

In[1]:= $r * (5 * c1^2 - 10 * c1 + 8) / (3 * c1^2 - 8 * c1 + 8)$

$$\text{Out[1]} = \frac{(8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{8 - 8 c1 + 3 c1^2}$$

In[2]:= $(1/2) * (3 * (a^2) * (c1 - 2)^2 / 4 - (1/2) * a * (-2 * c1^2 + 4 * c1 - 5) + (r / (12)) * (5 * c1^2 + 2 * c1 + 41 + (7 * c1^2 + 16 * c1 + 52) / 4 - 51 * (3 * c1^2 - 4 * c1 + 8) / 4)$

$$\text{Out[2]} = \frac{3}{8} a^2 (-2 + c1)^2 - \frac{1}{2} a (-5 + 4 c1 - 2 c1^2) + \frac{1}{12} \left(41 + 2 c1 + 5 c1^2 - \frac{51}{4} (8 - 4 c1 + 3 c1^2) + \frac{1}{4} (52 + 16 c1 + 7 c1^2) \right) r$$

In[3]:= **Expand[%]**

$$\text{Out[3]} = \frac{5 a}{2} + \frac{3 a^2}{2} - 2 a c1 - \frac{3 a^2 c1}{2} + a c1^2 + \frac{3 a^2 c1^2}{8} - 4 r + \frac{19 c1 r}{4} - \frac{21 c1^2 r}{8}$$

In[4]:= **Factor[%]**

$$\text{Out[4]} = \frac{1}{8} (20 a + 12 a^2 - 16 a c1 - 12 a^2 c1 + 8 a c1^2 + 3 a^2 c1^2 - 32 r + 38 c1 r - 21 c1^2 r)$$

In[5]:= **Out[4] / ((c1^2 - 2 * c1 + 4) / 4)**

$$\text{Out[5]} = \frac{20 a + 12 a^2 - 16 a c1 - 12 a^2 c1 + 8 a c1^2 + 3 a^2 c1^2 - 32 r + 38 c1 r - 21 c1^2 r}{2 (4 - 2 c1 + c1^2)}$$

In[6]:= $a * \alpha * ((c1 - 2)^2 / 4 - (1/3) * (a^3) * (c1 - 2) * (3 * c1 - 10) / 4 - (1/2) * (a^2) * (c1 - 2) * (2 * c1 - 3) + (\alpha / 2) * (c1^2 - c1 + 8) - (a / 6) * (17 - 6 * c1 + 5 * c1^2) - (a / 6) * (7 c1^2 + 4 c1 + 4) / 4 + (r / (12)) * (-4 * c1^2 - 13 * c1 - 88) + r * 5 * ((5 + 1)^2) * (c1^2 - ((1/4) * c1^2 + c1 - 2)) / (24)$

$$\text{Out[6]} = \frac{1}{4} a \alpha (-2 + c1)^2 - \frac{1}{2} a^2 (-2 + c1) (-3 + 2 c1) - \frac{1}{12} a^3 (-2 + c1) (-10 + 3 c1) + \frac{1}{2} \alpha (8 - c1 + c1^2) - \frac{1}{6} a (17 - 6 c1 + 5 c1^2) - \frac{1}{24} a (4 + 4 c1 + 7 c1^2) + \frac{1}{12} (-88 - 13 c1 - 4 c1^2) r + \frac{15}{2} \left(2 - c1 + \frac{3 c1^2}{4} \right) r$$

In[7]:= **Expand[%]**

$$\text{Out[7]} = -3 a - 3 a^2 - \frac{5 a^3}{3} + 4 \alpha + a \alpha + \frac{5 a c1}{6} + \frac{7 a^2 c1}{2} + \frac{4 a^3 c1}{3} - \frac{\alpha c1}{2} - a \alpha c1 - \frac{9 a c1^2}{8} - a^2 c1^2 - \frac{a^3 c1^2}{4} + \frac{\alpha c1^2}{2} + \frac{1}{4} a \alpha c1^2 + \frac{23 r}{3} - \frac{103 c1 r}{12} + \frac{127 c1^2 r}{24}$$

In[8]:= **ReplaceAll**[Out[7],

{alpha → (20 * a + 12 * a^2 - 16 * a * c1 - 12 * (a^2) * c1 + 8 * a * c1^2 + 3 * (a^2) * c1^2 - 32 * r + 38 * c1 * r - 21 * (c1^2) * r) / (2 * (c1^2 - 2 * c1 + 4))}]

$$\begin{aligned} \text{Out[8]} = & -3a - 3a^2 - \frac{5a^3}{3} + \frac{5ac1}{6} + \frac{7a^2c1}{2} + \frac{4a^3c1}{3} - \frac{9ac1^2}{8} - a^2c1^2 - \frac{a^3c1^2}{4} + \frac{23r}{3} - \frac{103c1r}{12} + \\ & \frac{127c1^2r}{24} + \frac{2(20a + 12a^2 - 16ac1 - 12a^2c1 + 8ac1^2 + 3a^2c1^2 - 32r + 38c1r - 21c1^2r)}{4 - 2c1 + c1^2} + \\ & \frac{a(20a + 12a^2 - 16ac1 - 12a^2c1 + 8ac1^2 + 3a^2c1^2 - 32r + 38c1r - 21c1^2r)}{2(4 - 2c1 + c1^2)} - \\ & \frac{c1(20a + 12a^2 - 16ac1 - 12a^2c1 + 8ac1^2 + 3a^2c1^2 - 32r + 38c1r - 21c1^2r)}{4(4 - 2c1 + c1^2)} - \\ & \frac{ac1(20a + 12a^2 - 16ac1 - 12a^2c1 + 8ac1^2 + 3a^2c1^2 - 32r + 38c1r - 21c1^2r)}{2(4 - 2c1 + c1^2)} + \\ & \frac{c1^2(20a + 12a^2 - 16ac1 - 12a^2c1 + 8ac1^2 + 3a^2c1^2 - 32r + 38c1r - 21c1^2r)}{4(4 - 2c1 + c1^2)} + \\ & \frac{ac1^2(20a + 12a^2 - 16ac1 - 12a^2c1 + 8ac1^2 + 3a^2c1^2 - 32r + 38c1r - 21c1^2r)}{8(4 - 2c1 + c1^2)} \end{aligned}$$

In[9]:= **Expand**[%]

$$\begin{aligned} \text{Out[9]} = & -3a - 3a^2 - \frac{5a^3}{3} + \frac{5ac1}{6} + \frac{7a^2c1}{2} + \frac{4a^3c1}{3} - \frac{9ac1^2}{8} - a^2c1^2 - \frac{a^3c1^2}{4} + \\ & \frac{40a}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{34a^2}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{6a^3}{4 - 2c1 + c1^2} - \frac{37ac1}{4 - 2c1 + c1^2} - \frac{45a^2c1}{4 - 2c1 + c1^2} - \\ & \frac{12a^3c1}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{25ac1^2}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{53a^2c1^2}{2(4 - 2c1 + c1^2)} + \frac{9a^3c1^2}{4 - 2c1 + c1^2} - \frac{6ac1^3}{4 - 2c1 + c1^2} - \\ & \frac{39a^2c1^3}{4(4 - 2c1 + c1^2)} - \frac{3a^3c1^3}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{2ac1^4}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{7a^2c1^4}{4(4 - 2c1 + c1^2)} + \\ & \frac{3a^3c1^4}{8(4 - 2c1 + c1^2)} + \frac{23r}{3} - \frac{103c1r}{12} + \frac{127c1^2r}{24} - \frac{64r}{4 - 2c1 + c1^2} - \frac{16ar}{4 - 2c1 + c1^2} + \\ & \frac{84c1r}{4 - 2c1 + c1^2} + \frac{35ac1r}{4 - 2c1 + c1^2} - \frac{119c1^2r}{2(4 - 2c1 + c1^2)} - \frac{67ac1^2r}{2(4 - 2c1 + c1^2)} + \\ & \frac{59c1^3r}{4(4 - 2c1 + c1^2)} + \frac{61ac1^3r}{4(4 - 2c1 + c1^2)} - \frac{21c1^4r}{4(4 - 2c1 + c1^2)} - \frac{21ac1^4r}{8(4 - 2c1 + c1^2)} \end{aligned}$$

In[10]:= **ReplaceAll**[Out[9], {a → r * (5 * c1^2 - 10 * c1 + 8) / (3 * c1^2 - 8 * c1 + 8)}]

Out[10]=

$$\begin{aligned}
& \frac{23 r}{3} - \frac{103 c1 r}{12} + \frac{127 c1^2 r}{24} - \frac{64 r}{4 - 2 c1 + c1^2} + \frac{84 c1 r}{4 - 2 c1 + c1^2} - \\
& \frac{119 c1^2 r}{2 (4 - 2 c1 + c1^2)} + \frac{59 c1^3 r}{4 (4 - 2 c1 + c1^2)} - \frac{21 c1^4 r}{4 (4 - 2 c1 + c1^2)} - \\
& \frac{3 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{8 - 8 c1 + 3 c1^2} + \frac{5 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{6 (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \frac{9 c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{8 (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} + \\
& \frac{40 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \frac{37 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} + \\
& \frac{25 c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \frac{6 c1^3 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} + \\
& \frac{2 c1^4 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \frac{16 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r^2}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} + \\
& \frac{35 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r^2}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \frac{67 c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r^2}{2 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} + \\
& \frac{61 c1^3 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r^2}{4 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \frac{21 c1^4 (8 - 10 c1 + 5 c1^2) r^2}{8 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)} - \\
& \frac{3 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{(8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} + \frac{7 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{2 (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} - \frac{c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{(8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} + \\
& \frac{34 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} - \frac{45 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} + \\
& \frac{53 c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{2 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} - \frac{39 c1^3 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{4 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} + \\
& \frac{7 c1^4 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^2 r^2}{4 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^2} - \frac{5 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{3 (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} + \frac{4 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{3 (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} - \\
& \frac{c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{4 (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} + \frac{6 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} - \\
& \frac{12 c1 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} + \frac{9 c1^2 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} - \\
& \frac{3 c1^3 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{(4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3} + \frac{3 c1^4 (8 - 10 c1 + 5 c1^2)^3 r^3}{8 (4 - 2 c1 + c1^2) (8 - 8 c1 + 3 c1^2)^3}
\end{aligned}$$

In[11]:= **Expand**[%]

Out[11]=

$$\frac{23 r}{3} - \frac{103 c1 r}{12} + \frac{127 c1^2 r}{24} - \frac{64 r}{4 - 2 c1 + c1^2} + \frac{84 c1 r}{4 - 2 c1 + c1^2} - \frac{119 c1^2 r}{2 (4 - 2 c1 + c1^2)} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{59 c_1^3 r}{4 (4 - 2 c_1 + c_1^2)} - \frac{21 c_1^4 r}{4 (4 - 2 c_1 + c_1^2)} - \frac{24 r}{8 - 8 c_1 + 3 c_1^2} + \frac{110 c_1 r}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \\
& \frac{97 c_1^2 r}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \frac{185 c_1^3 r}{12 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{45 c_1^4 r}{8 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{320 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{696 c_1 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{770 c_1^2 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{483 c_1^3 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{201 c_1^4 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{50 c_1^5 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{10 c_1^6 r}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{192 r^2}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \frac{704 c_1 r^2}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \\
& \frac{1164 c_1^2 r^2}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \frac{1090 c_1^3 r^2}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \frac{605 c_1^4 r^2}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \frac{375 c_1^5 r^2}{2 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \\
& \frac{25 c_1^6 r^2}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \frac{2176 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \frac{8320 c_1 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \\
& \frac{15016 c_1^2 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \frac{16364 c_1^3 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \\
& \frac{11792 c_1^4 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \frac{5810 c_1^5 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \\
& \frac{3905 c_1^6 r^2}{2 (4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \frac{1675 c_1^7 r^2}{4 (4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} + \\
& \frac{175 c_1^8 r^2}{4 (4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^2} - \frac{128 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{440 c_1 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{698 c_1^2 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{632 c_1^3 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{341 c_1^4 r^2}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} + \\
& \frac{205 c_1^5 r^2}{2 (4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \frac{105 c_1^6 r^2}{8 (4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)} - \\
& \frac{2560 r^3}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} + \frac{11648 c_1 r^3}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} - \frac{8288 c_1^2 r^3}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} + \\
& \frac{31880 c_1^3 r^3}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} - \frac{26620 c_1^4 r^3}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} + \frac{4900 c_1^5 r^3}{(8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} - \frac{5200 c_1^6 r^3}{3 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} + \\
& \frac{2125 c_1^7 r^3}{6 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} - \frac{125 c_1^8 r^3}{4 (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} + \frac{3072 r^3}{(4 - 2 c_1 + c_1^2) (8 - 8 c_1 + 3 c_1^2)^3} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{17\,664\,c_1\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} + \frac{47\,808\,c_1^2\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} - \\
& \frac{79\,536\,c_1^3\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} + \frac{89\,592\,c_1^4\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} - \\
& \frac{71\,100\,c_1^5\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} + \frac{40\,110\,c_1^6\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} - \\
& \frac{15\,825\,c_1^7\,r^3}{(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} + \frac{8\,325\,c_1^8\,r^3}{2(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} - \\
& \frac{2\,625\,c_1^9\,r^3}{4(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3} + \frac{375\,c_1^{10}\,r^3}{8(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3}
\end{aligned}$$

In[12]:= **Factor[%]**

Out[12]=

$$\begin{aligned}
& \left((-2+c_1)\,r \right. \\
& \quad \left(32\,768 - 79\,872\,c_1 + 32\,256\,c_1^2 + 141\,824\,c_1^3 - 289\,536\,c_1^4 + 277\,920\,c_1^5 - 159\,400\,c_1^6 + \right. \\
& \quad 56\,064\,c_1^7 - 11\,214\,c_1^8 + 972\,c_1^9 - 36\,864\,r + 73\,728\,c_1\,r + 37\,632\,c_1^2\,r - 317\,184\,c_1^3\,r + \\
& \quad 524\,064\,c_1^4\,r - 472\,800\,c_1^5\,r + 263\,112\,c_1^6\,r - 90\,516\,c_1^7\,r + 17\,640\,c_1^8\,r - \\
& \quad 1485\,c_1^9\,r + 4096\,r^2 + 7168\,c_1\,r^2 - 68\,864\,c_1^2\,r^2 + 164\,416\,c_1^3\,r^2 - 212\,480\,c_1^4\,r^2 + \\
& \quad \left. 171\,280\,c_1^5\,r^2 - 88\,400\,c_1^6\,r^2 + 28\,300\,c_1^7\,r^2 - 5000\,c_1^8\,r^2 + 375\,c_1^9\,r^2 \right) \Big/ \\
& \left(24(4-2\,c_1+c_1^2)(8-8\,c_1+3\,c_1^2)^3 \right)
\end{aligned}$$

In[13]:= **Solve[Out[12] == 0 && c1 ≥ 5 && r ≥ 2, c1, Integers]**

Out[13]=

{}