Dimensione coomologica e rango aritmetico di alcune varietà determinantali

Alessio Caminata

collaborazione con D. Bolognini, A. Macchia e M. Mostafazadehfard

Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati XIII
Catania, 25–28 Maggio 2016

Université de Neuchâtel

1. Dimensione coomologica e rango aritmetico

Dimensione coomologica e rango aritmetico di alcune varietà determinantali

1. Dimensione coomologica e rango aritmetico
2. Varietà determinantali

Dimensione coomologica e rango aritmetico di alcune varietà determinantali

1. Dimensione coomologica e rango aritmetico
2. Varietà determinantali
3. Dimensione coomologica e rango aritmetico di *alcune* varietà determinantali

Part I

Dimensione coomologica e rango aritmetico

Notazioni

$K = \bar{K}$ campo, $R = K[x_0, \ldots, x_N]$ anello di polinomi,
$\mathbb{P}^N := \mathbb{P}^N(K)$ spazio proiettivo su K.

Notazioni

$K = \bar{K}$ campo, $R = K[x_0, \ldots, x_N]$ anello di polinomi,
$\mathbb{P}^N := \mathbb{P}^N(K)$ spazio proiettivo su K.
Dato $Y \subseteq \mathbb{P}^N$, denotiamo con $\mathcal{I}_+(Y)$ l'ideale omogeneo associato:

$$\mathcal{I}_+(Y) := \{f \in R : \ f \text{ è omogeneo e } \ f(P) = 0 \ \forall P \in Y\}$$

Notazioni

$K = \bar{K}$ campo, $R = K[x_0, \ldots, x_N]$ anello di polinomi,
$\mathbb{P}^N := \mathbb{P}^N(K)$ spazio proiettivo su K.
Dato $Y \subseteq \mathbb{P}^N$, denotiamo con $\mathcal{I}_+(Y)$ l'ideale omogeneo associato:

$$\mathcal{I}_+(Y) := \{f \in R : \ f \text{ è omogeneo e } \ f(P) = 0 \ \forall P \in Y\}$$

Viceversa, dato $I \subseteq R$ ideale omogeneo, consideriamo l'**insieme algebrico proiettivo** associato

$$X := \mathcal{V}_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^N : \ f(P) = 0 \ \forall f \in I\}.$$

Notazioni

$K = \bar{K}$ campo, $R = K[x_0, \ldots, x_N]$ anello di polinomi,
$\mathbb{P}^N := \mathbb{P}^N(K)$ spazio proiettivo su K.
Dato $Y \subseteq \mathbb{P}^N$, denotiamo con $\mathcal{I}_+(Y)$ l'ideale omogeneo associato:

$$\mathcal{I}_+(Y) := \{f \in R : \; f \text{ è omogeneo e } \; f(P) = 0 \; \forall P \in Y\}$$

Viceversa, dato $I \subseteq R$ ideale omogeneo, consideriamo l'**insieme algebrico proiettivo** associato

$$X := \mathcal{V}_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^N : \; f(P) = 0 \; \forall f \in I\}.$$

Grazie al *Basissatz* di Hilbert, l'ideale I è generato da un numero finito di polinomi (omogenei). Cioè X è intersezione di un numero finito di ipersuperfici in $\mathbb{P}^N$.

Notazioni

$K = \bar{K}$ campo, $R = K[x_0, \ldots, x_N]$ anello di polinomi,
$\mathbb{P}^N := \mathbb{P}^N(K)$ spazio proiettivo su K.
Dato $Y \subseteq \mathbb{P}^N$, denotiamo con $\mathcal{I}_+(Y)$ l'ideale omogeneo associato:

$$\mathcal{I}_+(Y) := \{f \in R : \ f \text{ è omogeneo e } \ f(P) = 0 \ \forall P \in Y\}$$

Viceversa, dato $I \subseteq R$ ideale omogeneo, consideriamo l'**insieme algebrico proiettivo** associato

$$X := \mathcal{V}_+(I) = \{P \in \mathbb{P}^N : \ f(P) = 0 \ \forall f \in I\}.$$

Grazie al *Basissatz* di Hilbert, l'ideale I è generato da un numero finito di polinomi (omogenei). Cioè X è intersezione di un numero finito di ipersuperfici in $\mathbb{P}^N$.

Domanda

Qual è il minimo numero di ipersuperfici necessarie?

Rango aritmetico

Il **rango aritmetico** di un insieme algebrico proiettivo X in $\mathbb{P}^N$ è

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) := \min\{r : \ \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei } \quad \text{t.c. } X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)\}$$

Rango aritmetico

Il **rango aritmetico** di un insieme algebrico proiettivo X in $\mathbb{P}^N$ è

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) := \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei } \quad \text{t.c. } X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)\}$$

- Per il *Nullstellensatz* di Hilbert si ha che

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) = \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei} \\ \text{t.c. } \sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}\}.$$

Rango aritmetico

Il **rango aritmetico** di un insieme algebrico proiettivo X in $\mathbb{P}^N$ è

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) := \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei} \quad \text{t.c. } X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)\}$$

- Per il *Nullstellensatz* di Hilbert si ha che

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) = \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei} \\ \text{t.c. } \sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}\}.$$

- Per l'*Hauptidealsatz* di Krull si ha che

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) \geq \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X).$$

Rango aritmetico

Il **rango aritmetico** di un insieme algebrico proiettivo X in $\mathbb{P}^N$ è

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) := \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei } \quad \text{t.c. } X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)\}$$

- Per il *Nullstellensatz* di Hilbert si ha che

$$\begin{aligned} \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) = \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei} \\ \text{t.c. } \sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}\}. \end{aligned}$$

- Per l'*Hauptidealsatz* di Krull si ha che

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) \geq \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X).$$

Se vale $=$ nell'ultima uguaglianza si dice che X è **intersezione completa insiemistica**.

Rango aritmetico

Il **rango aritmetico** di un insieme algebrico proiettivo X in $\mathbb{P}^N$ è

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) := \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei} \quad \text{t.c. } X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)\}$$

- Per il *Nullstellensatz* di Hilbert si ha che

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) = \min\{r : \exists f_1, \ldots, f_r \in R \text{ omogenei} \\ \text{t.c. } \sqrt{I} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}\}.$$

- Per l'*Hauptidealsatz* di Krull si ha che

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) \geq \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X).$$

Se vale $=$ nell'ultima uguaglianza si dice che X è **intersezione completa insiemistica**.
Invece se $\mathcal{I}_+(X)$ è generato da $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X)$ equazioni, si dice che X è **intersezione completa (stretta)**.

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x, y, z, w]$.

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$,
$\nu([t, u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x, y, z, w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x, y, z, w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.
Inoltre si prova che I non può essere generato da 2 elementi, quindi $\mathcal{C}$ **non è intersezione completa (stretta)**.

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$,
$\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x, y, z, w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.
Inoltre si prova che I non può essere generato da 2 elementi,
quindi $\mathcal{C}$ **non è intersezione completa (stretta)**.
Sia $J = (x^2 - yw, y^3 + wz^2 - 2xyz)$. Abbiamo

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$,
$\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x,y,z,w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.
Inoltre si prova che I non può essere generato da 2 elementi,
quindi $\mathcal{C}$ **non è intersezione completa (stretta)**.
Sia $J = (x^2 - yw, y^3 + wz^2 - 2xyz)$. Abbiamo

$$(xy - zw)^2 = w(y^3 + wz^2 - 2xyz) + y^2(x^2 - yw)$$
$$(y^2 - xz)^2 = y(y^3 + wz^2 - 2xyz) + z^2(x^2 - yw).$$

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$,
$\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x, y, z, w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.
Inoltre si prova che I non può essere generato da 2 elementi, quindi $\mathcal{C}$ **non è intersezione completa (stretta)**.
Sia $J = (x^2 - yw, y^3 + wz^2 - 2xyz)$. Abbiamo

$$(xy - zw)^2 = w(y^3 + wz^2 - 2xyz) + y^2(x^2 - yw)$$
$$(y^2 - xz)^2 = y(y^3 + wz^2 - 2xyz) + z^2(x^2 - yw).$$

Pertanto $I \subseteq \sqrt{J}$, e quindi anche $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$. Poi

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$,
$\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x,y,z,w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.
Inoltre si prova che I non può essere generato da 2 elementi, quindi $\mathcal{C}$ **non è intersezione completa (stretta)**.
Sia $J = (x^2 - yw, y^3 + wz^2 - 2xyz)$. Abbiamo

$$(xy - zw)^2 = w(y^3 + wz^2 - 2xyz) + y^2(x^2 - yw)$$
$$(y^2 - xz)^2 = y(y^3 + wz^2 - 2xyz) + z^2(x^2 - yw).$$

Pertanto $I \subseteq \sqrt{J}$, e quindi anche $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$. Poi

$$y^3 + wz^2 - 2xyz = y(y^2 - xz) - z(xy - zw).$$

Un esempio: la *twisted cubic curve*

Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{P}^3$ immagine della mappa $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$,
$\nu([t,u]) = [tu^2, t^2u, t^3, u^3] = [x,y,z,w]$.
Si vede facilmente che $I := \mathcal{I}_+(\mathcal{C}) = (xy - zw, x^2 - yw, y^2 - xz)$.
Inoltre si prova che I non può essere generato da 2 elementi, quindi $\mathcal{C}$ **non è intersezione completa (stretta)**.
Sia $J = (x^2 - yw, y^3 + wz^2 - 2xyz)$. Abbiamo

$$(xy - zw)^2 = w(y^3 + wz^2 - 2xyz) + y^2(x^2 - yw)$$
$$(y^2 - xz)^2 = y(y^3 + wz^2 - 2xyz) + z^2(x^2 - yw).$$

Pertanto $I \subseteq \sqrt{J}$, e quindi anche $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$. Poi

$$y^3 + wz^2 - 2xyz = y(y^2 - xz) - z(xy - zw).$$

Perciò $J \subseteq I$, da cui segue $\sqrt{J} = \sqrt{I}$.
Ne concludiamo che $\mathcal{C}$ **è intersezione completa insiemistica**.

Alcuni risultati su $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X$

Un facile upper bound per $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X$ è dato da $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N + 1$.

Alcuni risultati su $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X$

Un facile upper bound per $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X$ è dato da $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N+1$.
Più difficile è il seguente risultato

Teorema (Eisenbud-Evans, 1972)

Per ogni insieme algebrico $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^N$ si ha

$$\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N$$

Alcuni risultati su $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X$

Un facile upper bound per $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X$ è dato da $\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N + 1$.
Più difficile è il seguente risultato

Teorema (Eisenbud-Evans, 1972)

Per ogni insieme algebrico $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^N$ si ha

$$\operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N$$

Si può fare di meglio?

Alcuni risultati su $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X$

Un facile upper bound per $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X$ è dato da $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N + 1$.
Più difficile è il seguente risultato

Teorema (Eisenbud-Evans, 1972)

Per ogni insieme algebrico $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^N$ si ha

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N$$

Si può fare di meglio? Non senza ulteriori ipotesi...

Teorema (Faltings, 1980)

Se $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ è un insieme algebrico irriducibile di dimensione d, e $X \subseteq \mathbb{P}^N$ è il luogo di zeri di $< d$ polinomi, allora $X \cap Y$ è connessa. In particolare, $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X < N \implies X$ connessa.

Alcuni risultati su $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X$

Un facile upper bound per $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X$ è dato da $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N+1$.
Più difficile è il seguente risultato

Teorema (Eisenbud-Evans, 1972)

Per ogni insieme algebrico $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^N$ si ha

$$\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N$$

Si può fare di meglio? Non senza ulteriori ipotesi...

Teorema (Faltings, 1980)

Se $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ è un insieme algebrico irriducibile di dimensione d, e $X \subseteq \mathbb{P}^N$ è il luogo di zeri di $< d$ polinomi, allora $X \cap Y$ è connessa. In particolare, $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X < N \implies X$ connessa.

Domanda: $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^N$ insieme algebrico irriducibile e connesso, allora $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X < N$?

L'importanza di un lower bound

Esempio (Hartshorne, 1979)

Sia $d \geq 4$. La curva liscia razionale di grado d

$$\mathcal{C} := \{[tu^{d-1}, t^{d-1}u, t^d, u^d] : \; [t, u] \in \mathbb{P}^1\}$$

è intersezione completa insiemistica in $\mathbb{P}^3$ se $\mathrm{char} K > 0$.

L'importanza di un lower bound

Esempio (Hartshorne, 1979)

Sia $d \geq 4$. La curva liscia razionale di grado d

$$\mathcal{C} := \{[tu^{d-1}, t^{d-1}u, t^d, u^d] : \ [t, u] \in \mathbb{P}^1\}$$

è intersezione completa insiemistica in $\mathbb{P}^3$ se $\mathrm{char} K > 0$.
Vale anche in caratteristica 0?

L'importanza di un lower bound

Esempio (Hartshorne, 1979)

Sia $d \geq 4$. La curva liscia razionale di grado d

$$\mathcal{C} := \{[tu^{d-1}, t^{d-1}u, t^d, u^d] : \ [t, u] \in \mathbb{P}^1\}$$

è intersezione completa insiemistica in $\mathbb{P}^3$ se $\mathrm{char} K > 0$.
Vale anche in caratteristica 0? Problema aperto.

L'importanza di un lower bound

Esempio (Hartshorne, 1979)

Sia $d \geq 4$. La curva liscia razionale di grado d

$$\mathcal{C} := \{[tu^{d-1}, t^{d-1}u, t^d, u^d] : \ [t, u] \in \mathbb{P}^1\}$$

è intersezione completa insiemistica in $\mathbb{P}^3$ se $\mathrm{char} K > 0$.
Vale anche in caratteristica 0? Problema aperto.

Finora sappiamo che

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X \leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N,$$

ma la prima disuguaglianza è spesso molto distante dall'essere ottimale.

L'importanza di un lower bound

Esempio (Hartshorne, 1979)

Sia $d \geq 4$. La curva liscia razionale di grado d

$$\mathcal{C} := \{[tu^{d-1}, t^{d-1}u, t^d, u^d] : \ [t, u] \in \mathbb{P}^1\}$$

è intersezione completa insiemistica in $\mathbb{P}^3$ se $\operatorname{char} K > 0$.
Vale anche in caratteristica 0? Problema aperto.

Finora sappiamo che

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N} X \leq \operatorname{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N,$$

ma la prima disuguaglianza è spesso molto distante dall'essere ottimale. Un lower bound migliore è dato dalla **dimensione coomologica**.

Dimensione coomologica

Sia $U \subseteq \mathbb{P}^N$, la **dimensione coomologica** di U è

$\mathrm{cd}(U) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \, \forall \mathcal{F}$ fascio coerente e $\forall i > n\}$.

Dimensione coomologica

Sia $U \subseteq \mathbb{P}^N$, la **dimensione coomologica** di U è

$\mathrm{cd}(U) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \, \forall \mathcal{F}$ fascio coerente e $\forall i > n\}$.

Se $X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)$, allora l'aperto

$$\mathbb{P}^N \setminus X = U(f_1) \cup \cdots \cup U(f_r)$$

è unione di aperti affini $U_i = U(f_i)$.

Dimensione coomologica

Sia $U \subseteq \mathbb{P}^N$, la **dimensione coomologica** di U è

$\mathrm{cd}(U) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \, \forall \mathcal{F}$ fascio coerente e $\forall i > n\}$.

Se $X = \mathcal{V}_+(f_1, \dots, f_r)$, allora l'aperto

$$\mathbb{P}^N \setminus X = U(f_1) \cup \cdots \cup U(f_r)$$

è unione di aperti affini $U_i = U(f_i)$.
Scrivendo il complesso di Čech relativo a $\mathbb{P}^N \setminus X = \bigcup_i U_i$ si ottiene

$$H^i(\mathbb{P}^N \setminus X, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $i \geq r$ ed ogni fascio coerente $\mathcal{F}$.

Dimensione coomologica

Sia $U \subseteq \mathbb{P}^N$, la **dimensione coomologica** di U è

$\mathrm{cd}(U) := \min\{n \in \mathbb{N} :\ H^i(U, \mathcal{F}) = 0\ \forall \mathcal{F}$ fascio coerente e $\forall i > n\}$.

Se $X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)$, allora l'aperto

$$\mathbb{P}^N \setminus X = U(f_1) \cup \cdots \cup U(f_r)$$

è unione di aperti affini $U_i = U(f_i)$.
Scrivendo il complesso di Čech relativo a $\mathbb{P}^N \setminus X = \bigcup_i U_i$ si ottiene

$$H^i(\mathbb{P}^N \setminus X, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $i \geq r$ ed ogni fascio coerente $\mathcal{F}$. Pertanto si ha

$$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X) + 1 \leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X$$

Dimensione coomologica

Sia $U \subseteq \mathbb{P}^N$, la **dimensione coomologica** di U è

$\mathrm{cd}(U) := \min\{n \in \mathbb{N} : \; H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \; \forall \mathcal{F}$ fascio coerente e $\forall i > n\}$.

Se $X = \mathcal{V}_+(f_1, \ldots, f_r)$, allora l'aperto

$$\mathbb{P}^N \setminus X = U(f_1) \cup \cdots \cup U(f_r)$$

è unione di aperti affini $U_i = U(f_i)$.
Scrivendo il complesso di Čech relativo a $\mathbb{P}^N \setminus X = \bigcup_i U_i$ si ottiene

$$H^i(\mathbb{P}^N \setminus X, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $i \geq r$ ed ogni fascio coerente $\mathcal{F}$. Pertanto si ha

$$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X) + 1 \leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X$$

Analogamente si vede che $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) \leq \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X) + 1$.

Dimensione coomologica

Sia $U \subseteq \mathbb{P}^N$, la **dimensione coomologica** di U è

$$\mathrm{cd}(U) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \ \forall \mathcal{F} \text{ fascio coerente e } \forall i > n\}.$$

Se $X = \mathcal{V}_+(f_1, \dots, f_r)$, allora l'aperto

$$\mathbb{P}^N \setminus X = U(f_1) \cup \cdots \cup U(f_r)$$

è unione di aperti affini $U_i = U(f_i)$.
Scrivendo il complesso di Čech relativo a $\mathbb{P}^N \setminus X = \bigcup_i U_i$ si ottiene

$$H^i(\mathbb{P}^N \setminus X, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni $i \geq r$ ed ogni fascio coerente $\mathcal{F}$.
In definitiva abbiamo

$$\boxed{\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) \leq \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X) + 1 \leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N} X \leq N}$$

Part II

Varietà determinantali

Varietà determinantali: notazioni

Sia M una matrice di taglia $m \times n$, le cui entrate sono polinomi omogenei di grado fissato, e sia $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$. Denotiamo con $I_t(M)$ l'ideale generato dai minori di taglia t di M.
$X = \mathcal{V}_+(I_t(M)) \subseteq \mathbb{P}^N$ è detta **varietà determinantale**.

Varietà determinantali: notazioni

Sia M una matrice di taglia $m \times n$, le cui entrate sono polinomi omogenei di grado fissato, e sia $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$. Denotiamo con $I_t(M)$ l'ideale generato dai minori di taglia t di M.
$X = \mathcal{V}_+(I_t(M)) \subseteq \mathbb{P}^N$ è detta **varietà determinantale**.

Esempio: Threefold di Segre

Il threefold di Segre $\Sigma_{2,1}$ in $\mathbb{P}^5$ è dato da $\Sigma_{2,1} = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ con

$$M = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

Infatti, $I_2(M) = (z_0z_4 - z_1z_3,\ z_0z_3 - z_2z_5,\ z_0z_5 - z_3z_5)$.

Varietà determinantali: notazioni

Sia M una matrice di taglia $m \times n$, le cui entrate sono polinomi omogenei di grado fissato, e sia $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$. Denotiamo con $I_t(M)$ l'ideale generato dai minori di taglia t di M.
$X = \mathcal{V}_+(I_t(M)) \subseteq \mathbb{P}^N$ è detta **varietà determinantale**.

Esempio: Threefold di Segre

Il threefold di Segre $\Sigma_{2,1}$ in $\mathbb{P}^5$ è dato da $\Sigma_{2,1} = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ con

$$M = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

Infatti, $I_2(M) = (z_0z_4 - z_1z_3,\ z_0z_3 - z_2z_5,\ z_0z_5 - z_3z_5)$.
Chiaramente si ha

$$2 = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}^5}(\Sigma_{2,1}) \leq \operatorname{ara}_{\mathbb{P}^5}(\Sigma_{2,1}) \leq 3.$$

È possibile trovare due equazioni che definiscono $\Sigma_{2,1}$?

Varietà determinantali: notazioni

Sia M una matrice di taglia $m \times n$, le cui entrate sono polinomi omogenei di grado fissato, e sia $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$. Denotiamo con $I_t(M)$ l'ideale generato dai minori di taglia t di M.
$X = \mathcal{V}_+(I_t(M)) \subseteq \mathbb{P}^N$ è detta **varietà determinantale**.

Esempio: Threefold di Segre

Il threefold di Segre $\Sigma_{2,1}$ in $\mathbb{P}^5$ è dato da $\Sigma_{2,1} = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ con

$$M = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

Infatti, $I_2(M) = (z_0 z_4 - z_1 z_3,\ z_0 z_3 - z_2 z_5,\ z_0 z_5 - z_3 z_5)$.
Chiaramente si ha

$$2 = \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^5}(\Sigma_{2,1}) \leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^5}(\Sigma_{2,1}) \leq 3.$$

È possibile trovare due equazioni che definiscono $\Sigma_{2,1}$? In questo caso no, si ha $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^5 \setminus \Sigma_{2,1}) = 2$, perciò $\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^5}\Sigma_{2,1} = 3$.

Matrice generica

Sia $R = K[x_{i,j}]$ anello di polinomi in $m \times n$ variabili su un campo K, e sia M una matrice generica di indeterminate $M = (x_{i,j})$. Per ogni $2 \leq t \leq \min\{m, n\}$ consideriamo la varietà determinantale $X_t = \mathcal{V}_+(I_t(M))$ in $\mathbb{P}^N$, con $N = mn - 1$.

Matrice generica

Sia $R = K[x_{i,j}]$ anello di polinomi in $m \times n$ variabili su un campo K, e sia M una matrice generica di indeterminate $M = (x_{i,j})$. Per ogni $2 \leq t \leq \min\{m, n\}$ consideriamo la varietà determinantale $X_t = \mathcal{V}_+(I_t(M))$ in $\mathbb{P}^N$, con $N = mn - 1$.

Teorema (Bruns-Schwänzl, 1990)

Il rango aritmetico di X_t è $\mathrm{ara}(X_t) = mn - t^2 + 1$.

Matrice generica

Sia $R = K[x_{i,j}]$ anello di polinomi in $m \times n$ variabili su un campo K, e sia M una matrice generica di indeterminate $M = (x_{i,j})$. Per ogni $2 \leq t \leq \min\{m, n\}$ consideriamo la varietà determinantale $X_t = \mathcal{V}_+(I_t(M))$ in $\mathbb{P}^N$, con $N = mn - 1$.

Teorema (Bruns-Schwänzl, 1990)

Il rango aritmetico di X_t è $\mathrm{ara}(X_t) = mn - t^2 + 1$.
La dimensione coomologica di $\mathbb{P}^N \setminus X_t$ dipende dalla caratteristica di K:

- *Se* $\mathrm{char} K = 0$, $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) = mn - t^2$
- *Se* $\mathrm{char} K > 0$,

$$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) = (m - t + 1)(n - t + 1) - 1$$

Matrice generica

Sia $R = K[x_{i,j}]$ anello di polinomi in $m \times n$ variabili su un campo K, e sia M una matrice generica di indeterminate $M = (x_{i,j})$. Per ogni $2 \leq t \leq \min\{m, n\}$ consideriamo la varietà determinantale $X_t = \mathcal{V}_+(I_t(M))$ in $\mathbb{P}^N$, con $N = mn - 1$.

Teorema (Bruns-Schwänzl, 1990)

Il rango aritmetico di X_t è $\mathrm{ara}(X_t) = mn - t^2 + 1$.
La dimensione coomologica di $\mathbb{P}^N \setminus X_t$ dipende dalla caratteristica di K:

- *Se* $\mathrm{char} K = 0$, $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) = mn - t^2 = \mathrm{ara}(X_t) - 1$;
- *Se* $\mathrm{char} K > 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) &= (m - t + 1)(n - t + 1) - 1 \\ &= \mathrm{codim}(X_t) - 1.\end{aligned}$$

Sezione iperpiana

Sia $\mathrm{char} K = 0$ e consideriamo l'intersezione di X_t con un iperpiano H di equazione $x_{i,j} = 0$, $X'_t := X_t \cap H$.

Sezione iperpiana

Sia $\mathrm{char} K = 0$ e consideriamo l'intersezione di X_t con un iperpiano H di equazione $x_{i,j} = 0$, $X_t' := X_t \cap H$.

Teorema (Lyubeznik-Singh-Walther, 2015)

$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t') = \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) - 1.$

Sezione iperpiana

Sia $\mathrm{char} K = 0$ e consideriamo l'intersezione di X_t con un iperpiano H di equazione $x_{i,j} = 0$, $X'_t := X_t \cap H$.

Teorema (Lyubeznik-Singh-Walther, 2015)

$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X'_t) = \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) - 1.$

D1: Cala anche il rango aritmetico?

Sezione iperpiana

Sia $\mathrm{char} K = 0$ e consideriamo l'intersezione di X_t con un iperpiano H di equazione $x_{i,j} = 0$, $X'_t := X_t \cap H$.

Teorema (Lyubeznik-Singh-Walther, 2015)

$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X'_t) = \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) - 1.$

D1: Cala anche il rango aritmetico?

Esempio (Barile)

Consideriamo il threefold di Segre $\Sigma_{2,1}$ intersecato l'iperpiano $z_2 = 0$. Cioè $X'_2 := \mathcal{V}_+(I_2(M'))$ dove

$$M' = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & 0 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

Sezione iperpiana

Sia $\mathrm{char} K = 0$ e consideriamo l'intersezione di X_t con un iperpiano H di equazione $x_{i,j} = 0$, $X'_t := X_t \cap H$.

Teorema (Lyubeznik-Singh-Walther, 2015)

$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X'_t) = \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) - 1.$

D1: Cala anche il rango aritmetico?

Esempio (Barile)

Consideriamo il threefold di Segre $\Sigma_{2,1}$ intersecato l'iperpiano $z_2 = 0$. Cioè $X'_2 := \mathcal{V}_+(I_2(M'))$ dove

$$M' = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & 0 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\sqrt{I_2(M')} = \sqrt{(q_1, q_2)}$, dove $q_1 = z_4(z_0 z_4 + z_1 z_3) + z_1 z_5$ e $q_2 = z_3(z_0 z_4 + z_1 z_3) - z_0 z_5$.

Sezione iperpiana

Sia $\mathrm{char} K = 0$ e consideriamo l'intersezione di X_t con un iperpiano H di equazione $x_{i,j} = 0$, $X'_t := X_t \cap H$.

Teorema (Lyubeznik-Singh-Walther, 2015)

$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X'_t) = \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_t) - 1.$

D1: Cala anche il rango aritmetico?

Esempio (Barile)

Consideriamo il threefold di Segre $\Sigma_{2,1}$ intersecato l'iperpiano $z_2 = 0$. Cioè $X'_2 := \mathcal{V}_+(I_2(M'))$ dove

$$M' = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & 0 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\sqrt{I_2(M')} = \sqrt{(q_1, q_2)}$, dove $q_1 = z_4(z_0 z_4 + z_1 z_3) + z_1 z_5$ e $q_2 = z_3(z_0 z_4 + z_1 z_3) - z_0 z_5$.
In particolare $\mathrm{ara} X'_2 = 2 < 3 = \mathrm{ara}\Sigma_{2,1}$.

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \ldots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right),$$

dove $x_{i,j}$ sono $N+1$ variabili indipendenti in un anello di polinomi $R = K[x_{i,j}]$ su un campo K algebricamente chiuso.

Rational normal scrolls

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \ldots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right),$$

dove $x_{i,j}$ sono $N+1$ variabili indipendenti in un anello di polinomi $R = K[x_{i,j}]$ su un campo K algebricamente chiuso.
La varietà $S_{n_1,\ldots,n_g} := \mathcal{V}_+(I_2(M))$ è detta **rational normal scroll** di dimensione g in $\mathbb{P}^N$.

Rational normal scrolls

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \ldots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right),$$

dove $x_{i,j}$ sono $N+1$ variabili indipendenti in un anello di polinomi $R = K[x_{i,j}]$ su un campo K algebricamente chiuso.
La varietà $S_{n_1,\ldots,n_g} := \mathcal{V}_+(I_2(M))$ è detta **rational normal scroll** di dimensione g in $\mathbb{P}^N$.

Teorema (Bădescu-Valla, 2010)

Il rango aritmetico di $S_{n_1,\ldots,n_g}$ *è*

$$\mathrm{ara} S_{n_1,\ldots,n_g} = N - 2.$$

Rational normal scrolls

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \ldots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right),$$

dove $x_{i,j}$ sono $N+1$ variabili indipendenti in un anello di polinomi $R = K[x_{i,j}]$ su un campo K algebricamente chiuso.
La varietà $S_{n_1,\ldots,n_g} := \mathcal{V}_+(I_2(M))$ è detta **rational normal scroll** di dimensione g in $\mathbb{P}^N$.

Teorema (Bădescu-Valla, 2010)

Il rango aritmetico di $S_{n_1,\ldots,n_g}$ è

$$\mathrm{ara} S_{n_1,\ldots,n_g} = N - 2.$$

D2: Quanto vale $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus S_{n_1,\ldots,n_g})$? Dipende da $\mathrm{char} K$?

Part III

Dimensione coomologica e rango aritmetico di alcune varietà determinantali

Matrici $2 \times N$ di forme lineari

Siano K un campo algebricamente chiuso e R un anello dei polinomi. Sia $M = (\ell_{i,j})$ **una matrice** $2 \times N$ **di forme lineari** $\ell_{i,j} \in R_1$.

Matrici $2 \times N$ di forme lineari

Siano K un campo algebricamente chiuso e R un anello dei polinomi. Sia $M = (\ell_{i,j})$ **una matrice** $2 \times N$ **di forme lineari** $\ell_{i,j} \in R_1$. Allora esistono due matrici invertibili tali C, C' tali che $M' = CMC'$ sia una concatenazione di tre tipi di blocchi

$$M' = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g} \right).$$

Matrici $2 \times N$ di forme lineari

Siano K un campo algebricamente chiuso e R un anello dei polinomi. Sia $M = (\ell_{i,j})$ **una matrice** $2 \times N$ **di forme lineari** $\ell_{i,j} \in R_1$. Allora esistono due matrici invertibili tali C, C' tali che $M' = CMC'$ sia una concatenazione di tre tipi di blocchi

$$M' = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g} \right).$$

Blocco nilpotente di lunghezza $n+1$

$$N_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Matrici $2 \times N$ di forme lineari

Siano K un campo algebricamente chiuso e R un anello dei polinomi. Sia $M = (\ell_{i,j})$ **una matrice** $2 \times N$ **di forme lineari** $\ell_{i,j} \in R_1$. Allora esistono due matrici invertibili tali C, C' tali che $M' = CMC'$ sia una concatenazione di tre tipi di blocchi

$$M' = \left(N_{n_1}|\cdots|N_{n_c}|J_{\lambda_1,m_1}|\cdots|J_{\lambda_d,m_d}|B_{\ell_1}|\cdots|B_{\ell_g}\right).$$

Blocco nilpotente di lunghezza $n+1$

$$N_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Blocco Jordan di lunghezza m e autovalore $\lambda \in K$

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \lambda y_1 & y_1 + \lambda y_2 & \cdots & y_{m-1} + \lambda y_m \end{pmatrix}.$$

Matrici $2 \times N$ di forme lineari

Siano K un campo algebricamente chiuso e R un anello dei polinomi. Sia $M = (\ell_{i,j})$ **una matrice** $2 \times N$ **di forme lineari** $\ell_{i,j} \in R_1$. Allora esistono due matrici invertibili tali C, C' tali che $M' = CMC'$ sia una concatenazione di tre tipi di blocchi

$$M' = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g} \right).$$

Blocco nilpotente di lunghezza $n+1$

$$N_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Blocco Jordan di lunghezza m e autovalore $\lambda \in K$

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \lambda y_1 & y_1 + \lambda y_2 & \cdots & y_{m-1} + \lambda y_m \end{pmatrix}.$$

Blocco scroll di lunghezza ℓ

$$B_\ell = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \cdots & z_{\ell-2} & z_{\ell-1} \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_{\ell-1} & z_\ell \end{pmatrix}.$$

Decomposizione di Kronecker-Weierstraß

$M' = CMC' = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g} \right)$
è detta **forma normale di Kronecker-Weierstraß** di M.

Decomposizione di Kronecker-Weierstraß

$M' = CMC' = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g} \right)$
è detta **forma normale di Kronecker-Weierstraß** di M.
Siccome C e C' sono invertibili si ha che $I_2(M) = I_2(M')$. Pertanto d'ora in poi ci concentreremo su matrici nella forma di K-W.

Decomposizione di Kronecker-Weierstraß

$M' = CMC' = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g}\right)$
è detta **forma normale di Kronecker-Weierstraß** di M.
Siccome C e C' sono invertibili si ha che $I_2(M) = I_2(M')$. Pertanto d'ora in poi ci concentreremo su matrici nella forma di K-W.

Esempi

- Una matrice $2 \times n$ di indeterminate $M = (x_{i,j})$ è una concatenazione di n blocchi scroll di lunghezza 1.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_3 & \cdots & x_{2n-1} \\ x_2 & x_4 & \cdots & x_{2n} \end{array}\right).$$

Decomposizione di Kronecker-Weierstraß

$$M' = CMC' = \left(N_{n_1}|\cdots|N_{n_c}|J_{\lambda_1,m_1}|\cdots|J_{\lambda_d,m_d}|B_{\ell_1}|\cdots|B_{\ell_g}\right)$$

è detta **forma normale di Kronecker-Weierstraß** di M.
Siccome C e C' sono invertibili si ha che $I_2(M) = I_2(M')$. Pertanto d'ora in poi ci concentreremo su matrici nella forma di K-W.

Esempi

- Una matrice $2 \times n$ di indeterminate $M = (x_{i,j})$ è una concatenazione di n blocchi scroll di lunghezza 1.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_3 & \cdots & x_{2n-1} \\ x_2 & x_4 & \cdots & x_{2n} \end{array}\right).$$

- La *rational normal scroll* $S_{n_1,\ldots,n_g}$ è concatenazione di g blocchi scroll di lunghezza $n_1, \ldots, n_g$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array}\right).$$

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \ldots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \ldots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla quinta e la quarta dalla sesta

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \ldots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla quinta e la quarta dalla sesta

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \ldots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla quinta e la quarta dalla sesta

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla terza e la quinta dalla prima

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \ldots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla quinta e la quarta dalla sesta

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla terza e la quinta dalla prima

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \dots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla quinta e la quarta dalla sesta

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla terza e la quinta dalla prima

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Aggiungiamo la prima riga alla seconda e otteniamo

Un esempio di decomposizione

Consideriamo la seguente matrice di forme lineari in $K[x_1, \dots, x_6]$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_2 + x_6 & x_4 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & x_1 - x_6 & -x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla quinta e la quarta dalla sesta

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_6 & x_2 & x_2 + x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ -x_6 & x_1 & x_1 - x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo la seconda colonna dalla terza e la quinta dalla prima

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_3 + x_4 & -x_4 + x_5 & -x_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Aggiungiamo la prima riga alla seconda e otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 \\ x_1 & x_1 + x_2 & x_4 & x_5 & 0 & x_6 \end{array}\right),$$

che è una concatenazione di un blocco Jordan $J_{1,2}$ di lunghezza 2 e autovalore 1, un blocco scroll B_2 di lunghezza 2 e un blocco nilpotente N_2 di lunghezza 2.

Teorema (Nejad, Zaare-Nahandi, 2011)

Sia $M = \left(N_{n_1}|\cdots|N_{n_c}|J_{\lambda_1,m_1}|\cdots|J_{\lambda_d,m_d}|B_{\ell_1}|\cdots|B_{\ell_g}\right)$, e sia $X = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ la corrispondente varietà in $\mathbb{P}^N$.

Teorema (Nejad, Zaare-Nahandi, 2011)

Sia $M = \left(N_{n_1} | \cdots | N_{n_c} | J_{\lambda_1, m_1} | \cdots | J_{\lambda_d, m_d} | B_{\ell_1} | \cdots | B_{\ell_g} \right)$, e sia $X = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ la corrispondente varietà in $\mathbb{P}^N$.

1. Se M consiste di $c \geq 1$ blocchi nilpotenti, allora $\sqrt{I_2(M)}$ è l'ideale massimale irrilevante.

Teorema (Nejad, Zaare-Nahandi, 2011)

Sia $M = \left(N_{n_1}|\cdots|N_{n_c}|J_{\lambda_1,m_1}|\cdots|J_{\lambda_d,m_d}|B_{\ell_1}|\cdots|B_{\ell_g}\right)$, e sia $X = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ la corrispondente varietà in $\mathbb{P}^N$.

1. Se M consiste di $c \geq 1$ blocchi nilpotenti, allora $\sqrt{I_2(M)}$ è l'ideale massimale irrilevante.
2. Se M ha $c \geq 0$ blocchi nilpotenti e $g \geq 1$ blocchi scroll, allora

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) = \sum_{i=1}^{c} n_i + \sum_{p=1}^{g} \ell_p - 1 = N - g.$$

Teorema (Nejad, Zaare-Nahandi, 2011)

Sia $M = \left(N_{n_1}|\cdots|N_{n_c}|J_{\lambda_1,m_1}|\cdots|J_{\lambda_d,m_d}|B_{\ell_1}|\cdots|B_{\ell_g}\right)$, e sia $X = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ la corrispondente varietà in $\mathbb{P}^N$.

1. Se M consiste di $c \geq 1$ blocchi nilpotenti, allora $\sqrt{I_2(M)}$ è l'ideale massimale irrilevante.
2. Se M ha $c \geq 0$ blocchi nilpotenti e $g \geq 1$ blocchi scroll, allora
$$\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) = \sum_{i=1}^{c} n_i + \sum_{p=1}^{g} \ell_p - 1 = N - g.$$
3. Se M consiste di $c \geq 0$ blocchi nilpotenti, $g \geq 0$ blocchi scroll e $d \geq 1$ blocchi Jordan, allora
$$\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) = \sum_{i=1}^{c} n_i + \sum_{p=1}^{g} \ell_p + \sum_{j=1}^{d} m_j - \gamma = N + 1 - g - \gamma,$$
dove γ è il massimo numero di blocchi Jordan con lo stesso autovalore.

La dimensione coomologica delle scroll

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \ldots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right).$$

Consideriamo la *rational normal scroll* $S_{n_1,\ldots,n_g} := \mathcal{V}_+(I_2(M))$ di dimensione g in $\mathbb{P}^N$.

La dimensione coomologica delle scroll

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \dots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right).$$

Consideriamo la *rational normal scroll* $S_{n_1,\dots,n_g} := \mathcal{V}_+(I_2(M))$ di dimensione g in $\mathbb{P}^N$.

Teorema (B-MM, 2015)

La dimensione coomologica di $S_{n_1,\dots,n_g}$ è $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus S_{n_1,\dots,n_g}) =$

$$\begin{cases} \mathrm{codim}(S_{n_1,\dots,n_g}) - 1 = N - g - 1 & \textit{se } \mathrm{char}(K) > 0 \\ \mathrm{ara}(S_{n_1,\dots,n_g}) - 1 = N - 3 & \textit{se } \mathrm{char}(K) = 0 \end{cases}$$

La dimensione coomologica delle scroll

Siano $g \geq 2$, e $n_1, \ldots, n_g > 0$ interi e sia

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_1-1} & \cdots & x_{g,0} & x_{g,1} & \cdots & x_{g,n_g-1} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & \cdots & x_{g,1} & x_{g,2} & \cdots & x_{g,n_g} \end{array} \right).$$

Consideriamo la *rational normal scroll* $S_{n_1,\ldots,n_g} := \mathcal{V}_+(I_2(M))$ di dimensione g in $\mathbb{P}^N$.

Teorema (B-MM, 2015)

La dimensione coomologica di $S_{n_1,\ldots,n_g}$ è $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus S_{n_1,\ldots,n_g}) =$

$$\begin{cases} \mathrm{codim}(S_{n_1,\ldots,n_g}) - 1 = N - g - 1 = \sum_{i=1}^{g} n_i - 2 & \textit{se } \mathrm{char}(K) > 0 \\ \mathrm{ara}(S_{n_1,\ldots,n_g}) - 1 = N - 3 = \sum_{i=1}^{g} n_i + g - 4 & \textit{se } \mathrm{char}(K) = 0 \end{cases}$$

Siano $d \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \geq 1$. Consideriamo la matrice M che consiste di α_i blocchi Jordan di autovalore λ_i per $i = 1, \ldots, d$:

$$\left(J^1_{\lambda_1, m_{11}} \middle| J^2_{\lambda_1, m_{12}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_1}_{\lambda_1, m_{1\alpha_1}} \middle| J^1_{\lambda_2, m_{21}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_2}_{\lambda_2, m_{2\alpha_2}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_d}_{\lambda_d, m_{d\alpha_d}} \right).$$

Dimensione coomologica e rango aritmetico delle Jordan

Siano $d \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \geq 1$. Consideriamo la matrice M che consiste di α_i blocchi Jordan di autovalore λ_i per $i = 1, \ldots, d$:

$$\left(J^1_{\lambda_1, m_{11}} \middle| J^2_{\lambda_1, m_{12}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_1}_{\lambda_1, m_{1\alpha_1}} \middle| J^1_{\lambda_2, m_{21}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_2}_{\lambda_2, m_{2\alpha_2}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_d}_{\lambda_d, m_{d\alpha_d}} \right).$$

Ricordiamo che un blocco Jordan di lunghezza m_{ji} ha forma:

$$J^i_{\lambda_j, m_{ji}} = \begin{pmatrix} y^i_{j,1} & y^i_{j,2} & \cdots & y^i_{j,m_{ji}} \\ \lambda_j y^i_{j,1} & y^i_{j,1} + \lambda_j y^i_{j,2} & \cdots & y^i_{j,m_{ji}-1} + \lambda_j y^i_{j,m_{ji}} \end{pmatrix}.$$

Dimensione coomologica e rango aritmetico delle Jordan

Siano $d \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \geq 1$. Consideriamo la matrice M che consiste di α_i blocchi Jordan di autovalore λ_i per $i = 1, \ldots, d$:

$$\left(J^1_{\lambda_1, m_{11}} \middle| J^2_{\lambda_1, m_{12}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_1}_{\lambda_1, m_{1\alpha_1}} \middle| J^1_{\lambda_2, m_{21}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_2}_{\lambda_2, m_{2\alpha_2}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_d}_{\lambda_d, m_{d\alpha_d}} \right).$$

Ricordiamo che un blocco Jordan di lunghezza m_{ji} ha forma:

$$J^i_{\lambda_j, m_{ji}} = \begin{pmatrix} y^i_{j,1} & y^i_{j,2} & \cdots & y^i_{j,m_{ji}} \\ \lambda_j y^i_{j,1} & y^i_{j,1} + \lambda_j y^i_{j,2} & \cdots & y^i_{j,m_{ji}-1} + \lambda_j y^i_{j,m_{ji}} \end{pmatrix}.$$

Sia $X = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ la corrispondente varietà in $\mathbb{P}^N$. E sia $\alpha = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ il numero di blocchi.

Dimensione coomologica e rango aritmetico delle Jordan

Siano $d \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \geq 1$. Consideriamo la matrice M che consiste di α_i blocchi Jordan di autovalore λ_i per $i = 1, \ldots, d$:

$$\left(J^1_{\lambda_1, m_{11}} \middle| J^2_{\lambda_1, m_{12}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_1}_{\lambda_1, m_{1\alpha_1}} \middle| J^1_{\lambda_2, m_{21}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_2}_{\lambda_2, m_{2\alpha_2}} \middle| \cdots \middle| J^{\alpha_d}_{\lambda_d, m_{d\alpha_d}} \right).$$

Ricordiamo che un blocco Jordan di lunghezza m_{ji} ha forma:

$$J^i_{\lambda_j, m_{ji}} = \begin{pmatrix} y^i_{j,1} & y^i_{j,2} & \cdots & y^i_{j,m_{ji}} \\ \lambda_j y^i_{j,1} & y^i_{j,1} + \lambda_j y^i_{j,2} & \cdots & y^i_{j,m_{ji}-1} + \lambda_j y^i_{j,m_{ji}} \end{pmatrix}.$$

Sia $X = \mathcal{V}_+(I_2(M))$ la corrispondente varietà in $\mathbb{P}^N$. E sia $\alpha = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ il numero di blocchi.

Teorema (B-MM, 2015)

Se $\mathrm{char} K = 0$, *allora*

$$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X) + 1 = \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X) = \begin{cases} N + 1 - \alpha & \text{if } d = 1 \\ N & \text{if } d > 1 \end{cases}.$$

Aggiungere blocchi nilpotenti

La situazione mista è più complicata. I blocchi nilpotenti possono essere tenuti "*sotto controllo*" dal seguente lemma.

Aggiungere blocchi nilpotenti

La situazione mista è più complicata. I blocchi nilpotenti possono essere tenuti "*sotto controllo*" dal seguente lemma.

Lemma (B-MM, 2015)

Sia L una matrice di forme lineari, sia X_L la corrispondente varietà determinantale in $\mathbb{P}^N$, e sia Nil_n un blocco nilpotente di lunghezza $n+1$. Consideriamo la matrice $M = (L|\mathrm{Nil}_n)$ ottenuta dalla concatenazione di L e Nil_n, e la corrispondente varietà determinantale X in $\mathbb{P}^{N+n}$. Allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{N+n}}(X) &= \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X_L) \\
\mathrm{cd}(\mathbb{P}^{N+n} \setminus X) &= \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_L) \\
\mathrm{ara}_{\mathbb{P}^{N+n}}(X) &\leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X_L) + n.
\end{aligned}$$

Aggiungere blocchi nilpotenti

La situazione mista è più complicata. I blocchi nilpotenti possono essere tenuti "*sotto controllo*" dal seguente lemma.

Lemma (B-MM, 2015)

Sia L una matrice di forme lineari, sia X_L la corrispondente varietà determinantale in $\mathbb{P}^N$, e sia Nil_n un blocco nilpotente di lunghezza $n+1$. Consideriamo la matrice $M = (L|\mathrm{Nil}_n)$ ottenuta dalla concatenazione di L e Nil_n, e la corrispondente varietà determinantale X in $\mathbb{P}^{N+n}$. Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{N+n}}(X) &= \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X_L) \\ \mathrm{cd}(\mathbb{P}^{N+n} \setminus X) &= \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_L) \\ \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^{N+n}}(X) &\leq \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X_L) + n. \end{aligned}$$

Mentre il caso misto scroll-Jordan è più problematico...

Matrici con una diagonale di zeri

Consideriamo la seguente matrice di taglia $2 \times n$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-2} & 0 \end{pmatrix},$$

e denotiamo con $X_n := \mathcal{V}_+(I_2(A_n))$ la corrispondente varietà determinantale in $\mathbb{P}^N$, con $N = 2n - 3$.

Matrici con una diagonale di zeri

Consideriamo la seguente matrice di taglia $2 \times n$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-2} & 0 \end{pmatrix},$$

e denotiamo con $X_n := \mathcal{V}_+(I_2(A_n))$ la corrispondente varietà determinantale in $\mathbb{P}^N$, con $N = 2n - 3$.

La forma canonica di Kronecker-Weierstraß di A_n è

$$\left(J_{0,1} | J_{1,1} | B_1 | \cdots | B_1\right).$$

Matrici con una diagonale di zeri

Consideriamo la seguente matrice di taglia $2 \times n$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-2} & 0 \end{pmatrix},$$

e denotiamo con $X_n := \mathcal{V}_+(I_2(A_n))$ la corrispondente varietà determinantale in $\mathbb{P}^N$, con $N = 2n - 3$.
La forma canonica di Kronecker-Weierstraß di A_n è

$$\big(J_{0,1} | J_{1,1} | B_1 | \cdots | B_1 \big).$$

In particolare $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N} X_n = n - 1 = \frac{1}{2}(N+1)$.

Matrici con una diagonale di zeri

Consideriamo la seguente matrice di taglia $2 \times n$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-2} & 0 \end{pmatrix},$$

e denotiamo con $X_n := \mathcal{V}_+(I_2(A_n))$ la corrispondente varietà determinantale in $\mathbb{P}^N$, con $N = 2n - 3$.
La forma canonica di Kronecker-Weierstraß di A_n è

$$\big(J_{0,1}|J_{1,1}|B_1|\cdots|B_1\big).$$

In particolare $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X_n = n - 1 = \frac{1}{2}(N+1)$.

Theorem (B-MM, 2015)

Per $n \geq 4$ si ha

$$\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X_n) = \begin{cases} \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X_n) - 1 = \frac{1}{2}(N-1) & \textit{if } \mathrm{char}(K) > 0 \\ \mathrm{ara}_{\mathbb{P}^N}(X_n) - 1 = N - 3 & \textit{if } \mathrm{char}(K) = 0 \end{cases}$$

Metodi usati

- **Serre's GAGA**. Per calcolare $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$ nel caso $\mathrm{char} K = 0$.

Metodi usati

- **Serre's GAGA**. Per calcolare $\operatorname{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$ nel caso $\operatorname{char} K = 0$.
- **Corrispondenza di Grothendieck-Serre e coomologia locale**. Siano S una K-algebra graduata standard, $X = \operatorname{Proj}(S)$, e M un S-modulo graduato, allora

$$H^i(X, \widetilde{M}(n)) \cong H^{i+1}_{S_+}(M)_n,$$

per ogni $i > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Metodi usati

- **Serre's GAGA**. Per calcolare $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$ nel caso $\mathrm{char} K = 0$.
- **Corrispondenza di Grothendieck-Serre e coomologia locale**. Siano S una K-algebra graduata standard, $X = \mathrm{Proj}(S)$, e M un S-modulo graduato, allora

$$H^i(X, \widetilde{M}(n)) \cong H^{i+1}_{S_+}(M)_n,$$

  per ogni $i > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.
- **Algebra commutativa combinatorica**. Per calcolare $\mathrm{ara}(X)$. Gli ideali di minori di una matrice formano un *poset*.

Metodi usati

- **Serre's GAGA**. Per calcolare $\operatorname{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$ nel caso $\operatorname{char} K = 0$.
- **Corrispondenza di Grothendieck-Serre e coomologia locale**. Siano S una K-algebra graduata standard, $X = \operatorname{Proj}(S)$, e M un S-modulo graduato, allora

$$H^i(X, \widetilde{M}(n)) \cong H^{i+1}_{S_+}(M)_n,$$

  per ogni $i > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.
- **Algebra commutativa combinatorica**. Per calcolare $\operatorname{ara}(X)$. Gli ideali di minori di una matrice formano un *poset*.

In particolare per molti dei casi trattati siamo in grado di ottenere:

Metodi usati

- **Serre's GAGA**. Per calcolare $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$ nel caso $\mathrm{char} K = 0$.
- **Corrispondenza di Grothendieck-Serre e coomologia locale**. Siano S una K-algebra graduata standard, $X = \mathrm{Proj}(S)$, e M un S-modulo graduato, allora

$$H^i(X, \widetilde{M}(n)) \cong H^{i+1}_{S_+}(M)_n,$$

  per ogni $i > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.
- **Algebra commutativa combinatorica**. Per calcolare $\mathrm{ara}(X)$. Gli ideali di minori di una matrice formano un *poset*.

In particolare per molti dei casi trattati siamo in grado di ottenere:

- equazioni esplicite per le varietà;

Metodi usati

- **Serre's GAGA**. Per calcolare $\mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$ nel caso $\mathrm{char} K = 0$.
- **Corrispondenza di Grothendieck-Serre e coomologia locale**. Siano S una K-algebra graduata standard, $X = \mathrm{Proj}(S)$, e M un S-modulo graduato, allora

$$H^i(X, \widetilde{M}(n)) \cong H^{i+1}_{S_+}(M)_n,$$

  per ogni $i > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.
- **Algebra commutativa combinatorica**. Per calcolare $\mathrm{ara}(X)$. Gli ideali di minori di una matrice formano un *poset*.

In particolare per molti dei casi trattati siamo in grado di ottenere:

- equazioni esplicite per le varietà;
- ulteriori informazioni sull'annullamento dei gruppi di coomologia $H^i(\mathbb{P}^N \setminus X, \mathcal{F})$ per $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N} X < i < \mathrm{cd}(\mathbb{P}^N \setminus X)$.

Bibliografia Essenziale 1

M. Barile,
On ideals generated by monomials and one binomial, Algebra Coll. **41** (2007), 4, 631–638.

L. Bădescu, G. Valla,
Grothendieck-Lefschetz theory, set-theoretic complete intersections and rational normal scrolls, J. Algebra **324** (2010), 1636–1655.

D. Bolognini, A. Caminata, A. Macchia, M. Mostafazadehfard,
Cohomological dimension and arithmetical rank of some determinantal ideals, Le Matematiche **70**, n. 1 (2015), 273–300.

W. Bruns, R. Schwänzl,
The number of equations defining a determinantal variety, Bull. London Math Soc. **22** (1990), 439–445.

Bibliografia Essenziale 2

F.R. GANTMACHER,
The theory of matrices, Vol. II. Chelsea Publishing Co., New York (1959).

R. HARTSHORNE,
Cohomological dimension of algebraic varieties. Ann. Math. **88** (1968), 403–450.

G. LYUBEZNIK, A.K. SINGH, U. WALTHER,
Local cohomology modules supported at determinantal ideals, J. Eur. Math. Soc. to appear.

A. NASROLLAH NEJAD, R. ZAARE-NAHANDI,
Aluffi torsion-free ideals. J. Algebra **346** (2011), 284–298.

E. WITT,
Local cohomology with support in ideals of maximal minors. Adv. Math. **231** (2012), 1998–2012.