Proprietà topologiche di insiemi di sovraanelli

Dario Spirito

(lavoro in collaborazione con Carmelo Finocchiaro e Marco Fontana)

Giornate di Geometria Algebrica ed argomenti correlati

Catania, 28 maggio 2016

Sovraanelli

Definizione

Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Un sovraanello *di D è un anello compreso tra D e K.*

- Esempi: la chiusura integrale di D, le sue localizzazioni.
- I sovraanelli di un dominio D sono *tanti*.
- Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Esiste un dominio di Dedekind $D \in \mathrm{Over}(\mathbb{Z}[X])$ tale che $\mathrm{Pic}(D) \simeq G$ [Eakin e Heinzer, 1973].
- Idea: studiare $\mathrm{Over}(D)$ da un punto di vista topologico.

Risoluzione delle singolarità

- Sia X una varietà (o uno schema). Una risoluzione delle singolarità per X è una mappa *propria* e *birazionale* $X' \longrightarrow X$, con X' regolare.
- Facile nel caso di curve: prendo la normalizzazione.
  - Già in dimensione 2 non vale: devo alternare scoppiamenti e normalizzazioni.
- Si sa che:
  - X' esiste se X è una varietà su un campo di caratteristica 0.
  - X' esiste se X ha dimensione al più 3.
  - *Non vale* per tutti gli schemi.

Domini di valutazione

- Un dominio di valutazione V è un dominio d'integrità in cui ogni coppia di ideali è comparabile.
  - Equivalentemente, se per ogni x nel campo dei quozienti $x \in V$ o $x^{-1} \in V$.
- Gli anelli di valutazione sono tra gli anelli "più semplici".
  - Ogni anello di valutazione è locale.
  - Ogni ideale finitamente generato è principale.
- Se D è un dominio, l'insieme dei sovraanelli di D che sono anelli di valutazione è lo spazio di Zariski $\mathrm{Zar}(D)$ di D.
  - Se $K \subseteq L$ è un'estensione di campi, $\mathrm{Zar}(K|L)$ è lo spazio degli anelli di valutazione contenenti K che hanno L come campo dei quozienti.
- Se D è locale e $V \in \mathrm{Zar}(D)$, diciamo che V *domina* D se $\mathfrak{m}_D \subseteq \mathfrak{m}_V$.

Il metodo di Zariski

Sia X una varietà su K con campo delle funzioni L.

- Ogni $V \in \mathrm{Zar}(K|L)$ domina un anello regolare locale $K[x_1, \ldots, x_n]_P$, e quindi un punto regolare di un modello proiettivo Z di L.
  - Un *modello proiettivo* Z di L è una varietà proiettiva con campo delle funzioni L.
  - Una *risoluzione* di V è un modello proiettivo Z tale che il centro di V su Z è regolare.

Il metodo di Zariski

Sia X una varietà su K con campo delle funzioni L.

- Ogni $V \in \mathrm{Zar}(K|L)$ domina un anello regolare locale $K[x_1, \dots, x_n]_P$, e quindi un punto regolare di un modello proiettivo Z di L.
  - Un *modello proiettivo* Z di L è una varietà proiettiva con campo delle funzioni L.
  - Una *risoluzione* di V è un modello proiettivo Z tale che il centro di V su Z è regolare.
- Riduzione ad un numero finito di modelli proiettivi.
  - Per ogni V, prendo $B_V := K[x_1, \dots, x_n]$ (trovato come sopra).
  - Prendo un aperto U_V di $\mathrm{Spec}(B_V)$ fatto di punti regolari.
  - Prendo $\Omega_V := \{W \in \mathrm{Zar}(K|L) \mid \text{il centro di } W \text{ su } B_V \text{ è in } U_V\}$.
  - Gli Ω_V sono aperti in una topologia in cui $\mathrm{Zar}(K|L)$ è compatto.

Il metodo di Zariski

Sia X una varietà su K con campo delle funzioni L.

- Ogni $V \in \mathrm{Zar}(K|L)$ domina un anello regolare locale $K[x_1, \ldots, x_n]_P$, e quindi un punto regolare di un modello proiettivo Z di L.
  - Un *modello proiettivo* Z di L è una varietà proiettiva con campo delle funzioni L.
  - Una *risoluzione* di V è un modello proiettivo Z tale che il centro di V su Z è regolare.
- Riduzione ad un numero finito di modelli proiettivi.
  - Per ogni V, prendo $B_V := K[x_1, \ldots, x_n]$ (trovato come sopra).
  - Prendo un aperto U_V di $\mathrm{Spec}(B_V)$ fatto di punti regolari.
  - Prendo $\Omega_V := \{W \in \mathrm{Zar}(K|L) \mid$ il centro di W su B_V è in $U_V\}$.
  - Gli Ω_V sono aperti in una topologia in cui $\mathrm{Zar}(K|L)$ è compatto.
- Se $S_1, \ldots, S_n$ sono modelli proiettivi e S_i risolve $N_i \subseteq \mathrm{Zar}(K|L)$, esiste un unico modello proiettivo $\overline{S}$ che risolve $N_1 \cup \cdots \cup N_n$.

La topologia di Zariski

Definizione

La topologia di Zariski su $\mathrm{Over}(D)$ *è la topologia generata dagli insiemi*

$$\mathcal{B}(x_1, \ldots, x_n) = \{T \in \mathrm{Over}(D) \mid x_1, \ldots, x_n \in T\} = \mathrm{Over}(D[x_1, \ldots, x_n])$$

al variare di $x_1, \ldots, x_n$ *in* K.

- La stessa topologia si può usare sullo spazio $\mathrm{Over}(A|B)$ degli anelli compresi tra A e B (per $A \subseteq B$) o sull'insieme dei sottomoduli di un A-modulo M.

Proprietà

- Over(D) è T_0.
- Se Ω è un aperto di Over(D), $T \in \Omega$ e $T \subseteq A$ allora $A \in \Omega$.
  - In particolare, $\mathrm{Cl}(\{T\}) = \{A \in \text{Over}(D) \mid A \subseteq T\}$.
  - $\mathrm{Cl}(\{K\}) = \text{Over}(D)$.
  - L'unico punto chiuso di Over(D) è $\{D\}$ stesso.
  - Di conseguenza, Over(D) non è T_1 né T_2 (se $D \neq K$).
- Over(D) è compatto.
- Se $\Delta \subseteq \text{Over}(D)$ è compatto e I è un D-sottomodulo di K piatto, allora

$$I\left(\bigcap_{T\in\Delta} T\right) = \bigcap_{T\in\Delta} IT$$

Spazi spettrali

- Uno spazio spettrale è uno spazio topologico che è omeomorfo allo spettro primo di un anello.
- Gli spazi spettrali possono essere caratterizzati topologicamente [Hochster, 1969]: X è spettrale se e solo se
  - X è T_0 e compatto;
  - X ha una base di aperti compatti che è chiusa per intersezioni finite;
  - ogni chiuso irriducibile di X ha un punto generico.
- I primi due punti sono (generalmente) facili, la terza *no*.
- $\mathrm{Zar}(D)$ è uno spazio spettrale, perché è omeomorfo allo spettro dell'anello di Kronecker di D.
- $\mathrm{Over}(D)$ è uno spazio spettrale, ma non possiamo trovare esplicitamente l'anello corrispondente.

La topologia inversa

Sia X uno spazio spettrale.

- La topologia inversa X^{inv} su X è la topologia in cui una base di *chiusi* è formata dagli aperti compatti di X.
- È più semplice vederla attraverso i chiusi: Y è chiuso nella topologia inversa se e solo se Y è compatto e chiuso per generizzazione.
  - La generizzazione Y^{gen} di $Y \subseteq X$ è l'insieme degli $x \in X$ tale che la chiusura di $\{x\}$ contiene elementi di Y.
  - Se $X = \mathrm{Spec}(R)$, $Y^{\mathrm{gen}} = \{P \in X \mid P \subseteq Q \text{ per qualche } Q \in Y\} = Y^{\downarrow}$.
  - Se $X = \mathrm{Over}(D)$, $Y^{\mathrm{gen}} = \{T \in X \mid T \supseteq S \text{ per qualche } S \in Y\} = Y^{\uparrow}$.
- X^{inv} è uno spazio spettrale.

La topologia costruibile

- La topologia costruibile X^{cons} su X è la topologia meno fine dove gli aperti compatti di X sono sia aperti che chiusi.
  - *Non* sto richiedendo che X sia spettrale.
- Supponiamo che X abbia una base di aperti compatti chiusa per intersezioni finite. Allora X è spettrale se e solo se X^{cons} è compatto di Hausdorff.
- Se $X \simeq \mathrm{Spec}(R)$, allora X^{cons} è isomorfo allo spettro di
$$T(R) := \frac{R[Z_r \mid r \in R]}{(r^2 Z_r - r, rZ_r^2 - Z_r \mid r \in R)}$$
(dove le Z_r sono indeterminate indipendenti).
- La topologia costruibile è più fine sia della topologia originaria che della topologia inversa, e $(X^{\text{inv}})^{\text{cons}} = X^{\text{cons}}$.

Insiemi procostruibili

Sia X uno spazio spettrale.

- Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è procostruibile su X se Y è chiuso in X^{cons}.
- Se Y è procostruibile, allora Y^{cons} (ovvero Y con la topologia costruibile) è omeomorfo ad Y con la topologia indotta da X^{cons}.
- In particolare, Y^{cons} è compatto di Hausdorff.
- Un insieme procostruibile è anche spettrale.
  - Gli aperti compatti di X sono spazi spettrali.
  - I chiusi nella topologia inversa sono spettrali.
- Un'intersezione di insiemi procostruibili è ancora procostruibile.

Sottoinsiemi di Over(D)

Sia X un sottoinsieme di Over(D), considerato con la topologia di Zariski.

- X è spettrale?

Sottoinsiemi di Over(D)

Sia X un sottoinsieme di Over(D), considerato con la topologia di Zariski.

- X è compatto?
- X è spettrale?
- X è procostruibile?

- Procostruibile $\Longrightarrow$ spettrale $\Longrightarrow$ compatto.
- Nessuna delle due implicazioni si inverte.
  - Siano $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ spazi spettrali. Allora Ω_1 è procostruibile se e solo se $\Omega_1 \cap B$ è compatto per ogni aperto compatto B di Ω_2.
- Studiamo sottinsiemi X "algebricamente interessanti": ad esempio, lo spazio dei sovraanelli noetheriani.

Chiusi nella topologia inversa

- La topologia inversa è meno fine della topologia costruibile, quindi i chiusi della topologia inversa sono procostruibili.
- Vanno trovati insiemi compatti e chiusi per generizzazione.
- Se sono compatti, i seguenti insiemi sono procostruibili:
  - $\{T \mid T$ è un dominio di Prüfer$\}$;
  - $\{T \mid T$ è un dominio di Prüfer con $\dim(T) \leq n\}$;
  - $\{T \mid$ ogni ideale finitamente generato di T è generato da n elementi$\}$;
  - $\{T \mid T$ è un dominio di Bézout$\}$;
  - $\{T \mid T$ è un dominio di valutazione noetheriano$\}$;
  - $\{T \mid T$ è un PID$\}$;
  - $\{T \mid T$ è un dominio di Dedekind$\}$;
  - $\{T \mid T$ è noetheriano con $\dim(T) \leq 1\}$.
- Sotto la stessa ipotesi su X, anche l'insieme

$$X^\cap := \left\{ \bigcap\{T \mid T \in Z\} \mid Z \subseteq X \right\}$$

è procostruibile.

Ultrafiltri

- Un ultrafiltro sull'insieme X è una famiglia non vuota $\mathscr{U}$ di sottoinsiemi di X tale che:
    - $\emptyset \notin \mathscr{U}$;
    - se $A, B \in \mathscr{U}$, allora $A \cap B \in \mathscr{U}$;
    - se $A \subseteq B \subseteq X$ e $A \in \mathscr{U}$ allora $B \in \mathscr{U}$;
    - se $A \cup B = X$, allora $A \in \mathscr{U}$ o $B \in \mathscr{U}$.
- Le prime tre condizioni definiscono un filtro; un ultrafiltro può anche essere definito come un filtro massimale.
- Assumendo l'assioma della scelta, ogni filtro è contenuto in un ultrafiltro.
- È sostanzialmente impossibile scrivere esplicitamente un ultrafiltro non banale.

Topologia degli ultrafiltri

- Partiamo da un insieme X; consideriamo una famiglia di sottoinsiemi $\mathscr{F}$.
- Prendiamo $Y \subseteq X$ e un ultrafiltro $\mathscr{U}$ su Y. Un elemento $x \in X$ è un punto limite per ultrafiltri di Y rispetto a $\mathscr{F}$ e $\mathscr{U}$ se

$$\text{per ogni } F \in \mathscr{F},\ x \in F \text{ se e solo se } F \cap Y \in \mathscr{U}.$$

  - Indichiamo l'insieme di questi punti con $Y_{\mathscr{F}}(\mathscr{U})$.
- Se $Y_{\mathscr{F}}(\mathscr{U}) \subseteq Y$, allora Y è stabile per ultrafiltri (rispetto a $\mathscr{F}$).
- La famiglia degli insiemi stabili per ultrafiltri sono i chiusi di una topologia.

Criteri con ultrafiltri

- [Finocchiaro, 2014] X è spettrale se e solo se è T_0 e $X_{\mathscr{B}}(\mathscr{U}) \neq \emptyset$ per ogni ultrafiltro e qualche base $\mathscr{B}$ (che sarà la base degli aperti compatti).
- [Finocchiaro, 2014] Supponiamo ora che X sia spettrale, sia $\mathscr{B}$ una base di aperti compatti e $Y \subseteq X$.
  - La topologia degli insiemi stabili per ultrafiltri coincide con la topologia costruibile.
  - Y è procostrubile se e solo se $Y_{\mathscr{B}}(\mathscr{U}) \subseteq Y$ per ogni ultrafiltro.
  - $Y_{\mathscr{B}}(\mathscr{U})$ è sempre composto da un singolo elemento.
  - Se $X = \mathrm{Spec}(R)$, allora questo può essere scritto come

$$P_{\mathscr{U}} := \{f \in R \mid \mathcal{V}(f) \cap Y \in \mathscr{U}\} = \{f \in R \mid \mathcal{D}(f) \cap Y \notin \mathscr{U}\}.$$

  - Se $X = \mathrm{Over}(D)$, dobbiamo controllare che

$$A_{\mathscr{U}} := \{x \in K \mid \mathcal{B}(x) \cap Y \in \mathscr{U}\} \in Y.$$

Insiemi procostruibili

- Sia X l'insieme dei sovraanelli locali di D.
- Sia $T \in \mathrm{Over}(D)$. Allora $T \in X$ se e solo se, per ogni $x, y \in T$ non invertibili, $x + y$ è non invertibile.
- Prendo $x, y \in A_{\mathscr{U}}$ non invertibili e considero un $T \in X$.
- $$T \quad \in \quad \underbrace{\mathcal{B}(x)^c}_{x \notin T} \cup \underbrace{\mathcal{B}(y)^c}_{y \notin T} \cup$$

Insiemi procostruibili

- Sia X l'insieme dei sovraanelli locali di D.
- Sia $T \in \mathrm{Over}(D)$. Allora $T \in X$ se e solo se, per ogni $x, y \in T$ non invertibili, $x + y$ è non invertibile.
- Prendo $x, y \in A_{\mathscr{U}}$ non invertibili e considero un $T \in X$.
- $$T \in \mathcal{B}(x)^c \cup \mathcal{B}(y)^c \cup \underbrace{\mathcal{B}(x, x^{-1})}_{x \text{ invertibile}} \cup \underbrace{\mathcal{B}(y, y^{-1})}_{y \text{ invertibile}} \cup$$

Insiemi procostruibili

- Sia X l'insieme dei sovraanelli locali di D.
- Sia $T \in \mathrm{Over}(D)$. Allora $T \in X$ se e solo se, per ogni $x, y \in T$ non invertibili, $x + y$ è non invertibile.
- Prendo $x, y \in A_{\mathscr{U}}$ non invertibili e considero un $T \in X$.
- $$\begin{aligned} T \quad \in \quad & \mathcal{B}(x)^c \cup \mathcal{B}(y)^c \cup \mathcal{B}(x, x^{-1}) \cup \mathcal{B}(y, y^{-1}) \cup \\ & \cup \left(\underbrace{\mathcal{B}(x, y) \cap \mathcal{B}(x^{-1})^c \cap \mathcal{B}(y^{-1})^c}_{x,y \in \mathfrak{m}_T} \cap \underbrace{\mathcal{B}((x+y)^{-1})^c}_{T \text{ è locale}} \right) \end{aligned}$$

Insiemi procostruibili

- Sia X l'insieme dei sovraanelli locali di D.
- Sia $T \in \mathrm{Over}(D)$. Allora $T \in X$ se e solo se, per ogni $x, y \in T$ non invertibili, $x + y$ è non invertibile.
- Prendo $x, y \in A_{\mathscr{U}}$ non invertibili e considero un $T \in X$.
- $$\begin{aligned} X \quad \subseteq \quad & \mathcal{B}(x)^c \cup \mathcal{B}(y)^c \cup \mathcal{B}(x, x^{-1}) \cup \mathcal{B}(y, y^{-1}) \cup \\ & \cup \left(\mathcal{B}(x, y) \cap \mathcal{B}(x^{-1})^c \cap \mathcal{B}(y^{-1})^c \cap \mathcal{B}((x + y)^{-1})^c\right) \end{aligned}$$
- Per le proprietà degli ultrafiltri, uno di questi insiemi è in $\mathscr{U}$; per come ho preso $A_{\mathscr{U}}$, dev'essere l'ultimo.
- $A_{\mathscr{U}} \in X$, e quindi X è procostruibile.

Insiemi procostruibili (2)

- L'esempio precedente mostra essenzialmente che, se X può essere definito senza usare quantificatori (a meno di un iniziale $\forall$), allora X è procostruibile.
- Allo stesso modo, si possono dimostrare procostruibili i seguenti insiemi:
  - $\{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| \leq n\}$ (per ogni n fissato).
  - $\{T \mid T$ è un dominio di valutazione$\} = \mathrm{Zar}(D)$.
  - $\{T \mid T$ è un dominio di pseudovalutazione$\}$.
  - $\{T \mid T$ è seminormale$\}$.
  - $\{T \mid T$ è integralmente chiuso in $K\}$.

Insiemi procostruibili (3)

- Il metodo precedente è abbastanza limitato.
- Supponiamo di voler considerare l'insieme $X := \{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| \geq n\}$ (per un n fissato).
- Posso limitarmi a considerare sovraanelli locali.
- Per ogni $T \in X$, esistono $x_1, \ldots, x_n \in T$ tali che $x_i - x_j \notin \mathfrak{m}_T$ se $i \neq j$.
- $$T \in \underbrace{\mathcal{B}(x_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}(x_n)}_{x_1,\ldots,x_n \in T} \cap$$

Insiemi procostruibili (3)

- Il metodo precedente è abbastanza limitato.
- Supponiamo di voler considerare l'insieme $X := \{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| \geq n\}$ (per un n fissato).
- Posso limitarmi a considerare sovraanelli locali.
- Per ogni $T \in X$, esistono $x_1, \ldots, x_n \in T$ tali che $x_i - x_j \notin \mathfrak{m}_T$ se $i \neq j$.
- $$T \in \mathcal{B}(x_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}(x_n) \cap \left(\bigcap_{i \neq j} \underbrace{\mathcal{B}((x_i - x_j)^{-1})}_{x_i - x_j \notin \mathfrak{m}_T} \right)$$

Insiemi procostruibili (3)

- Il metodo precedente è abbastanza limitato.
- Supponiamo di voler considerare l'insieme $X := \{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| \geq n\}$ (per un n fissato).
- Posso limitarmi a considerare sovraanelli locali.
- Per ogni $T \in X$, esistono $x_1, \ldots, x_n \in T$ tali che $x_i - x_j \notin \mathfrak{m}_T$ se $i \neq j$.
- $$X \subseteq \bigcup_{x_1,\ldots,x_n} \left[\mathcal{B}(x_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}(x_n) \cap \left(\bigcap_{i \neq j} \mathcal{B}((x_i - x_j)^{-1})\right)\right].$$
- Se suppongo che X sia compatto, quell'insieme sarà in $\mathscr{U}$ per qualche $x_1, \ldots, x_n$: e questi saranno n rappresentanti degli elementi di $A_{\mathscr{U}}/\mathfrak{m}_{A_{\mathscr{U}}}$.

Insiemi procostruibili (4)

- In altre parole, se aggiungiamo l'ipotesi di compattezza "possiamo usare definizioni con un $\exists$".
  - $\{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| \geq n\}$ (per ogni n fissato).
  - $\{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| = n\}$ (per ogni n fissato).
  - $\{T \mid T$ è locale e $|\kappa(T)| = \infty\}$.
- In più, riottengo anche spazi chiusi per la topologia inversa:
  - $\{T \mid T$ è un dominio di Prüfer$\}$
  - $\{T \mid T$ è un dominio di Bézout$\}$
  - $\{T \mid$ ogni ideale finitamente generato di T è generato da n elementi$\}$ (ad n fissato).

Il gruppo di Picard

- Prendo un ideale invertibile I di $A_{\mathscr{U}}$, con inverso J.
  - $I = I'A_{\mathscr{U}}$ e $J = J'A_{\mathscr{U}}$, con I', J' finitamente generati su D.
  - Verificare che $I'T$ e $J'T$ sono l'inverso l'uno dell'altro (come ideali di T) si può fare in maniera finita.
  - Scrivo $I' = (x_1, \dots, x_n)$ e $J' = (y_1, \dots, y_m)$.
  - Per $I'J' \subseteq T$, devo avere $x_i y_j \in T$ per ogni i, j.
  - Per $T \subseteq I'J'$ devo avere $1 \in I'J'$, ovvero $1 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i y_j$ per qualche $\lambda_{ij} \in T$.
- $I'T$ e $J'T$ saranno inversi l'uno dell'altro in $\mathcal{B}(\{x_i\}_i, \{y_j\}_j, \{\lambda_{ij}\}_{i,j})$.
- Per ciascuno dei seguenti X, se $X \cap \mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è compatto per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ allora X è procostruibile:
  - $\{T \mid \mathrm{Pic}(T)$ è di torsione$\}$.
  - $\{T \mid n \cdot \mathrm{Pic}(T) = 0\}$ (per ogni n fissato).
  - $\{T \mid \mathrm{Pic}(T) = 0\}$.
- L'insieme delle chiusure integrali di $\mathbb{Z}$ in estensioni algebriche di $\mathbb{Q}$ con $\mathrm{Pic}(T)$ di torsione è uno spazio spettrale.

Operazioni semistar

- Sia $\mathbf{F}(D)$ l'insieme dei D-sottomoduli di K. Un'applicazione $\star : \mathbf{F}(D) \longrightarrow \mathbf{F}(D)$, $I \mapsto I^\star$, è un'operazione semistar se, per ogni $I, J \in \mathbf{F}(D)$ e ogni $x \in K$,
  - $I \subseteq I^\star$ ($\star$ è estensiva);
  - $I \subseteq J$ implica $I^\star \subseteq J^\star$ ($\star$ preserva l'ordine);
  - $(I^\star)^\star = I^\star$ ($\star$ è idempotente);
  - $x \cdot I^\star = (xI)^\star$.
- Possiamo mettere una topologia sull'insieme $\mathrm{SStar}(D)$ delle semistar dichiarando aperti gli insiemi $V_I := \{\star \mid 1 \in I^\star\}$.
- $\mathrm{SStar}(D)$ diventa uno spazio compatto e T_0.

Operazioni semistar di tipo finito

- $\star$ è di tipo finito se, per ogni I,

$$I^\star = \bigcup \{J^\star \mid J \subseteq I, J \text{ finitamente generato}\}$$

- L'insieme $\mathrm{SStar}_f(D)$ delle operazioni semistar di tipo finito è spettrale.
- C'è un'inclusione topologica

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathrm{Over}(D) &\longrightarrow \mathrm{SStar}_f(D) \\ T &\longmapsto \wedge_T, \end{aligned}$$

  dove $I^{\wedge_T} = IT$ per ogni I.
- $\iota(\mathrm{Over}(D))$ generalmente *non* è procostruibile in $\mathrm{SStar}_f(D)$.

Esempi

- L'identità è un'operazione semistar di tipo finito: $I^d := I$.
- Così come l'estensione $\wedge_T$ ad un sovraanello T.
- Se $\{\star_\alpha \mid \alpha \in A\}$ è un insieme di operazioni semistar, allora

$$I \mapsto \bigcap_{\alpha \in A} I^{\star_\alpha}$$

  è una nuova operazione semistar. Può darsi che le $\star_\alpha$ sono di tipo finito ma $\star$ no.
- La chiusura integrale, o b-operazione: I^b è composto dagli elementi $x \in K$ tali che

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

  per qualche $a_i \in I^i$. Visto che ogni appartenenza $x \in I^b$ richiede solo una quantità finita di dati, b è di tipo finito.

Compattezza

- Generalizzando l'esempio di un solo ideale, ogni $\Delta \subseteq \mathrm{Over}(D)$ induce un'operazione semistar
$$\wedge_{\Delta} : I \mapsto \bigcap_{T \in \Delta} IT.$$
- Se Δ è compatto, allora $\wedge_{\Delta}$ è di tipo finito.
  - $\wedge_{\Delta}$ può essere di tipo finito anche se Δ non è compatto.
  - Se Δ è composto da anelli di valutazione o da localizzazioni di D, allora vale il viceversa.
- Problema: come verificare che $\wedge_{\Delta}$ è di tipo finito?

Usare la b-operazione

Teorema

Sia D un dominio con campo dei quozienti K, $x \in K$, I un D-sottomodulo di K. Allora $x \in I^b$ se e solo se $x \in IV$ per ogni $V \in \mathrm{Zar}(D)$.

Usare la b-operazione

Teorema

Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Allora $b = \wedge_{\mathrm{Zar}(D)}$.

Usare la b-operazione

Teorema

Sia D un dominio con campo dei quozienti K. Allora $b = \wedge_{\mathrm{Zar}(D)}$.

Sia D noetheriano tale che $\dim(D) \geq 2$, e sia Δ l'insieme dei sovraanelli di valutazione noetheriani.

- Se I è un ideale di D, vale ancora $I^{\wedge_\Delta} = I^b$.
- Tuttavia, se $W \in \mathrm{Zar}(D)$ non è noetheriano, $W^{\wedge_\Delta} \neq W = W^b$.
- Visto che $\dim(D) \geq 2$, questi W devono esistere per forza.
- $\wedge_\Delta$ e b coincidono sui moduli finitamente generati, ma non in generale.
- $\wedge_\Delta$ non è di tipo finito.
- Δ non è compatto.

Sottoinsiemi di Zar(D) non compatti

- L'esempio precedente può essere generalizzato.
  - Prendo un $V \in \mathrm{Zar}(D)$ minimale (ovvero non contiene altri sovraanelli di valutazione).
  - Se $\wedge_{\mathrm{Zar}(D)\setminus\{V\}} = \wedge_{\mathrm{Zar}(D)}$ sugli ideali, allora $\mathrm{Zar}(D) \setminus \{V\}$ non è compatto.
- Se $\mathrm{Zar}(D) \setminus \{V\}$ è compatto, allora V è la chiusura integrale di $D[x_1, \ldots, x_n]_P$ per qualche $x_1, \ldots, x_n \in K$.
  - Chiaramente non può avvenire se D è noetheriano e $\dim(V) > 1$.
  - Se avviene, $\dim(V) \leq 2\dim(D)$.
  - Se D è locale e ha infiniti ideali primi non comparabili la cui intersezione è (0) allora $\mathrm{Zar}(D) \setminus \{V\}$ non è mai compatto.
  - "Generalmente" Zar(D) non è uno spazio noetheriano.

Lo spazio degli anelli noetheriani

- Sia di nuovo D noetheriano con $\dim(D) \geq 2$, e sia Δ l'insieme dei sovraanelli di valutazione noetheriani.
- Sia X l'insieme dei sovraanelli noetheriani di D.
  - X è compatto (ha un minimo).
  - $X \cap \mathrm{Zar}(D) = \Delta$ non è compatto e quindi non è procostruibile.
  - Quindi X non è procostruibile.
- X è spettrale?
  - $X \cap \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ è uguale ai sovraanelli noetheriani di $D[x_1, \dots, x_n]$.
  - Ma $D[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano, quindi l'intersezione è compatta.
  - X non può essere spettrale.

Lo spazio delle localizzazioni

- Consideriamo lo spazio $\mathrm{Loc}(D) \subseteq \mathrm{Over}(D)$ delle localizzazioni di D (sugli ideali primi). La mappa di localizzazione

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathrm{Spec}(D) &\longrightarrow \mathrm{Loc}(D) \\ P &\longmapsto D_P \end{aligned}$$

  è un omeomorfismo.
- In particolare, $\mathrm{Loc}(D)$ è uno spazio spettrale.
- È procostruibile?

Lo spazio delle localizzazioni (2)

- Per controllare se $\mathrm{Loc}(D)$ è procostruibile, dobbiamo studiare l'intersezione con $\mathcal{B}(x)$:

$$\mathcal{B}(x) \cap \mathrm{Loc}(D) = \{D_P \mid x \in D_P\} = \lambda(\mathcal{D}((D :_D x)))$$

- Quindi, $\mathcal{B}(x) \cap \mathrm{Loc}(D)$ è compatto se e solo se lo è $\mathcal{D}((D :_D x))$.

Lo spazio delle localizzazioni (2)

- Per controllare se $\mathrm{Loc}(D)$ è procostruibile, dobbiamo studiare l'intersezione con $\mathcal{B}(x)$:

$$\mathcal{B}(x) \cap \mathrm{Loc}(D) = \{D_P \mid x \in D_P\} = \lambda(\mathcal{D}((D :_D x)))$$

- Quindi, $\mathcal{B}(x) \cap \mathrm{Loc}(D)$ è compatto se e solo se lo è $\mathcal{D}((D :_D x))$.
- D è rad-colon coerente se, per ogni $x \in K$, l'insieme $\mathcal{D}((D :_D x)) = \mathcal{D}(D \cap x^{-1}D)$ è compatto.
  - Equivalentemente, se, per ogni x, $\mathrm{rad}((D :_D x))$ è il radicale di un ideale finitamente generato.
  - Domini noetheriani (o con spettro noetheriano) sono rad-colon coerenti.
  - Domini di Prüfer sono rad-colon coerenti.
  - Esistono domini che non lo sono.
- $\mathrm{Loc}(D)$ è procostruibile se e solo se D è rad-colon coerente.

Anelli non locali

Ci sono tre generalizzazioni delle localizzazioni ad anelli non locali:

- *Anelli quoziente*: anelli del tipo $S^{-1}D$, per qualche insieme moltiplicativamente chiuso S.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$.

Anelli non locali

Ci sono tre generalizzazioni delle localizzazioni ad anelli non locali:

- *Anelli quoziente*: anelli del tipo $S^{-1}D$, per qualche insieme moltiplicativamente chiuso S.
    - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$.
- *Sovraanelli piatti*: sovraanelli di D piatti come D-moduli.
    - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$.

Anelli non locali

Ci sono tre generalizzazioni delle localizzazioni ad anelli non locali:

- *Anelli quoziente*: anelli del tipo $S^{-1}D$, per qualche insieme moltiplicativamente chiuso S.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$.
- *Sovraanelli piatti*: sovraanelli di D piatti come D-moduli.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$.
- *Sottolocalizzazioni*: intersezioni di localizzazioni.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$.

Anelli non locali

Ci sono tre generalizzazioni delle localizzazioni ad anelli non locali:

- *Anelli quoziente*: anelli del tipo $S^{-1}D$, per qualche insieme moltiplicativamente chiuso S.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$.
- *Sovraanelli piatti*: sovraanelli di D piatti come D-moduli.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$.
- *Sottolocalizzazioni*: intersezioni di localizzazioni.
  - Indichiamo questo insieme con $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$.

$$\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D) \subseteq \mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D) \subseteq \mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$$

- Entrambi i due contenimenti possono essere stretti.
- L'intersezione di $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$ e $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$ con gli anelli locali è uguale a $\mathrm{Loc}(D)$; quindi se uno è procostruibile allora D è rad-colon coerente.

Anelli quoziente

- Possiamo rappresentare gli anelli quoziente con gli insiemi moltiplicativamente chiusi saturi.
- Per comodità, usiamo i complementari, ovvero i primi di semigruppo.
  - $\mathscr{Q} \subseteq R$ è un primo di semigruppi se è unione di ideali primi.
  - Equivalentemente, se è un ideale primo del semigruppo $(R, \cdot)$.
- L'insieme $\boldsymbol{\mathcal{S}}(R)$ dei primi di semigruppo di R può essere dotato di una topologia naturale, i cui chiusi di base sono gli insiemi

$$\mathcal{V}(x_1, \dots, x_n) := \{\mathscr{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(R) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathscr{Q}\}.$$

- $\mathrm{Spec}(R)$ si include in $\boldsymbol{\mathcal{S}}(R)$, e questa topologia estende la topologia di Zariski.
- $R \mapsto \boldsymbol{\mathcal{S}}(R)$ è un funtore.

Anelli quoziente (2)

- $\boldsymbol{\mathcal{S}}(R)$ è uno spazio spettrale per ogni anello R.
- Se D è un dominio, c'è un omeomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda_{qr} \colon \boldsymbol{\mathcal{S}}(D) &\longrightarrow \mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D) \\ \mathscr{Q} &\longmapsto (D \setminus \mathscr{Q})^{-1} D \end{aligned}$$

- In particolare, $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$ è spettrale.
- $\mathrm{Over}_{\mathrm{qr}}(D)$ è procostruibile se e solo se, per ogni $x \in K$, $\mathrm{rad}((D :_D x))$ è il radicale di un ideale *principale*.
  - Anche se D è noetheriano non capita sempre: se D è di Dedekind, questo avviene se e solo se il gruppo delle classi è di torsione.
  - Non è una proprietà solo topologica.

Sovraanelli piatti

- $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$ è procostruibile se e solo se ogni intersezione $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D) \cap \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ è compatta.
  - In particolare, avviene se $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D) = \mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$.
- Tuttavia, $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$ può essere spettrale ma non procostruible (esempio: $K[[X^2, X^3, XY, Y]]$).
- Problema: non ho un modo per rappresentare $\mathrm{Over}_{\mathrm{flat}}(D)$ "indipendentemente dai sovraanelli".
- Più in generale: sia M un A-modulo. L'insieme degli A-sottomoduli di M è uno spazio spettrale. Cosa avviene per il sottospazio dei sottomoduli piatti?
  - Se A è un dominio, lo spazio degli A-sottomoduli piatti di M è spettrale se e solo se è procostruibile.

Sottolocalizzazioni

- Ogni $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D) \cap \mathcal{B}(x_1, \ldots, x_n)$ ha minimo (l'intersezione delle localizzazioni contenenti $x_1, \ldots, x_n$) e quindi è compatto.
- In particolare, $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$ è spettrale se e solo se è procostruibile.

Sottolocalizzazioni

- Ogni $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D) \cap \mathcal{B}(x_1, \ldots, x_n)$ ha minimo (l'intersezione delle localizzazioni contenenti $x_1, \ldots, x_n$) e quindi è compatto.
- In particolare, $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$ è spettrale se e solo se è procostruibile.
- Un'operazione semistar $\star$ è spettrale se è del tipo s_Δ per qualche $\Delta \subseteq \mathrm{Spec}(D)$, dove
$$I^{s_\Delta} := \bigcap_{P \in \Delta} ID_P.$$
- s_Δ è di tipo finito se e solo se Δ è compatto.
- Le operazioni spettrali di tipo finito sono classificate dai chiusi non vuoti della topologia inversa di $\mathrm{Spec}(D)$.
- L'insieme $\mathrm{SStar}_{f,sp}(D)$ delle operazioni spettrali di tipo finito è spettrale.

Sottolocalizzazioni (2)

- C'è una mappa continua e suriettiva

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathrm{SStar}_{sp}(D) &\longrightarrow \mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D) \\ s_\Delta &\longmapsto D^{s_\Delta} = \bigcap_{P \in \Delta} D_P \end{aligned}$$

Sottolocalizzazioni (2)

- C'è una mappa continua ~~e suriettiva~~

$$\begin{aligned} \pi_s \colon \mathrm{SStar}_{f,sp}(D) &\longrightarrow \mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D) \\ s_\Delta &\longmapsto D^{s_\Delta} = \bigcap_{P \in \Delta} D_P \end{aligned}$$

- D è rad-colon coerente $\Longrightarrow$ π_s è suriettiva $\Longrightarrow$ $\mathrm{Over}_{\mathrm{sloc}}(D)$ è spettrale.
- In generale π_s non è iniettiva.

Bibliografia

- Eakin, P. e Heinzer, W. (1973), More noneuclidian PID's and Dedekind domains with prescribed class group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40:66–68.
- Hochster, M. (1969), Prime ideal structure in commutative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142:43–60.
- Finocchiaro, C. A. (2014), Spectral spaces and ultrafilters. *Comm. Algebra*, 42(4):1496–1508.