Giornate di Geometria Algebrica e Argomenti Correlati XIII

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania
Catania 25-28 maggio 2016

Abstracts

Ruggero Bandiera

(Università di Roma La Sapienza)

Modelli algebrici della mappa dei periodi e accoppiamento di Yukawa

Dopo aver richiamato l'approccio alla teoria delle deformazioni tramite DGLAs, e più in generale algebre L-infinito, descriveremo alcuni modelli L-infinito della mappa dei periodi locale di una variet Kaehleriana X, e tramite questi costruiremo l'algebra L-infinito che controlla le deformazioni di X dove l'associata variazione di struttura di Hodge soddisfa certi vincoli. Come conseguenza, otteniamo un'interpretazione dell'accoppiamento di Yukawa nel contesto della teoria delle deformazioni. Il talk è basato su una collaborazione con M. Manetti.

Alessio Caminata

(Université de Neuchâtel)

Dimensione coomologica e rango aritmetico di alcune varietà determinantali.

Il *rango aritmetico* di una varietà X in $\mathbb{P}^N$ è il minimo numero r tale che esistono r ipersuperfici $F_1, \ldots, F_r$ la cui intersezione insiemistica è X. Il rango aritmetico è strettamente legato alla *dimensione coomologica* di X, ovvero il minimo intero n tale che $H^i(X, \mathfrak{F}) = 0$ per ogni $i > n$ e per ogni fascio coerente $\mathfrak{F}$. Lo scopo del seminario è studiare questi due invarianti per delle particolari classi di varietà determinantali. Queste sono ottenute come luoghi di zeri di ideali di minori di una matrice le cui entrate sono forme lineari in un anello di polinomi. I risultati sono parte di un lavoro in collaborazione con D. Bolognini, A. Macchia, e M. Mostafazadehfard.

Andrea Cattaneo

(Università degli Studi di Parma)

Fibre singolari di tipo Kodaira e loro contrazioni.

Le fibrazioni ellittiche sono un oggetto di studio che ha suscitato molto interesse: sia in Matematica per le tematiche che affronta, sia in Fisica per i suoi collegamenti con la teoria delle stringhe.
Dal punto di vista della Geometria, il loro studio risale a Kodaira, che ha studiato le superfici ellittiche e ne ha classificato le fibre singolari. Per quanto riguarda la dimensione superiore, e in particolare per i threefolds ellittici, la classificazione delle fibre singolari è invece ancora incompleta.
Il seminario ha lo scopo di evidenziare le analogie e le differenze che sussistono proprio tra superfici e threefolds ellittici, concentrandoci sullo studio delle loro fibre singolari, e in particolare di dimostrare che per una famiglia naturale di fibrazioni ellittiche su threefolds sussiste ancora uno stretto legame tra le loro fibre singolari e quelle indicate da Kodaira.

Alberto Cazzaniga

(African Institute for Mathematical Sciences, Cape Town)

Invarianti raffinati di Donaldson-Thomas e invarianti di Nekrasov per superfici

Alcuni risultati di teoria delle stringhe predicono la relazione fra invarianti di coppie stabili su certe varietà Calabi-Yau aperte di dimensione 3 e invarianti di Nekrasov per risoluzioni di quozienti di superfici per azioni di gruppi finiti di tipo ADE. Discuteremo del calcolo di un raffinamento degli invarianti di Donaldson-Thomas per lo spazio di moduli di coppie stabili framed di rango superiore sulla risoluzione di una singolarità di tipo conifold. Mostreremo poi come la serie genera-trice di tali invarianti sia legata al calcolo della funzione di partizione per istantoni sulla risoluzione di singolarità di tipo A, seguendo un recente progresso dovuto a Nakajima. Analizzeremo infine come questo risultato si inserisce nel contesto della geometric engineering.

Mark Andrea de Cataldo

(Stony Brook University)

Semisemplicità, Frobenius e mappe toriche.

Dopo aver introdotto le nozioni di complesso semisemplice e di complesso Frobenius semisemplice su varietà definite su un campo finito, introdurrò una congettura (de Cataldo-Haines-Li) circa la Frobenius-semisemplicità delle immagini dirette per un morfismo proprio. Discuterò poi il caso delle mappe toriche, per il quale la congettura risulta verificata.

Carmelo Di Natale

(Newcastle University)

Teoria di Hodge e deformazioni di coni affini su varietà proiettive sottocanoniche.

Studiamo la relazione tra la Teoria di Hodge di una varietà proiettiva liscia sottocanonica X di dimensione n e la Teoria delle Deformazioni del cono affine A_X sopra X. In particolare, identifichiamo $H^{n-1,1}_{\text{prim}}(X)$ con una componente graduata del modulo delle deformazioni al primo ordine di A_X e, successivamente, con una componenete graduata della coomologia di Hochschild del cono affine puntato sopra X. Nel caso in cui X é un'ipersuperficie proiettiva liscia, si ritrova l'isomorfismo di Griffiths tra la coomologia primitiva di X ed una certa componente graduata dell'algebra di Milnor associata al polinomio che definisce X.

Il risultato che presentiamo può inoltre essere applicato per calcolare i numeri di Hodge delle varietà proiettive sottocanoniche.

Questo lavoro è una collaborazione con Enrico Fatighenti (University of Warwick) e Domenico Fiorenza (Sapienza Università di Roma).

Valerio Dose

(INdAM - Università di Roma "Tor Vergata")

Automorfismi di Curve Modulari di tipo non-split Cartan.

Le Curve Modulari sono superficie di Riemann i cui punti parametrizzano curve ellittiche su $\mathbb{C}$. Possono essere costruite come la compattificazione di quozienti del semipiano complesso superiore $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ rispetto all'azione di un certo sottogruppo Γ di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Queste hanno anche la struttura di curva algebrica proiettiva, in generale con equazioni definite su un qualche campo ciclotomico, e spesso sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, a seconda della struttura del gruppo Γ.

Il semipiano complesso $\mathcal{H}$ ha un gruppo di automorfismi molto grande, ovvero $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{Id}\}$, i cui elementi agiscono su $\mathcal{H}$ come trasformazioni di Möbius. Data una curva modulare X, **possiamo chiederci se tutti i suoi automorfismi sono indotti da qualche automorfismo di** $\mathcal{H}$. Questa è una domanda interessante in quanto gli automorfismi di X indotti da automorfismi di $\mathcal{H}$ preservano informazioni importanti sulle curve ellittiche parametrizzate da X.

Quando il genere di X è più grande di 1, pochissimi esempi di questo fenomeno sono conosciuti. Inoltre, queste occorrenze eccezionali sono di solito all'origine di comportamenti eccezionali rispetto alle previsioni dell' **"uniformità di Serre"** ([3]), un'importante affermazione riguardante le rappresentazioni di Galois associate a curve ellittiche su $\mathbb{Q}$, che è equivalente ad affermare che certe famiglie di curve modulari non hanno punti razionali, a parte alcune eccezioni. In tutte le eccezioni conosciute, la presenza di questi punti può essere giustificata grazie all'esistenza di qualche automorfismo eccezionale della rispettiva curva modulare.

L'ultimo caso significativo che resta da capire per rispondere definitivamente alla domanda sollevata da Serre, riguarda le curve modulari $X_{ns}^{+}(p)$ associate al normalizatore di un **sottogruppo di Cartan non-split di** $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, dove p è un numero primo. In [1] abbiamo fatto progressi verso la determinazione del gruppo degli automorfismi delle curve modulari $X_{ns}(p)$ associate a un sottogruppo non-split Cartan di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, per quasi tutti i p. In un lavoro precedente ([2]), abbiamo calcolato esplicitamente equazioni e automorfismi di $X_{ns}(11)$, dimostrando così l'esistenza in questo caso di un automorfismo eccezionale.

Bibliografia

[1] V. DOSE, *On the automorphisms of the non-split Cartan modular curves of prime level*, accepted by Nagoya Mathematical Journal, arXiv:1503.05165.

[2] V. DOSE, J. FERNÁNDEZ, J. GONZÁLEZ AND R. SCHOOF,*The automorphism group of the non-split Cartan modular curve of level 11*, J. of Algebra **417** (2014), 95–102.

[3] J.-P. SERRE, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15(4)** (1972), 259–331

Andrea Fanelli

(Universität Basel)

Sottogruppi algebrici connessi massimali del gruppo di Cremona.

Il gruppo di Cremona (in dimensione n) è il gruppo delle trasformazioni birazionali dello spazio proiettivo complesso di dimensione n. Già in dimensione due, il gruppo di Cremona non è algebrico; la classificazione dei sottogruppi algebrici connessi massimali del gruppo di Cremona bidimensionale, a meno di coniugio, è classica (Enriques, 1893). La medesima classificazione nel caso tridimensionale è stata ottenuta da Umemura negli anni 80 del secolo scorso, attraverso le tecniche della teoria dei gruppi algebrici. L'idea di questo progetto consiste nel reinterpretare i risultati di Umemura alla luce delle moderne tecniche di geometria birazionale, anche nella prospettiva di generalizzare queste tecniche in dimensione più alta. Questo seminario è basato su una collaborazione con Jérémy Blanc (Basel) e Ronan Terpereau (MPIM-Bonn).

Roberto Fringuelli

(Università di Roma Tre)

Il gruppo di Picard dello spazio di moduli universale dei fibrati vettoriali su curve stabili.

Presenteremo lo stack di moduli universale dei fibrati vettoriali propriamente bilanciati su curve semistabili e determineremo esplicitamente il suo gruppo di Picard. Come conseguenza, otterremo una descrizione esplicita dei gruppi di Picard dello stack di moduli universale dei fibrati vettoriali su curve lisce e della compattificazione di Schmitt sopra lo stack delle curve stabili. Daremo alcuni risultati sulla struttura di gerbe dello stack di moduli universale sopra la sua rigidificazione per l'azione naturale del gruppo moltiplicativo. In particolare, daremo condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un fibrato di Poincaré sulla curva universale della rigidificazione.

Francesco Genovese

(Università di Pavia)

Il problema dell'unicità dei nuclei di Fourier-Mukai e dei dg-lift.

Dato un funtore esatto tra categorie derivate di varietà o schemi, siamo interessati a determinare se esso ha un (unico) nucleo di Fourier-Mukai.

Questo problema è stato affrontato, tra gli altri, da Orlov, Canonaco-Stellari, Rizzardo-Van Den Bergh. In questo seminario spiegherò come il problema di esistenza e unicità dei nuclei di Fourier-Mukai può essere tradotto nel problema di esistenza e unicità dei "dg-lift", e come il formalismo delle dg-categorie (e degli A_∞-funtori) può essere impiegato per dimostrare un interessante risultato di unicità.

Victor Lozovanu

(Université de Caen Normandie)

From convex geometry of certain valuations to positivity aspects in algebraic geometry.

A few years ago Okounkov associated a convex set (Newton–Okounkov body) to a divisor, which encodes the asymptotic vanishing behaviour of all sections of all powers of the divisor along a fixed flag. This, on the other hand, brought to light the following guiding principle "use convex geometry, through the theory of Newton–Okounkov bodies, to study the geometrical/algebraic/arithmetic properties of divisors on smooth projective varieties". The main goal of this talk is to explain some of the philosophical underpinnings of this principle with a view towards studying local positivity and syzygetic properties of algebraic varieties.

Diletta Martinelli

(Imperial College London)

Sul numero di modelli minimali di una varietà liscia di dimensione tre.

Da tempo si congettura che il numero di modelli minimali di una varietà liscia e proiettiva sia finito modulo isomorfismi. Questa congettura è stata dimostrata da Birkar, Cascini, Hacon e McKernan nel caso di una varietà di tipo generale. In questo seminario parlerò della possibilità di trovare un bound per il numero di modelli minimali di una varietà di tipo generale di dimensione tre dipendente dalla sua topologia come varietà complessa. Tempo permettendo spiegherò inoltre come questo problema sia legato alla possibilità di trovare un bound per il grado dei generatori dell'anello canonico.

Giovanni Mongardi

(Università degli studi di Milano)

La varietà sei dimensionale di O'Grady vista come quoziente.

La varietà sei dimensionale di O'Grady è classicamente ottenuta come risoluzione minimale di uno spazio di moduli di fasci semistabili su una superficie abeliana. In collaborazione con A. Rapagnetta e G. Saccà, ottengo tale varietà come quoziente per una involuzione di una varietà liscia. In tal modo, possiamo calcolare i suoi numeri di Hodge e ottenere molte altre sue proprietà.

Riccardo Moschetti

(University of Stavanger)

La categoria derivata di un cubic fourfold contenente un piano.

Cubic fourfold e superfici K3 appartengono a due mondi molto diversi: da una parte le varietà di Fano, dall'altra le varietà di Calabi-Yau. Questi due mondi sono messi in relazione dal problema della razionalità. Secondo la congettura di Kuznetsov, un cubic fourfold X è razionale se e solo se una particolare sottocategoria, chiamata $\mathscr{T}_X$, della categoria derivata $\mathbf{D}^b(X)$ è equivalente alla categoria derivata di una superficie K3. Questa congettura mostra un legame sorprendente tra cubic fourfold e superfici K3, ma fornisce anche un esempio di un problema geometrico che può essere riformulato con il linguaggio delle categorie derivate.

Kuznetsov riuscì a mostrare che, se X è un cubic fourfold generico contenente un piano, è possibile mostrare un'equivalenza categoriale tra $\mathscr{T}_X$ e la categoria derivata di una K3 twistata per un'opportuna algebra di Azumaya. Nel caso di un cubic fourfold liscio non generico contenente un piano il metodo utilizzato da Kuznetsov per trovare l'algebra di Azumaya non è generalizzabile. Nel corso del seminario parlerò di come, utilizzando un altro risultato di Kuznetsov riguardante i cubic fivefold, sia possibile generalizzare l'equivalenza anche a tutti i cubic fourfold lisci contenenti un piano.

Gianluca Pacienza

(Université de Strasbourg)

Sottovarietà coisotrope e 0-cicli di varietà olomorfe simplettiche.

Grazie a un celebre risultato di Mumford sappiamo che il gruppo di Chow degli 0-cicli di una superficie K3 è di dimensione infinita. La congettura di Bloch-Beilinson predice tuttavia l'esistenza di una struttura su tale gruppo (la filtrazione di Bloch-Beilinson). Questa congettura appare purtroppo attualmente irraggiungibile. Claire Voisin ha proposto recentemente un nuovo approccio, molto geometrico, per lo studio del gruppo di Chow degli 0-cicli sulle varietà olomorfe simplettiche (la generalizzazione ad ogni dimensione delle superfici K3). Gli oggetti chiave nel il suo approccio sono le sottovarietà coisotrope coperte da sottovarietà a 0-cicli costanti. Nel seminario presenterò vari risultati sull'esistenza e la teoria delle deformazioni di tali sottovarietà, ottenuti in una serie di lavori in collaborazione con F. Charles, Ch. Lehn e G. Mongardi, e alcune applicazioni agli 0-cicli.

Roberto Pirisi

(University of Ottawa)

La congettura di Franchetta abeliana e il gruppo di Picard della varietà abeliana universale.

Sia $g \geq 3$ e sia M_g lo spazio dei moduli delle curve liscie di genere g su $\mathbb{C}$. La classica *congettura di Franchetta* asserisce che il gruppo di Picard della curva generica C_μ su M_g è generato dal fibrato cotangente ω_{C_g}. Fu provata da Arbarello e Cornalba negli anni '80, quindi Mestrano ('87) e Kouvidakis ('91) ne dedussero la *congettura di Franchetta forte*, che dice che i punti razionali dello schema di Picard relativo Pic_{C_μ} sono precisamente i multipli del fibrato cotangente.

Mostreremo come una versione adattata della congettura di Franchetta sia valida per un diverso problema di moduli su $\mathbb{C}$, quello delle varietà abeliane principalmente polarizzate di genere g con struttura di livello. La *congettura di Franchetta abeliana* asserisce che il gruppo di Picard della varietà abeliana generica $X_{g,n}$ con struttura di livello n è isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, con generatori dati dal fibrato che induce la polarizzazione e dalle radici n-esime del fascio strutturale, che sono determinate dalla struttura di livello.

Nel caso delle varietà abeliane, l'enunciato implica immediatamente una versione "forte" riguardante le sezioni dello schema di Picard relativo. Una volta provata la congettura di Franchetta abeliana, la useremo per calcolare il gruppo fondamentale della varietà abeliana universale $\mathscr{X}_{g,n} \to \mathscr{A}_{g,n}$.

Lavoro in collaborazione con R. Fringuelli.

Giangiacomo Sanna

(Freie Universität Berlin)

Fibrati vettoriali aCM sulle quintiche di del Pezzo.

La decomposizione di Lefschetz per la coomologia della Gr(2,5) e delle sue sezioni iperpiane solleva, per dualità proiettiva omologica, ad una decomposizione delle rispettive categorie derivate. In una collaborazione con Casnati, Malaspina e Faenzi, queste decomposizioni vengono usate per descrivere lo spazio dei moduli dei fibrati aCM, fibrati la cui coomologia intermedia si annulla per ogni twist.

Luca Schaffler

(University of Georgia)

La compattificazione KSBA dello spazio di moduli delle superfici di Enriques $D_{1,6}$-polarizzate.

Motivati dallo studio di una compattificazione dello spazio di moduli delle superfici di Enriques utilizzando coppie stabili, descriviamo il wall-crossing per le coppie $((\mathbb{P}^1)^3, \alpha\Delta + \beta B)$ e le loro degenerazioni stabili, dove Δ è il bordo torico di $(\mathbb{P}^1)^3$ e B è un divisore effettivo di classe $(1, 1, 1)$. Questo descrive il bordo di uno spazio di moduli proiettivo che genericamente parametrizza le superfici di Enriques $D_{1,6}$-polarizzate, che sono il $\mathbb{Z}_2^2$-rivestimento di un generico B ramificato lungo $\Delta|_B$. Colleghiamo la stratificazione del bordo di questo spazio di moduli con la combinatoria delle suddivisioni del cubo unitario.

Dario Spirito

(Università di Roma Tre)

Proprietà topologiche di insiemi di sovraanelli.

Un *sovraanello* di un dominio d'integrità D è un anello compreso tra D e il suo campo dei quozienti K. L'insieme $\mathrm{Over}(D)$ dei sovraanelli di D può essere dotato in modo naturale di una struttura di spazio topologico, generalizzando la topologia introdotta da O. Zariski sullo spazio dei sovraanelli di valutazione nel corso del suo studio sulla risoluzione delle singolarità in caratteristica 0.

Lo scopo di questa conferenza è studiare, dal punto di vista topologico, i sottospazi di $\mathrm{Over}(D)$ formati da anelli con proprietà di interesse algebrico (ad esempio anelli locali, anelli integralmente chiusi, anelli di Prüfer o anelli noetheriani). In particolare, vengono analizzate tre proprietà: l'essere uno spazio compatto, l'essere uno spazio spettrale (ovvero essere omeomorfi allo spettro primo di un anello) e l'essere chiusi nella topologia costruibile indotta dalla topologia di $\mathrm{Over}(D)$. Vengono presentati esempi in cui queste proprietà valgono, in cui valgono sotto ulteriori ipotesi e in cui non valgono. In particolare, vengono studiate le proprietà dello spazio delle localizzazioni di D e di altri spazi che lo generalizzano.

Roberto Svaldi

(University of Cambridge)

Una caratterizzazione geometrica delle varietà toriche

Data una coppia (X, D), dove X è una varietà propria e D un divisore effettivo con singolarità ristrette, è naturale chiedersi se sia possibile limitare il numero delle componenti di D. In generale, ciò non è possibile. Tuttavia, quando $-(K_X + D)$ è positivo, cioè ampio o nef, una congettura di Shokurov prevede che tale limite dovrebbe coincidere con la somma della dimensione di X e del suo numero di Picard. In collaborazione con M. Brown, J. M$^{\mathrm{c}}$Kernan e H. R. Zong, dimostriamo come, nelle ipotesi elencate sopra, la congettura di Shokurov sia vera ed inoltre se il numero di componenti di D è sufficientemente vicino a realizzare il limite, allora X è una varietà torica e alcune componenti di D formano un divisore invariante per l'azione del toro massimale su X.

Marco Trozzo

(Università di Bologna)

Schemi di Hilbert e teoria di Hodge non abeliana su curve ellittiche.

Sia Σ una curva ellittica e $T^*\Sigma$ il suo fibrato tangente. Esiste un isomorfismo tra i gruppi di coomologia degli schemi di Hilbert $(T^*\Sigma)^{[n]}$ e $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)^{[n]}$ in cui la filtrazione perversa associata alla fibrazione di Hitchin su $(T^*\Sigma)^{[n]}$ corrisponde alla filtrazione dei pesi su $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)^{[n]}$. Tale isomorfismo viene interpretato come analogo alla coincidenza delle due filtrazioni riscontrata per fibrati di Higgs di rango due su una curva di genere maggiore di uno (congettura $P = W$).
In un recente lavoro M. Groechenig identifica lo schema $(T^*\Sigma)^{[n]}$ con lo spazio di moduli di fibrati di Higgs con un dato di stabilità, mediante l'utilizzo della trasformata di Fourier-Mukai relativa, e lo schema di Hilbert di una deformazione $\Sigma^\natural$ di $T^*\Sigma$ con lo spazio dei moduli di connessioni piatte. Tale schema di Hilbert risulta biolomorfo a $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)^{[n]}$ e tale isomorfismo può pensarsi come un analogo della corrispondenza di Riemann-Hilbert.
Descriveremo gli oggetti che vengono parametrizzati da questi spazi in termini di estensioni rispetto a una filtrazione naturale, fornendo una presentazione esplicita in termini di fattori di automorfia dei fibrati di Higgs, rispettivamente connessioni, associati ai sottoschemi di lunghezza $n \leq 3$.
Si discuteranno brevemente in questo caso alcune congetture di Simpson sulle compattificazioni di tali spazi di moduli e sul dual boundary complex della varietà dei caratteri.

Davide Cesare Veniani

(Leibniz Universität Hannover)

Rette su superfici quartiche K3 in caratteristica positiva.

Se X è una superficie quartica liscia complessa nello spazio proiettivo, allora X contiene al più 64 rette. Questo risultato fu correttamente formulato per la prima volta da B. Segre nel 1943 e correttamente dimostrato 70 anni dopo da Rams e Schütt. Il teorema è vero anche per quartiche definite su campi algebricamente chiusi di caratteristica positiva diversa da 2 e 3. Se la caratteristica del campo è uguale a 3, allora X può contenere fino a 112 rette. Se la caratteristica del campo è uguale a 2, X può contenere al più solo 60 rette; d'altra parte, se X non è liscia, ma ammette punti razionali doppi isolati, allora X può contenere fino a 68 rette. Il motivo di questi fenomeni è da ricondursi alla speciale geometria delle superfici K3 in caratteristica 2 e 3 e, soprattutto, alla presenza di fibrazioni quasi-ellittiche.