Stacks di rivestimenti ramificati di Galois

Fabio Tonini

Humboldt University - Berlin

07/06/2014

Preliminari

Settings

Lavoriamo su un campo $k = \overline{k}$ e consideriamo dato un gruppo finito G con $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Preliminari

Settings

Lavoriamo su un campo $k = \overline{k}$ e consideriamo dato un gruppo finito G con $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Rivestimento:

Mappa affine $f \colon X \longrightarrow Y$ tale che $f_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero di rango finito. In particolare $X = \operatorname{Spec} f_*\mathcal{O}_X$.

Preliminari

Settings

Lavoriamo su un campo $k = \overline{k}$ e consideriamo dato un gruppo finito G con $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Rivestimento:

Mappa affine $f \colon X \longrightarrow Y$ tale che $f_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero di rango finito. In particolare $X = \operatorname{Spec} f_*\mathcal{O}_X$.

Azione di G su un rivestimento

Se $f \colon X \longrightarrow Y$ è un rivestimento, G agisce su X e f è invariante allora G agisce su $f_*\mathcal{O}_X$.

Preliminari

Settings

Lavoriamo su un campo $k = \overline{k}$ e consideriamo dato un gruppo finito G con $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Rivestimento:

Mappa affine $f \colon X \longrightarrow Y$ tale che $f_* \mathcal{O}_X$ è localmente libero di rango finito. In particolare $X = \operatorname{Spec} f_* \mathcal{O}_X$.

Azione di G su un rivestimento

Se $f \colon X \longrightarrow Y$ è un rivestimento, G agisce su X e f è invariante allora G agisce su $f_* \mathcal{O}_X$.

Rappresentazione regolare di G

pr: $G \times Y \longrightarrow Y$ è un rivestimento e G agisce su $G \times Y$ per moltiplicazione. $\mathcal{O}_Y[G] = \mathrm{pr}_* \mathcal{O}_{Y \times G}$ è detta la *rappresentatione regolare* di G su Y.

G-rivestimenti

G-rivestimenti

Definizione

Un *G-rivestimento* è un rivestimento $f\colon X \longrightarrow Y$ con una azione di G su X tale che f è invariante e per ogni $q \in Y$ esiste un morfismo piatto e di presentazione finita $U \longrightarrow Y$ con q nell'immagine e un isomorfismo G-equivariante di fasci quasi-coerenti

$$f_*\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_U[G]$$

G-rivestimenti

Definizione

Un *G-rivestimento* è un rivestimento $f\colon X \longrightarrow Y$ con una azione di G su X tale che f è invariante e per ogni $q \in Y$ esiste un morfismo piatto e di presentazione finita $U \longrightarrow Y$ con q nell'immagine e un isomorfismo G-equivariante di fasci quasi-coerenti

$$f_*\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_U[G]$$

Molti di più dei G-torsori

Gli isomorfismi locali non sono isomorfismi di anelli.

G-rivestimenti

Definizione

Un *G-rivestimento* è un rivestimento $f: X \longrightarrow Y$ con una azione di G su X tale che f è invariante e per ogni $q \in Y$ esiste un morfismo piatto e di presentazione finita $U \longrightarrow Y$ con q nell'immagine e un isomorfismo G-equivariante di fasci quasi-coerenti

$$f_*\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_U[G]$$

Molti di più dei G-torsori

Gli isomorfismi locali non sono isomorfismi di anelli.

Motivazione geometrica

Se $f: X \longrightarrow Y$ è un rivestimento fra varietà lisce, G agisce fedelemete su X e $X/G \simeq Y$ allora f è un G-rivestimento.

Background

Background

Caso Abeliano

- Pardini. Classificazione rivestimenti abeliani fra varietà lisce.
- Rivestimenti doppi ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) e tripli ciclici ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

Background

Caso Abeliano

- Pardini. Classificazione rivestimenti abeliani fra varietà lisce.
- Rivestimenti doppi ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) e tripli ciclici ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

Caso non abeliano

- Easton. S_3-rivestimenti.
- Tokunaga. Rivestimenti diedrali fra varietà lisce.

Background

Caso Abeliano

- Pardini. Classificazione rivestimenti abeliani fra varietà lisce.
- Rivestimenti doppi ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) e tripli ciclici ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

Caso non abeliano

- Easton. S_3-rivestimenti.
- Tokunaga. Rivestimenti diedrali fra varietà lisce.

Caso non equivariante

- Miranda, Hahn. Rivestimenti di grado 3 e 4.
- Casnati, Ekedahl. Rivestimenti di Gorenstein di grado ≥ 3.

Problemi riguardanti G-rivestimenti.

Problemi riguardanti G-rivestimenti.

Descrizione

Dato uno schema Y descrivere i G-rivestimenti di Y in termini di dati definiti su Y (e.g. fasci e mappe). Un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rivestimento è dato da un fascio invertibile $\mathcal{L}$ e una mappa $\mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Y$.

Problemi riguardanti G-rivestimenti.

Descrizione

Dato uno schema Y descrivere i G-rivestimenti di Y in termini di dati definiti su Y (e.g. fasci e mappe). Un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rivestimento è dato da un fascio invertibile $\mathcal{L}$ e una mappa $\mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Y$.

Regolarità

Dato uno schema Y e una proprietà P (e.g. regolare, normale, ...) descrivere G-rivestimenti $X \longrightarrow Y$ tali che X possiede P.

Problemi riguardanti G-rivestimenti.

Descrizione

Dato uno schema Y descrivere i G-rivestimenti di Y in termini di dati definiti su Y (e.g. fasci e mappe). Un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rivestimento è dato da un fascio invertibile $\mathcal{L}$ e una mappa $\mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Y$.

Regolarità

Dato uno schema Y e una proprietà P (e.g. regolare, normale, ...) descrivere G-rivestimenti $X \longrightarrow Y$ tali che X possiede P.

Geometria dello stack dei G-rivestimenti

Lo stack G-Cov

Definizione

Denotiamo con G-Cov lo stack dei G-rivestimenti.

Lo stack G-Cov

Definizione

Denotiamo con G-Cov lo stack dei G-rivestimenti.

$$G\text{-Cov} = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-rivestimenti di tutti gli schemi}\}$$

Lo stack G-Cov

Definizione

Denotiamo con G-Cov lo stack dei G-rivestimenti.

$$G\text{-Cov} = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-rivestimenti di tutti gli schemi}\}$$

$$\mathrm{B}\,G = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-torsori di tutti gli schemi}\}$$

Lo stack G-Cov

Definizione

Denotiamo con G-Cov lo stack dei G-rivestimenti.

$$G\text{-Cov} = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-rivestimenti di tutti gli schemi}\}$$

$$\mathrm{B}\, G = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-torsori di tutti gli schemi}\}$$

Teorema

Lo stack G-Cov è algebrico e $\mathrm{B}\, G$ è un aperto di G-Cov.

Lo stack G-Cov

Definizione

Denotiamo con G-Cov lo stack dei G-rivestimenti.

$$G\text{-Cov} = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-rivestimenti di tutti gli schemi}\}$$

$$\mathrm{B}\,G = \{\text{categoria di tutti i } G\text{-torsori di tutti gli schemi}\}$$

Teorema

Lo stack G-Cov è algebrico e $\mathrm{B}\,G$ è un aperto di G-Cov.

Quindi G-Cov è uno "spazio geometrico" e possiamo studiare la sua geometria.

Outline

1. Rivestimenti abeliani.
2. G-rivestimenti e funtori monoidali.

Il caso abeliano

Ovvero ...

G =gruppo abeliano finito.

Il caso abeliano

Ovvero ...

G =gruppo abeliano finito.

Un G-rivestimento di uno schema Y è lo spettro di

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}_g \text{ dove } \begin{cases} \mathcal{L}_g \text{ invertibile per ogni } g \in G \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g'} \subseteq \mathcal{L}_{g+g'} \end{cases}$$

Il caso abeliano

Ovvero ...

G =gruppo abeliano finito.

Un G-rivestimento di uno schema Y è lo spettro di

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}_g \text{ dove } \begin{cases} \mathcal{L}_g \text{ invertibile per ogni } g \in G \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g'} \subseteq \mathcal{L}_{g+g'} \end{cases}$$

Esempi

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rivest. $\iff (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y)$

Il caso abeliano

Ovvero ...

G =gruppo abeliano finito.

Un G-rivestimento di uno schema Y è lo spettro di

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}_g \text{ dove } \begin{cases} \mathcal{L}_g \text{ invertibile per ogni } g \in G \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g'} \subseteq \mathcal{L}_{g+g'} \end{cases}$$

Esempi

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rivest. $\iff (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y)$
- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-rivest. $\iff (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_1)$

Il caso abeliano

Ovvero ...

G =gruppo abeliano finito.

Un G-rivestimento di uno schema Y è lo spettro di

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}_g \text{ dove } \begin{cases} \mathcal{L}_g \text{ invertibile per ogni } g \in G \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g'} \subseteq \mathcal{L}_{g+g'} \end{cases}$$

Esempi

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rivest. $\iff$ $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_Y)$
- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-rivest. $\iff$ $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_1)$
- Descrizione simile per $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Geometria di G-Cov

Problema

In generale non esiste una simile descrizione per i G-rivestimenti.

Geometria di G-Cov

Problema

In generale non esiste una simile descrizione per i G-rivestimenti.

Teorema

Lo stack G-Cov è

1) liscio se e solo se $G = 0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

Geometria di G-Cov

Problema

In generale non esiste una simile descrizione per i G-rivestimenti.

Teorema

Lo stack G-Cov è

1) liscio se e solo se $G = 0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
2) connesso;

Geometria di G-Cov

Problema

In generale non esiste una simile descrizione per i G-rivestimenti.

Teorema

Lo stack G-Cov è

1) liscio se e solo se $G = 0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
2) connesso;
3) riducibile se $|G| \geq 9$.

Geometria di G-Cov

Problema

In generale non esiste una simile descrizione per i G-rivestimenti.

Teorema

Lo stack G-Cov è

1) liscio se e solo se $G = 0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;
2) connesso;
3) riducibile se $|G| \geq 9$.

Ci concentriamo sulla componente irriducibile $\mathcal{Z}_G = \overline{\mathrm{B}\, G} \subseteq G$-Cov.

Schema di Hilbert equivariante

Schema di Hilbert equivariante

Definizione [Haiman, Sturmfels, Nakamura, Peeva, Stillman]

Data un'azione lineare di G su $\mathbb{A}^r$ definiamo

$$Y \in \mathrm{Sch}^{op},\ (G\text{-Hilb}\mathbb{A}^r)(Y) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^r_Y \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd} \ ;\ \begin{array}{c} f \in G\text{-Cov}(Y) \\ i \text{ immersione chiusa} \\ \text{equivariante} \end{array} \right\}$$

Schema di Hilbert equivariante

Definizione [Haiman, Sturmfels, Nakamura, Peeva, Stillman]

Data un'azione lineare di G su $\mathbb{A}^r$ definiamo

$$Y \in \mathrm{Sch}^{op},\ (G\text{-Hilb}\mathbb{A}^r)(Y) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^r_Y \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd} \;;\; \begin{array}{c} f \in G\text{-Cov}(Y) \\ i \text{ immersione chiusa} \\ \text{equivariante} \end{array} \right\}$$

Teorema

Il funtore dimentico $G\text{-Hilb}\mathbb{A}^r \longrightarrow G\text{-Cov}$ è liscio ed ha fibre geometriche irriducibili sull'immagine $U \subseteq G\text{-Cov}$.

Schema di Hilbert equivariante

Definizione [Haiman, Sturmfels, Nakamura, Peeva, Stillman]

Data un'azione lineare di G su $\mathbb{A}^r$ definiamo

$$Y \in \mathrm{Sch}^{op}, \ (G\text{-Hilb}\mathbb{A}^r)(Y) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^r_Y \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd} \ ; \ \begin{array}{c} f \in G\text{-Cov}(Y) \\ i \text{ immersione chiusa} \\ \text{equivariante} \end{array} \right\}$$

Teorema

Il funtore dimentico $G\text{-Hilb}\mathbb{A}^r \longrightarrow G\text{-Cov}$ è liscio ed ha fibre geometriche irriducibili sull'immagine $U \subseteq G\text{-Cov}$.

In particolare ...

Geometria di U "=" geometria $G\text{-Hilb}\mathbb{A}^r$.

Descrizione torica di $\mathcal{Z}_G$

Descrizione torica di $\mathcal{Z}_G$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}^G/\langle e_0 \rangle \longrightarrow G \longrightarrow 0, \ \ e_g \longmapsto g$$

$$K_+ = \mathbb{N}\langle e_g + e_{g'} - e_{g+g'} \mid g, g' \in G \rangle \subseteq K \text{ sotto-semigruppo}$$

Descrizione torica di $\mathcal{Z}_G$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}^G/\langle e_0 \rangle \longrightarrow G \longrightarrow 0, \ \ e_g \longmapsto g$$

$$K_+ = \mathbb{N}\langle e_g + e_{g'} - e_{g+g'} \mid g, g' \in G \rangle \subseteq K \ \text{sotto-semigruppo}$$

Teorema

$$\mathcal{Z}_G \simeq [\operatorname{Spec} k[K_+]/\mathbb{G}_m^{|G|-1}]$$

Descrizione torica di $\mathcal{Z}_G$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}^G/\langle e_0\rangle \longrightarrow G \longrightarrow 0,\ \ e_g \longmapsto g$$

$$K_+ = \mathbb{N}\langle e_g + e_{g'} - e_{g+g'} \mid g, g' \in G\rangle \subseteq K \text{ sotto-semigruppo}$$

Teorema

$$\mathcal{Z}_G \simeq [\operatorname{Spec} k[K_+]/\mathbb{G}_m^{|G|-1}]$$

Data una qualsiasi sequenza finita

$$\underline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^q \in K_+^\vee = \{\text{mappe additive } K_+ \longrightarrow \mathbb{N}\}$$

possiamo definire:

Descrizione torica di $\mathcal{Z}_G$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}^G/\langle e_0 \rangle \longrightarrow G \longrightarrow 0, \ e_g \longmapsto g$$

$$K_+ = \mathbb{N}\langle e_g + e_{g'} - e_{g+g'} \mid g, g' \in G \rangle \subseteq K \text{ sotto-semigruppo}$$

Teorema

$$\mathcal{Z}_G \simeq [\operatorname{Spec} k[K_+]/\mathbb{G}_m^{|G|-1}]$$

Data una qualsiasi sequenza finita

$$\underline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^q \in K_+^\vee = \{\text{mappe additive } K_+ \longrightarrow \mathbb{N}\}$$

possiamo definire:

- $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}}$ stack liscio e "torico" che parametrizza particolari sequenze di fasci invertibili e mappe (relative ad $\underline{\mathcal{E}}$);

Descrizione torica di $\mathcal{Z}_G$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}^G/\langle e_0\rangle \longrightarrow G \longrightarrow 0,\ \ e_g \longmapsto g$$

$$K_+ = \mathbb{N}\langle e_g + e_{g'} - e_{g+g'} \mid g, g' \in G\rangle \subseteq K \text{ sotto-semigruppo}$$

Teorema

$$\mathcal{Z}_G \simeq [\operatorname{Spec} k[K_+]/\mathbb{G}_m^{|G|-1}]$$

Data una qualsiasi sequenza finita

$$\underline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^q \in K_+^\vee = \{\text{mappe additive } K_+ \longrightarrow \mathbb{N}\}$$

possiamo definire:

- $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}}$ stack liscio e "torico" che parametrizza particolari sequenze di fasci invertibili e mappe (relative ad $\underline{\mathcal{E}}$);
- $\pi_{\underline{\mathcal{E}}}\colon \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \longrightarrow \mathcal{Z}_G \subseteq G\text{-Cov}$ un funtore.

Qual è la migliore sequenza?

Qual è la migliore sequenza?

Osservazione

Date sequenze $\underline{\delta} < \underline{\mathcal{E}}$ in $K_+^\vee$ abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{\underline{\delta}} \arrow[d, "\text{immersione aperta}"'] \arrow[dr, "\pi_{\underline{\delta}}"] & \\ \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \arrow[r, "\pi_{\underline{\mathcal{E}}}"'] & \mathcal{Z}_G \subseteq G\text{-Cov} \end{tikzcd}$$

Qual è la migliore sequenza?

Osservazione

Date sequenze $\underline{\delta} < \underline{\mathcal{E}}$ in $K_+^\vee$ abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{\underline{\delta}} \arrow[d, "\text{immersione aperta}"'] \arrow[dr, "\pi_{\underline{\delta}}"] & \\ \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \arrow[r, "\pi_{\underline{\mathcal{E}}}"'] & \mathcal{Z}_G \subseteq G\text{-Cov} \end{tikzcd}$$

Teorema (Pardini)

Esiste una sequenza $\underline{\delta} = \delta^1, \dots, \delta^N \in K_+^\vee$ tale che per ogni G-rivestimento $f: X \longrightarrow Y$ da una varietà normale ad una liscia esiste un unico $\xi \in \mathcal{F}_{\underline{\delta}}$ tale che $\pi_{\underline{\delta}}(\xi) \simeq f$.

Più G-rivestimenti ...

Più G-rivestimenti ...

Teorema

Se $\underline{\mathcal{E}}$ = raggi estremali e interi del cono $\mathbb{R}_+ K_+^\vee \subset \mathbb{R}^{|G|-1}$ allora:

Più G-rivestimenti ...

Teorema

Se $\underline{\mathcal{E}}$ = raggi estremali e interi del cono $\mathbb{R}_+ K_+^\vee \subset \mathbb{R}^{|G|-1}$ allora:

- $\pi_{\underline{\mathcal{E}}} \colon \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \longrightarrow \mathcal{Z}_G$ è topologicamente suriettivo;

Più G-rivestimenti ...

Teorema

Se $\underline{\mathcal{E}}$ = raggi estremali e interi del cono $\mathbb{R}_+ K_+^\vee \subset \mathbb{R}^{|G|-1}$ allora:

- $\pi_{\underline{\mathcal{E}}} \colon \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \longrightarrow \mathcal{Z}_G$ è topologicamente suriettivo;
- la restrizione

$$\pi_{\underline{\mathcal{E}}}^{-1}(\mathcal{Z}_G^{sm}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_G^{sm} = \text{luogo liscio di } \mathcal{Z}_G$$

  è una equivalenza.

Più G-rivestimenti ...

Teorema

Se $\underline{\mathcal{E}}$ = raggi estremali e interi del cono $\mathbb{R}_+ K_+^\vee \subset \mathbb{R}^{|G|-1}$ allora:

- $\pi_{\underline{\mathcal{E}}} \colon \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \longrightarrow \mathcal{Z}_G$ è topologicamente suriettivo;
- la restrizione

$$\pi_{\underline{\mathcal{E}}}^{-1}(\mathcal{Z}_G^{sm}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_G^{sm} = \text{luogo liscio di } \mathcal{Z}_G$$

  è una equivalenza. In particolare $\pi_{\underline{\mathcal{E}}}$ è birazionale;

Più G-rivestimenti ...

Teorema

Se $\underline{\mathcal{E}}$ = raggi estremali e interi del cono $\mathbb{R}_+ K_+^\vee \subset \mathbb{R}^{|G|-1}$ allora:

- $\pi_{\underline{\mathcal{E}}} \colon \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \longrightarrow \mathcal{Z}_G$ è topologicamente suriettivo;
- la restrizione
$$\pi_{\underline{\mathcal{E}}}^{-1}(\mathcal{Z}_G^{sm}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_G^{sm} = \text{luogo liscio di } \mathcal{Z}_G$$
è una equivalenza. In particolare $\pi_{\underline{\mathcal{E}}}$ è birazionale;
- se Y è localmente fattoriale, integro con $\dim Y \geq 1$ e $f \colon X \longrightarrow Y$ è un G-rivestimento le cui fibre geometriche sui punti di codimensione 1 stanno in $\mathcal{Z}_G^{\mathrm{sm}}$, allora f ha un unico sollevamento a $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}}$.

Più G-rivestimenti ...

Teorema

Se $\underline{\mathcal{E}}$ = raggi estremali e interi del cono $\mathbb{R}_+ K_+^\vee \subset \mathbb{R}^{|G|-1}$ allora:

- $\pi_{\underline{\mathcal{E}}} \colon \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}} \longrightarrow \mathcal{Z}_G$ è topologicamente suriettivo;
- la restrizione
$$\pi_{\underline{\mathcal{E}}}^{-1}(\mathcal{Z}_G^{sm}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_G^{sm} = \text{luogo liscio di } \mathcal{Z}_G$$
è una equivalenza. In particolare $\pi_{\underline{\mathcal{E}}}$ è birazionale;
- se Y è localmente fattoriale, integro con $\dim Y \geq 1$ e $f \colon X \longrightarrow Y$ è un G-rivestimento le cui fibre geometriche sui punti di codimensione 1 stanno in $\mathcal{Z}_G^{\mathrm{sm}}$, allora f ha un unico sollevamento a $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{E}}}$. Se X è normal crossing in codimensione 1 questa condizione è soddisfatta.

Caso generale.

Ovvero ...

G =qualsiasi gruppo finito.

Caso generale.

Ovvero ...

G =qualsiasi gruppo finito.

Osservazione

Possiamo dimenticarci della descrizione torica dei G-rivestimenti!

Descrizione dei G-rivestimenti

Un G-rivestimento di uno schema Y è lo spettro di

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{V \in Irr_G} V^{\vee} \otimes \mathscr{A}_V \text{ dove } \begin{cases} \mathscr{A}_V \text{ localmente libero di rango } \dim_k V \\ \mathscr{A}_k = \mathcal{O}_Y \\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A} \text{ equivariante} \end{cases}$$

e Irr_G = rappresentazioni irriducibili di G su k.

Descrizione dei G-rivestimenti

Un G-rivestimento di uno schema Y è lo spettro di

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{V \in Irr_G} V^\vee \otimes \mathscr{A}_V \text{ dove } \begin{cases} \mathscr{A}_V \text{ localmente libero di rango } \dim_k V \\ \mathscr{A}_k = \mathcal{O}_Y \\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A} \text{ equivariante} \end{cases}$$

e Irr_G = rappresentazioni irriducibili di G su k.

Problema

Data una sequenza di fasci localmente liberi $(\mathscr{A}_V)_{V \in Irr_G}$ del giusto rango descrivere le possibili moltiplicazioni equivarianti sul fascio

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{V \in Irr_G} V^\vee \otimes \mathscr{A}_V$$

$\mathscr{A} \rightsquigarrow \Omega^{\mathscr{A}}$

Idea

Associare ad $\mathscr{A}$ non solo la sequenza $(\mathscr{A}_V)_{V \in Irr_G}$ ma un intero funtore.

$\mathscr{A} \rightsquigarrow \Omega^{\mathscr{A}}$

Idea

Associare ad $\mathscr{A}$ non solo la sequenza $(\mathscr{A}_V)_{V \in \mathrm{Irr}_G}$ ma un intero funtore.

$$\mathrm{Rep}^G k = \{\text{categoria rappresentationi finite di } G \text{ su } k\}$$

$$\mathrm{Loc}\, Y = \{\text{categoria fasci localmente liberi su } Y\}$$

$\mathscr{A} \rightsquigarrow \Omega^{\mathscr{A}}$

Idea

Associare ad $\mathscr{A}$ non solo la sequenza $(\mathscr{A}_V)_{V \in \mathrm{Irr}_G}$ ma un intero funtore.

$$\mathrm{Rep}^G k = \{\text{categoria rappresentationi finite di } G \text{ su } k\}$$

$$\mathrm{Loc}\, Y = \{\text{categoria fasci localmente liberi su } Y\}$$

Definizione

Dato un fascio localmente libero e G-equivariante $\mathcal{F}$ su Y poniamo

$$\Omega^{\mathcal{F}} \colon \mathrm{Rep}^G k \longrightarrow \mathrm{Loc}\, Y, \ \Omega^{\mathcal{F}}_V = (V \otimes \mathcal{F})^G$$

$\mathscr{A} \rightsquigarrow \Omega^{\mathscr{A}}$

Idea

Associare ad $\mathscr{A}$ non solo la sequenza $(\mathscr{A}_V)_{V \in Irr_G}$ ma un intero funtore.

$$\operatorname{Rep}^G k = \{\text{categoria rappresentationi finite di } G \text{ su } k\}$$

$$\operatorname{Loc} Y = \{\text{categoria fasci localmente liberi su } Y\}$$

Definizione

Dato un fascio localmente libero e G-equivariante $\mathcal{F}$ su Y poniamo

$$\Omega^{\mathcal{F}} \colon \operatorname{Rep}^G k \longrightarrow \operatorname{Loc} Y, \; \Omega^{\mathcal{F}}_V = (V \otimes \mathcal{F})^G$$

Osservazione

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{V \in I_G} V^\vee \otimes \mathscr{A}_V \implies \Omega^{\mathscr{A}}_W = \mathscr{A}_W \text{ per ogni } W \in Irr_G$$

Pro e contro

Pro e contro

Contro

- Associamo a qualcosa di finito (G-rivestimento) un qualcosa di infinito (funtore).

Pro e contro

Contro

- Associamo a qualcosa di finito (G-rivestimento) un qualcosa di infinito (funtore).

Pro

- Una struttura di algebra equivariante corrisponde ad una struttura naturale sul funtore.

Pro e contro

Contro

- Associamo a qualcosa di finito (G-rivestimento) un qualcosa di infinito (funtore).

Pro

- Una struttura di algebra equivariante corrisponde ad una struttura naturale sul funtore.
- Questo approccio estende a schemi in gruppo più generali.

Pro e contro

Contro

- Associamo a qualcosa di finito (G-rivestimento) un qualcosa di infinito (funtore).

Pro

- Una struttura di algebra equivariante corrisponde ad una struttura naturale sul funtore.
- Questo approccio estende a schemi in gruppo più generali.
- Analogia con il problema di ricostruzione di Tannaka.

Funtori monoidali

Definizione

Una struttura *monoidale* su $\Gamma\colon \mathrm{Rep}^G k \longrightarrow \mathrm{Loc}\, Y$ consiste in:

- una trasformazione naturale

$$i_{V,W}\colon \Gamma_V \otimes \Gamma_W \longrightarrow \Gamma_{V\otimes W} \text{ per ogni } V, W \in \mathrm{Rep}^G k$$

Funtori monoidali

Definizione

Una struttura *monoidale* su $\Gamma\colon \mathrm{Rep}^G k \longrightarrow \mathrm{Loc}\, Y$ consiste in:

- una trasformazione naturale

$$i_{V,W}\colon \Gamma_V \otimes \Gamma_W \longrightarrow \Gamma_{V\otimes W} \text{ per ogni } V, W \in \mathrm{Rep}^G k$$

- una mappa $\alpha\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Gamma_k$

Funtori monoidali

Definizione

Una struttura *monoidale* su $\Gamma\colon \mathrm{Rep}^G k \longrightarrow \mathrm{Loc}\, Y$ consiste in:

- una trasformazione naturale

$$i_{V,W}\colon \Gamma_V \otimes \Gamma_W \longrightarrow \Gamma_{V\otimes W} \text{ per ogni } V, W \in \mathrm{Rep}^G k$$

- una mappa $\alpha\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Gamma_k$
- condizioni di compatibilità.

Funtori monoidali

Definizione

Una struttura *monoidale* su $\Gamma\colon \mathrm{Rep}^G k \longrightarrow \mathrm{Loc}\, Y$ consiste in:

- una trasformazione naturale

$$i_{V,W}\colon \Gamma_V \otimes \Gamma_W \longrightarrow \Gamma_{V\otimes W} \text{ per ogni } V, W \in \mathrm{Rep}^G k$$

- una mappa $\alpha\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Gamma_k$
- condizioni di compatibilità.

La struttura monoidale è detta *forte* se tutte le mappe α e $i_{V,W}$ sono isomorfismi.

Teorema

Sia Y uno schema. Abbiamo una equivalenza

Teorema

Sia Y uno schema. Abbiamo una equivalenza

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \longmapsto & \Omega^{\mathcal{F}} = (- \otimes \mathcal{F})^G \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{fasci localmente liberi} \\ G\text{-equivarianti su } Y \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{funtori } k\text{-lineari} \\ \operatorname{Rep}^G k \xrightarrow{\Gamma} \operatorname{Loc} Y \end{array} \right\}
\end{array}
$$

Teorema

Sia Y uno schema. Abbiamo una equivalenza

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \longmapsto & \Omega^{\mathcal{F}} = (- \otimes \mathcal{F})^G \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{fasci localmente liberi} \\ G\text{-equivarianti su } Y \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{funtori } k\text{-lineari} \\ \operatorname{Rep}^G k \xrightarrow{\Gamma} \operatorname{Loc} Y \end{array} \right\}
\end{array}
$$

struttura di algebra	struttura monoidale

Teorema

Sia Y uno schema. Abbiamo una equivalenza

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longmapsto & \Omega^{\mathcal{F}} = (- \otimes \mathcal{F})^G \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{fasci localmente liberi} \\ G\text{-equivarianti su } Y \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{funtori } k\text{-lineari} \\ \operatorname{Rep}^G k \xrightarrow{\Gamma} \operatorname{Loc} Y \end{array} \right\} \end{array}$$

struttura di algebra	struttura monoidale
G-rivestimento	monoidale e $\operatorname{rk} \Gamma_V = \dim_k V$ per ogni V

Teorema

Sia Y uno schema. Abbiamo una equivalenza

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longmapsto & \Omega^{\mathcal{F}} = (- \otimes \mathcal{F})^G \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{fasci localmente liberi} \\ G\text{-equivarianti su } Y \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{funtori } k\text{-lineari} \\ \operatorname{Rep}^G k \xrightarrow{\Gamma} \operatorname{Loc} Y \end{array} \right\} \end{array}$$

struttura di algebra	struttura monoidale
G-rivestimento	monoidale e $\operatorname{rk} \Gamma_V = \dim_k V$ per ogni V
G-torsore	monoidale forte

Teorema

Sia Y uno schema. Abbiamo una equivalenza

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \longmapsto & \Omega^{\mathcal{F}} = (- \otimes \mathcal{F})^G \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{fasci localmente liberi} \\ G\text{-equivarianti su } Y \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{funtori } k\text{-lineari} \\ \mathrm{Rep}^G k \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Loc}\, Y \end{array} \right\}
\end{array}
$$

struttura di algebra	struttura monoidale
G-rivestimento	monoidale e $\mathrm{rk}\,\Gamma_V = \dim_k V$ per ogni V
G-torsore	monoidale forte

Osservazione

L'ultima linea è nota ed è parte della dualità di Tannaka.

Applicazioni

Teorema

Lo stack G-Cov è riducibile se G non è abeliano.

Applicazioni

Teorema

Lo stack G-Cov è riducibile se G non è abeliano.

Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento e $V \in Irr_G$.

Applicazioni

Teorema

Lo stack G-Cov è riducibile se G non è abeliano.

Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento e $V \in Irr_G$.
Denota $\Omega^f = (- \otimes f_*\mathcal{O}_X)^G$ il funtore associato e considera

$$\Omega^f_V \otimes \Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_{V\otimes V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_k = \mathcal{O}_Y$$

Applicazioni

Teorema

Lo stack G-Cov è riducibile se G non è abeliano.

Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento e $V \in Irr_G$.
Denota $\Omega^f = (- \otimes f_*\mathcal{O}_X)^G$ il funtore associato e considera

$$\Omega^f_V \otimes \Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_{V\otimes V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_k = \mathcal{O}_Y \xRightarrow{\text{duale}}$$

$$\Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow (\Omega^f_V)^\vee$$

Applicazioni

Teorema

Lo stack G-Cov è riducibile se G non è abeliano.

Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento e $V \in Irr_G$.
Denota $\Omega^f = (- \otimes f_*\mathcal{O}_X)^G$ il funtore associato e considera

$$\Omega^f_V \otimes \Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_{V\otimes V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_k = \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\text{duale}}$$

$$\Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow (\Omega^f_V)^\vee \text{ dello stesso rango } \dim_k V$$

Applicazioni

Teorema

Lo stack G-Cov è riducibile se G non è abeliano.

Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento e $V \in Irr_G$.
Denota $\Omega^f = (- \otimes f_*\mathcal{O}_X)^G$ il funtore associato e considera

$$\Omega^f_V \otimes \Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_{V\otimes V^\vee} \longrightarrow \Omega^f_k = \mathcal{O}_Y \xRightarrow{\text{duale}}$$

$$\Omega^f_{V^\vee} \longrightarrow (\Omega^f_V)^\vee \text{ dello stesso rango } \dim_k V \xRightarrow{\det}$$

$$s_{f,V} \in (\det \Omega^f_V \otimes \det \Omega^f_{V^\vee})^{-1}$$

Regolarità in codimensione 1

Regolarità in codimensione 1

Teorema

Assumiamo G resolubile. Sia Y uno schema integro, Noetheriano e regolare in codimensione 1 con $\dim Y \geq 1$ e $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento. Sono equivalenti:

Regolarità in codimensione 1

Teorema

Assumiamo G resolubile. Sia Y uno schema integro, Noetheriano e regolare in codimensione 1 con $\dim Y \geq 1$ e $f\colon X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento. Sono equivalenti:

- X è regolare in codimensione 1

Regolarità in codimensione 1

Teorema

Assumiamo G resolubile. Sia Y uno schema integro, Noetheriano e regolare in codimensione 1 con $\dim Y \geq 1$ e $f: X \longrightarrow Y$ un G-rivestimento. Sono equivalenti:

- X è regolare in codimensione 1
- Per ogni punto $q \in Y$ di codimensione 1 e per ogni rappresentazione irriducibile V di G abbiamo

$$v_q(s_{f,V}) \leq \dim_k V$$