

Luoghi di degenerazione di sezioni del fibrato cotangente

Fabio Tanturri, Universität des Saarlandes

Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati XII
Torino, 4–7 Giugno 2014

Luoghi di degenerazione

Sia $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un morfismo tra fibrati vettoriali su uno spazio proiettivo.

Definizione

Il luogo di degenerazione X_ϕ di ϕ è lo schema localmente tagliato dai minori di ordine massimale della matrice che localmente rappresenta ϕ .

Luoghi di degenerazione

Sia $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un morfismo tra fibrati vettoriali su uno spazio proiettivo.

Definizione

Il luogo di degenerazione X_ϕ di ϕ è lo schema localmente tagliato dai minori di ordine massimale della matrice che localmente rappresenta ϕ .

Esempio (varietà determinanti)

Un morfismo

$$\bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-a_j) \xrightarrow{M} \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-b_i)$$

è globalmente rappresentato da una matrice M con entrate polinomiali e dà luogo ad una varietà determinante.

Come possiamo parametrizzare i possibili luoghi di degenerazione al variare di ϕ ?

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

- ★ dà luogo a molte varietà algebriche classiche;

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

★ dà luogo a molte varietà algebriche classiche; per esempio

- $(m, n) = (2, \text{pari}) \rightsquigarrow \frac{n}{2}$ rette in posizione generale in \mathbb{P}^{n-1} ,
- $(m, n) = (3, 5) \rightsquigarrow$ superficie di Veronese $v_{2,2}$ proiettata in \mathbb{P}^4 ,
- $(m, n) = (4, 5) \rightsquigarrow$ ipersuperficie cubica di Segre,
- $(m, n) = (4, 6) \rightsquigarrow$ un threefold in \mathbb{P}^5 , noto come lo scroll di Palatini.

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

- ★ dà luogo a molte varietà algebriche classiche;
- ★ gli X_ϕ sono insiemi di centri di complessi lineari di rette (Castelnuovo, Palatini, Fano);

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

- ★ dà luogo a molte varietà algebriche classiche;
- ★ gli X_ϕ sono insiemi di centri di complessi lineari di rette (Castelnuovo, Palatini, Fano);
- ★ Bazan-Mezzetti: sono aritmeticamente Buchsbaum;

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

- ★ dà luogo a molte varietà algebriche classiche;
- ★ gli X_ϕ sono insiemi di centri di complessi lineari di rette (Castelnuovo, Palatini, Fano);
- ★ Bazan-Mezzetti: sono aritmeticamente Buchsbaum;
- ★ Fania-Mezzetti e Faenzi-Fania: risultati sul loro schema di Hilbert.

Il caso $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^m$ e $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}^1(2)$ è piuttosto ricorrente in letteratura:

- ★ dà luogo a molte varietà algebriche classiche;
- ★ gli X_ϕ sono insiemi di centri di complessi lineari di rette (Castelnuovo, Palatini, Fano);
- ★ Bazan-Mezzetti: sono aritmeticamente Buchsbaum;
- ★ Fania-Mezzetti e Faenzi-Fania: risultati sul loro schema di Hilbert.

Un possibile approccio per parametrizzare famiglie di luoghi di degenerazione: guardare il loro schema di Hilbert \mathcal{H} .

Domanda

Qual è il comportamento degli X_ϕ in \mathcal{H} ?

Preliminari

Notazione

\mathbf{k} : campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.

V : spazio vettoriale di dimensione n su \mathbf{k} .

$\mathbf{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$: spazio degli 1-quotienti di V , a meno di scalari.

U : spazio vettoriale di dimensione m su \mathbf{k} , con $m < n - 1$.

Per ϕ generale, il polinomio di Hilbert $p(x)$ di X_ϕ è fissato. Vogliamo studiare solo la parte “interessata” dello schema di Hilbert, perciò considereremo, dentro di esso, \mathcal{H} : l’unione delle componenti irriducibili contenenti gli X_ϕ generali.

Preliminari

Notazione

\mathbf{k} : campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.

V : spazio vettoriale di dimensione n su \mathbf{k} .

$\mathbf{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$: spazio degli 1-quozienti di V , a meno di scalari.

U : spazio vettoriale di dimensione m su \mathbf{k} , con $m < n - 1$.

Per ϕ generale, il polinomio di Hilbert $p(x)$ di X_ϕ è fissato. Vogliamo studiare solo la parte “interessata” dello schema di Hilbert, perciò considereremo, dentro di esso, \mathcal{H} : l’unione delle componenti irriducibili contenenti gli X_ϕ generali.

Proprietà

Per ϕ generale, X_ϕ è una varietà normale, irriducibile, di dimensione $m - 1$ in $\mathbf{P}(V)$.

Interpretazione geometrica

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) \xrightarrow{\varphi := \phi^t} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

Interpretazione geometrica

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) \xrightarrow{\varphi := \phi^t} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

Successione di Eulero: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(V)}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) \cong U \otimes \Lambda^2 V$.

Inoltre $U \otimes \Lambda^2 V \subset U \otimes V \otimes V \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(U)}(V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}, V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1))$, dunque ϕ dà luogo ad una matrice anti-simmetrica N_ϕ

$$V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)} \xrightarrow{N_\phi} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Interpretazione geometrica

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) \xrightarrow{\varphi := \phi^t} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

Successione di Eulero: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(V)}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) \cong U \otimes \Lambda^2 V$.

Inoltre $U \otimes \Lambda^2 V \subset U \otimes V \otimes V \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(U)}(V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}, V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1))$, dunque ϕ dà luogo ad una matrice anti-simmetrica N_ϕ

$$V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)} \xrightarrow{N_\phi} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Lemma

$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{P}(U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}) \cong \mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)$.

Inoltre $X_\phi = X_\varphi$ è birazionale a $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ (isom. sse X liscia sse $n > 2m - 3$).

Dunque: se n pari, X_ϕ è birazionale alla proiettivizzazione di un fascio di rango due sopra una ipersuperficie pfaffiana; se n dispari, allo scoppiamento di $\mathbf{P}(U)$ lungo un sottoschema di codimensione tre.

$$\mathrm{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) - \frac{\alpha}{\mathcal{H}}$$

La mappa razionale α manda ϕ in X_ϕ .

Domande

$X_{\phi_1} = X_{\phi_2} \implies \phi_1 = \phi_2$? Cioè: α è genericamente iniettiva?

Le deformazioni di X_ϕ sono ancora in $\mathrm{Im}(\alpha)$? Cioè: α è dominante?

$$\mathrm{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) - \frac{\alpha}{\mathcal{H}}$$

La mappa razionale α manda ϕ in X_ϕ .

Domande

$X_{\phi_1} = X_{\phi_2} \implies \phi_1 = \phi_2$? Cioè: α è genericamente iniettiva?

Le deformazioni di X_ϕ sono ancora in $\mathrm{Im}(\alpha)$? Cioè: α è dominante?

Almeno per la prima domanda, la risposta è immediata:

Osservazione

$\mathrm{GL}(U)$ agisce naturalmente su $\mathrm{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2))$. Le equazioni locali descriventi X_ϕ cambiano sotto questa azione, ma l'ideale descritto no!

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{H} \\ \downarrow / \text{GL}(U) & \dashrightarrow \rho & \\ \Psi & & \end{array}$$

Successione di Eulero: $\text{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) \cong (\Lambda^2 V)^m$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{H} \\
 \downarrow / \mathrm{GL}(U) & \searrow \rho & \\
 \mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{H} \\
 \downarrow / \text{GL}(U) & \searrow \rho & \\
 \mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V) & &
 \end{array}$$

Il comportamento della mappa ρ è noto in alcuni casi.

Per esempio, per valori bassi di (m, n) , o quando n è pari e X_ϕ è liscio, ρ è birazionale.

Ma: quando $(m, n) = (2, 6)$ o $(m, n) = (3, 6)$, ρ è dominante ma non genericamente iniettiva.

Scopo

Completare il quadro generale.

Risultati principali

Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $2 \leq m < n - 1$.

Risultati principali

Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $2 \leq m < n - 1$.

- i. Se $m \geq 4$ o $(m, n) = (3, 5)$, allora ρ è birazionale; in particolare, \mathcal{H} è irriducibile e genericamente liscio di dimensione $m \left(\binom{n}{2} - m \right)$.*

Risultati principali

Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $2 \leq m < n - 1$.

- i. Se $m \geq 4$ o $(m, n) = (3, 5)$, allora ρ è birazionale; in particolare, \mathcal{H} è irriducibile e genericamente liscio di dimensione $m \left(\binom{n}{2} - m \right)$.
- ii. Se $m = 3$ e $n > 6$, allora ρ è genericamente iniettiva. È dominante su un sottoschema chiuso \mathcal{H}' di \mathcal{H} , avente codimensione $\frac{1}{8}n(n-3)(n-5)$ se n è dispari e $\frac{3}{8}(n-4)(n-6)$ se n è pari. L'elemento generale di \mathcal{H}' può essere descritto esplicitamente.

Risultati principali

Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $2 \leq m < n - 1$.

- i. Se $m \geq 4$ o $(m, n) = (3, 5)$, allora ρ è birazionale; in particolare, \mathcal{H} è irriducibile e genericamente liscio di dimensione $m \binom{n}{2} - m$.
- ii. Se $m = 3$ e $n > 6$, allora ρ è genericamente iniettiva. È dominante su un sottoschema chiuso \mathcal{H}' di \mathcal{H} , avente codimensione $\frac{1}{8}n(n-3)(n-5)$ se n è dispari e $\frac{3}{8}(n-4)(n-6)$ se n è pari. L'elemento generale di \mathcal{H}' può essere descritto esplicitamente.
- iii. Se $m = 2$ e $n \geq 5$, allora ρ è dominante ma non genericamente iniettiva. \mathcal{H} è irriducibile, genericamente liscio e il suo elemento generale può essere descritto esplicitamente. Se $(m, n) = (2, 4)$, ρ è birazionale.

Sketch della dimostrazione

Abbiamo bisogno di

Sketch della dimostrazione

Abbiamo bisogno di

★ stima dall'alto: $h^0(X_\phi, \mathcal{N}_{X_\phi/\mathbf{P}(V)}) \leq \dim(\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V))$

Sketch della dimostrazione

Abbiamo bisogno di

- ★ stima dall'alto: $h^0(X_\phi, \mathcal{N}_{X_\phi/\mathbf{P}(V)}) \leq \dim(\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V))$
- ★ iniettività generale di ρ

Sketch della dimostrazione

Abbiamo bisogno di

- ★ stima dall'alto: $h^0(X_\phi, \mathcal{N}_{X_\phi/\mathbf{P}(V)}) \leq \dim(\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V))$
- ★ iniettività generale di ρ

In questo modo:

$$\begin{aligned}
 \dim \mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V) &\leq \dim \mathcal{H} && \text{iniettività} \\
 &\leq \dim(\mathbf{T}_{X_\phi} \mathcal{H}) = h^0(X_\phi, \mathcal{N}_{X_\phi/\mathbf{P}(V)}) && \text{Grothendieck} \\
 &\leq \dim \mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V). && \text{stima}
 \end{aligned}$$

Sketch della dimostrazione

Abbiamo bisogno di

- ★ stima dall'alto: $h^0(X_\phi, \mathcal{N}_{X_\phi/\mathbf{P}(V)}) \leq \dim(\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V))$
- ★ iniettività generale di ρ

In questo modo:

$$\begin{aligned}
 \dim \mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V) &\leq \dim \mathcal{H} && \text{iniettività} \\
 &\leq \dim(\mathbf{T}_{X_\phi} \mathcal{H}) = h^0(X_\phi, \mathcal{N}_{X_\phi/\mathbf{P}(V)}) && \text{Grothendieck} \\
 &\leq \dim \mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V). && \text{stima}
 \end{aligned}$$

Vero per $m \geq 4$ o $(m, n) = (3, 5)$.

Se $m = 3, n > 6$, ρ è genericamente iniettiva ma la stima precedente è errata.

Se $m = 2$ e $n \geq 5$, è l'iniettività generale a fallire; in questi casi, ρ risulta tuttavia dominante.

Stima

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) \xrightarrow{\varphi := \phi^t} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0 .$$

Lemma

$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \subset \mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)$ è una risoluzione delle singularità di $X = X_\phi$. Inoltre, $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ è il luogo degli zeri di una sezione $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2))$.

Stima

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) \xrightarrow{\varphi := \phi^t} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0.$$

Lemma

$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \subset \mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)$ è una risoluzione delle singularità di $X = X_\phi$. Inoltre, $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ è il luogo degli zeri di una sezione $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2))$.

Lemma

Una stima dall'alto per $h^0(X, \mathcal{N})$ è data da $h^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{Q})$, dove \mathcal{Q} è definito dalla successione $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{C}^m \longrightarrow \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2) \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$.

Infatti $\mathcal{N} \cong \mathcal{E}xt_{\mathbf{P}(V)}^1(\mathcal{C}, \mathcal{C})$, e quest'ultimo è un sottofascio di \mathcal{Q} .

Problema: calcolare $h^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{Q})$.

$\mathbb{P}(\mathcal{C})$ è il luogo degli zeri di una sezione di $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)$ su $\mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)$, dunque abbiamo il seguente complesso di Koszul

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1-n) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(2-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(2-n) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(4-n) \longrightarrow \\
 &\longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(-1) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}^{n-2}(n-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})} \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{C})$ è il luogo degli zeri di una sezione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}(V)}(2)$ su $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)$, dunque abbiamo il seguente complesso di Koszul

$$\begin{aligned}
 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1-n) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2-n) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(2-n) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}(V)}(4-n) \longrightarrow \\
 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}(V)}^{n-2}(n-2) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})} \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Sia $q : \mathbb{P}(\mathcal{C}) \rightarrow X$ la risoluzione delle singolarità di X . Allora:

$$Rq_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})}) = \mathcal{O}_X, \quad Rq_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})}(1,0)) = \mathcal{C},$$

$$Rq_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})}(1,0) \otimes q^* \Omega_{\mathbb{P}(V)}(2)) = \mathcal{C} \otimes \Omega_{\mathbb{P}(V)}(2).$$

$\mathbb{P}(\mathcal{C})$ è il luogo degli zeri di una sezione di $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)$ su $\mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)$, dunque abbiamo il seguente complesso di Koszul

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(1-n) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(2-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(2-n) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(4-n) \longrightarrow \\ \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(U)}(-1) \boxtimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}^{n-2}(n-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})} \longrightarrow 0.$$

Sia $q: \mathbb{P}(\mathcal{C}) \rightarrow X$ la risoluzione delle singolarità di X . Allora:

$$Rq_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})}) = \mathcal{O}_X, \quad Rq_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})}(1,0)) = \mathcal{C},$$

$$Rq_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{C})}(1,0) \otimes q^* \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) = \mathcal{C} \otimes \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2).$$

Metodo di Kempf-Lascoux-Weyman: tensorizzando opportunamente il complesso di Koszul, possiamo calcolare le coomologie dei fibrati su $\mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)$ (tramite le formule di Bott e di Künneth).

$$(m \geq 4) \text{ o } (5 \leq n \leq 6, m = 3) \Rightarrow h^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{Q}) = \dim(\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V)).$$

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = \mathcal{S}^{n-m-1} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = S^{n-m-1}\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Consideriamo due morfismi φ_1, φ_2 t.c. $X_1 = X_2$.

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = \mathcal{S}^{n-m-1} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Consideriamo due morfismi φ_1, φ_2 t.c. $X_1 = X_2$.

i. $\omega_{X_1} \cong \omega_{X_2} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = \mathcal{S}^{n-m-1} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Consideriamo due morfismi φ_1, φ_2 t.c. $X_1 = X_2$.

i. $\omega_{X_1} \cong \omega_{X_2} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$. Infatti:

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(X^{\mathrm{sm}}) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}(\mathcal{C}) \setminus q^{-1}(\mathrm{Sing}(X))) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}(\mathcal{C})) \cong \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{C})).$$

Se $m \geq 4$ o $m = 3, n \neq 6$, l'ultimo gruppo è privo di torsione, dunque possiamo "estrarre la radice".

Quando $(m, n) = (3, 6)$, la torsione c'è. In effetti, ρ non è genericamente iniettiva, bensì $4 : 1$ (Fano, Bazan-Mezzetti).

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = \mathcal{S}^{n-m-1} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Consideriamo due morfismi φ_1, φ_2 t.c. $X_1 = X_2$.

i. $\omega_{X_1} \cong \omega_{X_2} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = S^{n-m-1} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Consideriamo due morfismi φ_1, φ_2 t.c. $X_1 = X_2$.

- i. $\omega_{X_1} \cong \omega_{X_2} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.
- ii. $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ induce $\beta \in \text{Aut}(U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)})$, i.e. $\beta \in \text{GL}(U)$.
 $\varphi_1 \sim \varphi_2$ via β , i.e. rappresentano lo stesso elemento in $\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V)$.

Iniettività

Iniettività generale di ρ : sia $\mathcal{L} := \mathcal{C}|_X$. Allora

$$\omega_X = S^{n-m-1} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-2).$$

Consideriamo due morfismi φ_1, φ_2 t.c. $X_1 = X_2$.

- i. $\omega_{X_1} \cong \omega_{X_2} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.
- ii. $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ induce $\beta \in \text{Aut}(U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)})$, i.e. $\beta \in \text{GL}(U)$.
 $\varphi_1 \sim \varphi_2$ via β , i.e. rappresentano lo stesso elemento in $\mathbf{Gr}(m, \Lambda^2 V)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) & \xrightarrow{\varphi_1} & U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{C}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \exists \gamma & & \downarrow \exists \beta & & \downarrow \alpha & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_2 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathbf{P}(V)}(-2) & \xrightarrow{\varphi_2} & U \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Superfici

Superfici

Sia $m = 3$, $n \neq 6$: $X = X_\phi$ è una superficie. ρ è genericamente iniettiva ma (nuovamente grazie al metodo di Kempf)

$$\text{codim}_{\mathcal{H}} \text{Im}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{8}n(n-3)(n-5) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{3}{8}(n-4)(n-6) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Faenzi-Fania spiegano la mancata birazionalità nel caso pari.
Nel caso dispari?

Superfici

Sia $m = 3$, $n \neq 6$: $X = X_\phi$ è una superficie. ρ è genericamente iniettiva ma (nuovamente grazie al metodo di Kempf)

$$\text{codim}_{\mathcal{H}} \text{Im}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{8}n(n-3)(n-5) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{3}{8}(n-4)(n-6) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Faenzi-Fania spiegano la mancata birazionalità nel caso pari.

Nel caso dispari? $\text{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) \ni \phi \longleftrightarrow N \in (\Lambda^2 V)^3$, e X può essere pensata come l'immagine dell'isomorfismo dato dagli pfaffiani di ordine $n-1$ di N

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{[\text{Pf}_1: \dots: \text{Pf}_n]} \mathbf{P}(V).$$

Tali pfaffiani sono forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili.

Superfici

Sia $m = 3$, $n \neq 6$: $X = X_\phi$ è una superficie. ρ è genericamente iniettiva ma (nuovamente grazie al metodo di Kempf)

$$\text{codim}_{\mathcal{H}} \text{Im}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{8}n(n-3)(n-5) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{3}{8}(n-4)(n-6) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Faenzi-Fania spiegano la mancata birazionalità nel caso pari.

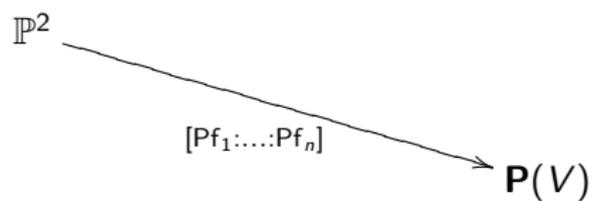
Nel caso dispari? $\text{Hom}(U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}, \Omega_{\mathbf{P}(V)}(2)) \ni \phi \longleftrightarrow N \in (\Lambda^2 V)^3$, e X può essere pensata come l'immagine dell'isomorfismo dato dagli pfaffiani di ordine $n-1$ di N

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{[\text{Pf}_1 : \dots : \text{Pf}_n]} \mathbf{P}(V).$$

Tali pfaffiani sono forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili.

Ma: una scelta *generale* di n forme F_i produce una superficie razionale $\text{Im}([F_1 : \dots : F_n]) \cong X$, anche se gli F_i non sono pfaffiani, dunque ρ non è dominante.

Un altro modo di caratterizzare i punti in $\text{Im}(\rho)$:



Un altro modo di caratterizzare i punti in $\text{Im}(\rho)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{[\text{Pf}_1:\dots:\text{Pf}_n:C_1:\dots:C_{r-n+1}]} & \mathbb{P}^r \\
 & \searrow_{[\text{Pf}_1:\dots:\text{Pf}_n]} & \downarrow \pi \\
 & & \mathbf{P}(V)
 \end{array}$$

dove $\{\text{Pf}_i, C_j\}$ è una base dello spazio delle forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili, la cui dimensione è $r + 1$.

Un altro modo di caratterizzare i punti in $\text{Im}(\rho)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{[\text{Pf}_1:\dots:\text{Pf}_n:C_1:\dots:C_{r-n+1}]} & \mathbb{P}^r \\
 & \searrow_{[\text{Pf}_1:\dots:\text{Pf}_n]} & \downarrow \pi \\
 & & \mathbf{P}(V)
 \end{array}$$

dove $\{\text{Pf}_i, C_j\}$ è una base dello spazio delle forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili, la cui dimensione è $r + 1$.

Fissata una mappa di Veronese $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^r$, scelte generali per la proiezione π danno luogo a superfici isomorfe tra loro.

Una proiezione π , composta con la mappa di Veronese, dà luogo a n forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili. La loro immagine è in $\text{Im}(\rho)$ se e solo se le n forme sono pffaffiane:

Un altro modo di caratterizzare i punti in $\text{Im}(\rho)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{[\text{Pf}_1:\dots:\text{Pf}_n:C_1:\dots:C_{r-n+1}]} & \mathbb{P}^r \\
 & \searrow_{[\text{Pf}_1:\dots:\text{Pf}_n]} & \downarrow \pi \\
 & & \mathbf{P}(V)
 \end{array}$$

dove $\{\text{Pf}_i, C_j\}$ è una base dello spazio delle forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili, la cui dimensione è $r + 1$.

Fissata una mappa di Veronese $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^r$, scelte generali per la proiezione π danno luogo a superfici isomorfe tra loro.

Una proiezione π , composta con la mappa di Veronese, dà luogo a n forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in tre variabili. La loro immagine è in $\text{Im}(\rho)$ se e solo se le n forme sono pffaffiane:

Domanda

Quali sono le proiezioni π tali che queste n forme siano esprimibili come pffaffiani di una matrice anti-simmetrica di forme lineari?

Teorema

Sia G una forma non degenere di grado $n - 3$. Consideriamo una superficie di Veronese immersa via $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\frac{n-1}{2})|$ in \mathbb{P}^r ; allora la sua proiezione X in $\mathbf{P}(V)$ rispetto al centro generato da $\{\partial^\alpha(G)\}_{|\alpha|=\frac{n-5}{2}}$ è contenuto in $\text{Im}(\rho)$.

Viceversa, un elemento generale di $\text{Im}(\rho)$ è ottenibile tramite la costruzione di cui sopra.

Teorema

Sia G una forma non degenera di grado $n - 3$. Consideriamo una superficie di Veronese immersa via $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\frac{n-1}{2})|$ in \mathbb{P}^r ; allora la sua proiezione X in $\mathbf{P}(V)$ rispetto al centro generato da $\{\partial^\alpha(G)\}_{|\alpha|=\frac{n-5}{2}}$ è contenuto in $\text{Im}(\rho)$.

Viceversa, un elemento generale di $\text{Im}(\rho)$ è ottenibile tramite la costruzione di cui sopra.

Infatti, tramite la corrispondenza di Macaulay e il Teorema di Struttura di Buchsbaum-Eisenbud, si dimostra l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra forme non degeneri di grado $n - 3$ in $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$, a meno di scalari, e ideali (artiniani, Gorenstein, graduati) di codimensione tre in $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ generati in grado $\frac{n-1}{2}$ dagli n pfaffiani di una matrice anti-simmetrica $n \times n$ di forme lineari.

Teorema

Sia G una forma non degenera di grado $n - 3$. Consideriamo una superficie di Veronese immersa via $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\frac{n-1}{2})|$ in \mathbb{P}^r ; allora la sua proiezione X in $\mathbf{P}(V)$ rispetto al centro generato da $\{\partial^\alpha(G)\}_{|\alpha|=\frac{n-5}{2}}$ è contenuto in $\text{Im}(\rho)$.

Viceversa, un elemento generale di $\text{Im}(\rho)$ è ottenibile tramite la costruzione di cui sopra.

Infatti, tramite la corrispondenza di Macaulay e il Teorema di Struttura di Buchsbaum-Eisenbud, si dimostra l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra forme non degeneri di grado $n - 3$ in $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$, a meno di scalari, e ideali (artiniani, Gorenstein, graduati) di codimensione tre in $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ generati in grado $\frac{n-1}{2}$ dagli n pffaffiani di una matrice anti-simmetrica $n \times n$ di forme lineari.

Quindi: per avere un elemento di $\text{Im}(\rho)$ è necessario scegliere un centro di proiezione che sia generato dalle derivate parziali di un certo polinomio.

Curve

Curve

Sia $m = 2$. Se n è dispari e $n \geq 5$, l'elemento generale di \mathcal{H} è l'immagine in $\mathbf{P}(V)$ di un isomorfismo

$$\mathbf{P}(U) \xrightarrow{[F_1:\dots:F_n]} \mathbf{P}(V),$$

dove F_1, \dots, F_n sono forme che generano l'intero spazio delle forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in due variabili.

Curve

Sia $m = 2$. Se n è dispari e $n \geq 5$, l'elemento generale di \mathcal{H} è l'immagine in $\mathbf{P}(V)$ di un isomorfismo

$$\mathbf{P}(U) \xrightarrow{[F_1:\dots:F_n]} \mathbf{P}(V),$$

dove F_1, \dots, F_n sono forme che generano l'intero spazio delle forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in due variabili. \mathcal{H} è genericamente liscio e irriducibile, ρ è dominante e la sua fibra generale ha dimensione $\frac{n^2-3n}{2}$.

Curve

Sia $m = 2$. Se n è dispari e $n \geq 5$, l'elemento generale di \mathcal{H} è l'immagine in $\mathbf{P}(V)$ di un isomorfismo

$$\mathbf{P}(U) \xrightarrow{[F_1: \dots : F_n]} \mathbf{P}(V),$$

dove F_1, \dots, F_n sono forme che generano l'intero spazio delle forme di grado $\frac{n-1}{2}$ in due variabili. \mathcal{H} è genericamente liscio e irriducibile, ρ è dominante e la sua fibra generale ha dimensione $\frac{n^2-3n}{2}$.

Se n è pari? X_ϕ è l'unione di $\frac{n}{2}$ rette generali in $\mathbf{P}(V)$. \mathcal{H} è genericamente liscio e irriducibile, ρ è dominante e la sua fibra generale ha dimensione $n - 4$.

Interpretazione geometrica della fibra: occorre considerare *complessi lineari di rette* in $\mathbf{P}(V)$.

Sia $\mathbb{G} := \mathbb{G}(1, n-1)$, la Grassmanniana di rette in $\mathbf{P}(V)$, immersa in $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ tramite la mappa di Plücker. Lo spazio duale $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$ parametrizza sezioni iperpiane di \mathbb{G} , o, in terminologia classica, *complessi lineari di rette* in $\mathbf{P}(V)$.

Un elemento $A \in \Lambda^2 V$, a meno di costanti, può essere considerato come un elemento di $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$, e dunque dà luogo ad un complesso lineare di rette Γ . Il luogo dei centri di Γ è dato da $\mathbf{P}(\ker(A)^*) \subset \mathbf{P}(V)$; geometricamente, p è nel luogo dei centri se e solo se ogni retta per p appartiene a Γ .

X_ϕ è esattamente l'insieme dei centri dei complessi appartenenti alla retta di complessi $N_\phi \subset \mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$.

Sia $\mathbb{G} := \mathbb{G}(1, n-1)$, la Grassmanniana di rette in $\mathbf{P}(V)$, immersa in $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ tramite la mappa di Plücker. Lo spazio duale $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$ parametrizza sezioni iperpiane di \mathbb{G} , o, in terminologia classica, *complessi lineari di rette* in $\mathbf{P}(V)$.

Un elemento $A \in \Lambda^2 V$, a meno di costanti, può essere considerato come un elemento di $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$, e dunque dà luogo ad un complesso lineare di rette Γ . Il luogo dei centri di Γ è dato da $\mathbf{P}(\ker(A)^*) \subset \mathbf{P}(V)$; geometricamente, p è nel luogo dei centri se e solo se ogni retta per p appartiene a Γ .

X_ϕ è esattamente l'insieme dei centri dei complessi appartenenti alla retta di complessi $N_\phi \subset \mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$.

Proposizione

La fibra di ρ sopra l'unione di $\frac{n}{2}$ rette generali $\ell_1, \dots, \ell_{\frac{n}{2}}$ è data dalle rette giacenti sullo spazio lineare generato da $H_1, \dots, H_{\frac{n}{2}}$ in $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$, dove H_i è l'unica (a meno di scalari) matrice anti-simmetrica non nulla avente $\langle \ell_j \rangle_{j \neq i}$ come centro.

Sia $\mathbb{G} := \mathbb{G}(1, n-1)$, la Grassmanniana di rette in $\mathbf{P}(V)$, immersa in $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ tramite la mappa di Plücker. Lo spazio duale $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$ parametrizza sezioni iperpiane di \mathbb{G} , o, in terminologia classica, *complessi lineari di rette* in $\mathbf{P}(V)$.

Un elemento $A \in \Lambda^2 V$, a meno di costanti, può essere considerato come un elemento di $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$, e dunque dà luogo ad un complesso lineare di rette Γ . Il luogo dei centri di Γ è dato da $\mathbf{P}(\ker(A)^*) \subset \mathbf{P}(V)$; geometricamente, p è nel luogo dei centri se e solo se ogni retta per p appartiene a Γ .

X_ϕ è esattamente l'insieme dei centri dei complessi appartenenti alla retta di complessi $N_\phi \subset \mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$.

Proposizione

La fibra di ρ sopra l'unione di $\frac{n}{2}$ rette generali $\ell_1, \dots, \ell_{\frac{n}{2}}$ è data dalle rette giacenti sullo spazio lineare generato da $H_1, \dots, H_{\frac{n}{2}}$ in $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$, dove H_i è l'unica (a meno di scalari) matrice anti-simmetrica non nulla avente $\langle \ell_j \rangle_{j \neq i}$ come centro.

Conseguenza: se $(m, n) = (2, 4)$, ρ è birazionale.