Yau $\tilde{Y}$ in $\tilde{X}$ tale che Y/G e $\tilde{Y}/\tilde{G}$ siano mirror.

Per la coppia ammissibile $(Y, \mathbb{Z}_8)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \arrow[dddlll, dashed, leftrightarrow, bend right] \arrow[r, dotted, no head] & (68,4) \\
 & & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & \\
(4,68) \arrow[r, dotted, no head] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[d] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] & \\
(1,9) \arrow[r, dotted, no head] & Y/G & & & &
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Sia (Y, G) una coppia ammissibile in X con $G \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8\}$. Allora esiste una risoluzione $\tilde{X}$ di X, un gruppo $\tilde{G}$ e una varietà di Calabi-Yau $\tilde{Y}$ in $\tilde{X}$ tale che Y/G e $\tilde{Y}/\tilde{G}$ siano mirror.

Per la coppia ammissibile $(Y, \mathbb{Z}_8)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \arrow[dddr] \arrow[ddlll, dashed, leftrightarrow, bend right] \arrow[rr, dotted, no head] & & (68,4) \\
 & & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & & \\
(4,68) \arrow[r, dotted, no head] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[d] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] & & \\
(1,9) \arrow[r, dotted, no head] & \boxed{Y/G} & & & & \boxed{\tilde{Y}/\tilde{G}} \arrow[r, dotted, no head] & (9,1)
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Sia (Y, G) una coppia ammissibile in X con $G \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8\}$. Allora esiste una risoluzione $\tilde{X}$ di X, un gruppo $\tilde{G}$ e una varietà di Calabi-Yau $\tilde{Y}$ in $\tilde{X}$ tale che Y/G e $\tilde{Y}/\tilde{G}$ siano mirror.

Per la coppia ammissibile $(Y, \mathbb{Z}_8)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{X} \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \arrow[d, bend left] \arrow[ddd, bend left] \arrow[dddlll, dashed, bend right, leftrightarrow] \arrow[r, dotted, no head] & (68,4) \\
 & & X \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & X^o & & \\
(4,68) \arrow[r, dotted, no head] & Y \arrow[ur, hook, bend right] \arrow[d] & & & Y^o \arrow[ul, hook', bend left] & \\
(1,9) \arrow[r, dotted, no head] & \boxed{Y/G} \arrow[rrr, dashed, leftrightarrow, bend right] & & & \boxed{\tilde{Y}/\tilde{G}} \arrow[r, dotted, no head] & (9,1)
\end{tikzcd}$$

Un altro motivo per ritenere interessante il caso di $(\mathbb{P}^1)^4$ rispetto agli altri prodotti di superfici di del Pezzo è che $-K_X$ è divisibile per due come $\mathbb{Z}$-divisore.

Un altro motivo per ritenere interessante il caso di $(\mathbb{P}^1)^4$ rispetto agli altri prodotti di superfici di del Pezzo è che $-K_X$ è divisibile per due come $\mathbb{Z}$-divisore.

Un rappresentante per la classe di $-K_X/2$ è un Fano threefold.

Se (Y, G) è una coppia ammissibile e *se esiste* un elemento $V \in |-K_X/2|$ invariante per l'azione di G allora è ben definita la superficie $(V \cap Y)/G$. Se (Y, G) è massimale questa è una superficie di tipo generale con

$$p_g = q = 0, K_S^2 = 3 \text{ e } \pi_1(S) = G.$$

Se S è una superficie minimale di tipo generale allora $K_S^2 \geq 1$. Se abbiamo anche $p_g = q = 0$ allora $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ e quindi (disuguaglianza BMY) $K_S^2 \leq 9$.

Se S è una superficie minimale di tipo generale allora $K_S^2 \geq 1$. Se abbiamo anche $p_g = q = 0$ allora $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ e quindi (disuguaglianza BMY) $K_S^2 \leq 9$.

Sia S una superficie minimale di tipo generale con $K_S^2 = n$. Allora

- Se $n = 1$, $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 5$;
- Se $n = 2$, $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 9$;
- Se $n = 4$ esiste S con $|\pi_1(S)| = \infty$.

Se S è una superficie minimale di tipo generale allora $K_S^2 \geq 1$. Se abbiamo anche $p_g = q = 0$ allora $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ e quindi (disuguaglianza BMY) $K_S^2 \leq 9$.

Sia S una superficie minimale di tipo generale con $K_S^2 = n$. Allora

- Se $n = 1$, $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 5$;
- Se $n = 2$, $|\pi_1^{alg}(S)| \leq 9$;
- Se $n = 4$ esiste S con $|\pi_1(S)| = \infty$.

Per $n = 3$ si congettura

$$|\pi_1^{alg}(S)|, |\pi_1(S)| \leq 16$$

e si spera di ottenere l'elenco dei possibili gruppi che sono effettivamente π_1 di ordine (congetturato) massimo di una superficie con $K_S^2 = 3$.

I gruppi che, per ora, appartengono a questo elenco sono

$$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}_4, CP(D_4, Z_4), Q_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4.$$

I gruppi che, per ora, appartengono a questo elenco sono

$$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}_4, CP(D_4, Z_4), Q_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4.$$

Teorema

Se $G \in \{\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4\}$ non esiste $V \in |-K_X/2|$ con V G-invariante.

Se $G \in \{Q_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4\}$ esiste $V \in |-K_X/2|$ threefold G-invariante.

I gruppi che, per ora, appartengono a questo elenco sono

$$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}_4, CP(D_4, Z_4), Q_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4.$$

Teorema

Se $G \in \{\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4\}$ non esiste $V \in |-K_X/2|$ con V G-invariante.

Se $G \in \{Q_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4\}$ esiste $V \in |-K_X/2|$ threefold G-invariante.

La superficie che corrisponde al caso $\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_4$ è il primo esempio conosciuto con questo gruppo fondamentale.