UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Proprietà di positività di divisori reali e del loro bracket

Candidato

Franco Pasquale

Relatore

Prof. Angelo Felice Lopez

Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

In ogni branca della matematica ci sono dei "problemi guida" che offrono spunti di lavoro e servono da parametri per misurare i progressi nel campo. Nella geometria birazionale uno di questi problemi è la classificazione delle varietà algebriche a meno di equivalenza birazionale che, anche se meno forte della classificazione a meno di isomorfismo, fornisce comunque molte informazioni. La teoria dei divisori e dei sistemi lineari si inserisce a pieno titolo nel lavoro di ricerca di invarianti birazionali per varietà algebriche.

In particolare i sistemi lineari hanno sempre giocato un ruolo fondamentale fin dai tempi della cosiddetta Scuola italiana di geometria algebrica che, tra il 1890 e il 1930 circa, sotto la guida di geometri come Castelnuovo, Enriques e Severi, ottenne importantissimi risultati soprattutto per quanto riguarda la classificazione birazionale delle superfici algebriche.

Fu con l'introduzione dei metodi della teoria dei fasci intorno agli anni 50 del '900 che, in particolare con i lavori di Grothendieck, Kodaira e Serre, si confermò l'importanza dell'ampiezza dei divisori e si diede quindi inizio ad uno studio approfondito della positività.

Negli anni 60 si arrivò a caratterizzare l'ampiezza coomologicamente (Teorema di Cartan-Serre-Grothendieck) e numericamente (criterio di Nakai-Moishazen-Kleiman). Con Zariski e altri si iniziò successivamente a studiare il comportamento, più complicato, di divisori vicini all'essere ampi, ad esempio i divisori nef e big, che sono molto importanti nelle prospettive attuali.

Ricordiamo ora le varie nozioni di positività. Sia D un divisore di Cartier su una varietà X. D si dice:

- *molto ampio* se esiste un'immersione chiusa $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ tale che $D = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ e *ampio* se mD è molto ampio per un $m \in \mathbb{N}$ (si veda la sezione 1.4);
- *big* se $\kappa(X, \mathcal{O}_X(D)) = \dim X$ (si veda la sezione 2.3);
- *nef* se $(D \cdot C) \geq 0$ per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$ (si veda la sezione 2.1).

Un tipico strumento per lo studio della positività di un divisore è il morfismo $\varphi_{|mD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big)$, definito dal sistema lineare $|mD|$ per qualche $m \in \mathbb{N}$. Infatti si dimostra che:

> un divisore di Cartier D è ampio se e solo se $\varphi_{|mD|}$ è un'immersione e D è big se e solo se $\varphi_{|mD|}$ è birazionale sull'immagine (si veda il corollario 2.3.5).

Sempre nell'ambito dello studio della positività, è spesso molto utile saper lavorare con piccole perturazioni delle classi di divisori e questo lo si può fare usando i concetti e il formalismo dei $\mathbb{Q}$-divisori e degli $\mathbb{R}$-divisori. Il problema, ed è quì che si colloca questo lavoro di tesi, è che molte proprietà di positività dei divisori sono connesse, come detto, al comportamento asintotico dei morfismi associati, che in particolare richiedono la nozione di sezione globale la quale non esiste per $\mathbb{Q}$-divisori ed $\mathbb{R}$-divisori. Per i $\mathbb{Q}$-divisori il discorso è meno complicato, infatti basta prendere un multiplo intero del divisore. Ma per gli $\mathbb{R}$-divisori non c'era, fino a poco tempo fa, un modo standard per ottenere un divisore intero (ad eccezione della parte intera, che però presenta problemi di positività).

Useremo un metodo introdotto recentemente da Caucher Birkar ([Bir13]): dato un divisore reale L su una varietà proiettiva X è sempre possibile trovare numeri reali $t_i \in \mathbb{R}$ e divisori interi molto ampi A_i tali che

$$L \sim_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{s} t_i A_i.$$

Considerato un intero positivo $m \in \mathbb{N}$, Birkar definisce il *bracket* di mL come

$$\langle mL\rangle := \sum_{i=1}^{s} \lfloor mt_i \rfloor A_i$$

dove $\lfloor mt_i \rfloor$ è la parte intera del numero reale mt_i. Abbiamo ottenuto così un divisore intero $\langle mL\rangle$.

La domanda che ci poniamo, e a cui questa tesi cerca di rispondere, è: che relazione c'è tra la positività degli $\mathbb{R}$-divisori e quella del loro bracket?

Ma andiamo con ordine.

Usando la teoria dell'intersezione possiamo costruire una relazione d'equivalenza numerica su divisori interi che può essere estesa agli $\mathbb{R}$-divisori. Questo ci permette di definire il gruppo $N^1(X)_\mathbb{R}$ delle classi di equivalenza numerica di divisori reali su X, detto gruppo di Néron-Severi. $N^1(X)_\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale finito-dimensionale. Vediamo quali sono alcune nozioni di positività per gli $\mathbb{R}$-divisori. Un $\mathbb{R}$-divisore di Cartier L su una varietà X si dice:

- *ampio* se si può esprimere come somma finita $L = \sum_i a_i A_i$ con $a_i > 0$ per ogni i e A_i divisore di Cartier ampio per ogni i;
- $effettivo$ se si può esprimere come somma finita $L = \sum_i a_i A_i$ con $a_i \geq 0$ per ogni i e A_i divisore di Cartier effettivo per ogni i;
- *big* se si può esprimere come somma finita $L = \sum_i a_i A_i$ con $a_i > 0$ per ogni i e A_i divisore di Cartier big per ogni i o, equivalentemente, se $L \equiv_{num} A + E$ con A $\mathbb{R}$-divisore ampio e E $\mathbb{R}$-divisore effettivo (si veda la proposizione 2.3.7);
- nef se $(L \cdot C) \geq 0$ per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$;
- $pseudoeffettivo$ se è limite di classi effettive (definizione 2.9).

Si dimostra, grazie alla caratterizzazione numerica dei divisori reali ampi (Nakai-Campana-Peternell) e dei divisori reali big, che le classi di equivalenza numerica conservano tanto l'ampiezza quanto l'essere big. Siamo quindi in grado di parlare di *classi ampie* e *classi big* e dei loro rispettivi insiemi $\mathrm{Amp}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$ e $\mathrm{Big}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Essendo $\mathrm{Amp}(X)$ e $\mathrm{Big}(X)$ chiusi rispetto alla moltiplicazione per scalari positivi, possiamo allora considerarli coni convessi nello spazio di Néron-Severi $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ e ci riferiamo ad essi come al *cono ampio* e al *cono big* la cui chiusura sono rispettivamente il cono di tutte le classi nef $\mathrm{Nef}(X)$ e il cono generato da tutte le classi effettive $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ detti *cono nef* e *cono pseudoeffettivo*. Abbiamo quindi (teoremi 2.2.1 e 2.4.1)

$$\mathrm{Amp}(X) = \mathrm{int}\left(\mathrm{Nef}(X)\right) \text{ e } \overline{\mathrm{Amp}(X)} = \mathrm{Nef}(X)$$

e

$$\mathrm{Big}(X) = \mathrm{int}\left(\mathrm{Eff}(X)\right) \text{ e } \overline{\mathrm{Big}(X)} = \overline{\mathrm{Eff}}(X).$$

A questo punto i problemi riguardanti la positività dei divisori diventano essenzialmente problemi di geometria convessa di coni su cui è possibile considerare la topologia euclidea.

È quindi usando questi strumenti che riusciamo a raggiungere gli obiettivi che ci eravamo proposti: dare un caratterizzazione di divisori ampi, nef, big e pseudoeffettivi quando vengono sostituiti dal loro bracket.

In particolare abbiamo dimostrato i seguenti due teoremi:

Teorema 0.0.1 (Si veda il teorema 3.3.1)**.** *Sia X una varietà proiettiva e L un $\mathbb{R}$-divisore di Cartier nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i$ dove $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ e A_i divisore di Cartier molto ampio $\forall i$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) L è ampio (big);

(2) $\exists\, s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è ampio (big) per ogni $s \geq s_0$;

(3) $\exists\, s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è ampio (big).

Teorema 0.0.2 (Si veda il teorema 3.3.2)**.** *Sia X una varietà proiettiva e L un $\mathbb{R}$-divisore di Cartier nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i$ dove $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ e A_i divisore di Cartier molto ampio $\forall i$:*

(1) L è big (ampio) o L è pseudoeffettivo non big (nef non ampio) e $t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \Leftrightarrow$ esiste un $s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef), $\forall\, s \geq s_0$;

(2) L è big (ampio) o L è pseudoeffettivo non big (nef non ampio) e $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i \Leftrightarrow$ esiste un $s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef).

Infine nell'esempio 3.1 vedremo un caso esplicito di $\mathbb{R}$-divisore pseudoeffettivo L il cui bracket $\langle sL \rangle$ è non pseudoeffettivo per ogni $s \in \mathbb{N}$.

Convenzioni e notazioni

Adotteremo le seguenti convenzioni:

- lavoreremo sempre sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$;
- uno *schema* è uno schema di tipo finito su $\mathbb{C}$. Una *varietà* è uno schema ridotto e irriducibile;
- indicheremo con $\mathbb{R}^+$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e con $\mathbb{R}^{\geq 0}$ l'insieme $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
- intenderemo con $\mathbb{N}$ l'insieme $\{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$.

Indice

Introduzione **i**

1 Divisori e teoria dell'intersezione **1**

1.1 Divisori 1
1.2 Fibrati lineari 3
1.3 Sistemi lineari 4
1.4 Ampiezza 6
1.5 Teoria dell'intersezione 8
1.6 Equivalenza Numerica 11
1.7 $\mathbb{Q}$-Divisori 13
1.8 $\mathbb{R}$-divisori 15

2 Proprietà di positività dei divisori **17**

2.1 Divisori nef 17
2.2 Coni di divisori ampi e nef 20
2.3 Divisori Big 22
2.4 Coni di divisori big e pseudoeffettivi 32

3 Bracket di divisori reali **35**

3.1 Bracket di $\mathbb{R}$-divisori 35
3.2 Funzione di Hilbert del bracket 36
3.3 Positività del bracket di $\mathbb{R}$-divisori 43

Bibliografia **49**

Capitolo 1

Divisori e teoria dell'intersezione

1.1 Divisori

Sia X uno schema. Per ogni aperto $U \subseteq X$ sia $S(U)$ l'insieme degli elementi di $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ che non sono zero-divisori in $\mathcal{O}_{X,x}$ $\forall x \in U$. Allora gli anelli $S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ formano un prefascio il cui fascio associato $\mathcal{K}_X$ è il fascio degli anelli quozienti totali di $\mathcal{O}_X$.

Sia $\mathcal{K}_X^*$ il sottofascio degli elementi invertibili di $\mathcal{K}_X$ e $\mathcal{O}_X^*$ il sottofascio degli elementi invertibili di $\mathcal{O}_X$.

Definizione 1.1 (Divisori di Cartier)**.** Un *divisore di Cartier* su uno schema X è una sezione globale del fascio quoziente $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. L'insieme dei divisori di Cartier su X costituisce un gruppo che indichiamo con $Div(X)$.

Abbiamo quindi:

$$\mathrm{Div}(X) := \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

Osserviamo che un divisore di Cartier $D \in \mathrm{Div}(X)$ è rappresentato da un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X e $\forall i$ un elemento $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$ tale che $\forall\, i, j$ si abbia $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$.

Sebbene il gruppo $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ sia moltiplicativo, parlando di divisori di Cartier adotteremo il linguaggio dei gruppi additivi, usando la seguente convenzione: se D_1 e D_2 sono rappresentati rispettivamente da $\{(U_i, f_i)\}$ e $\{(V_j, f_j)\}$, allora $D_1 + D_2$ è rappresentato da $\{(U_i \cap V_j, f_i \cdot f_j)\}$ così come $D_1 - D_2$ è rappresentato da $\{(U_i \cap V_j, f_i/f_j)\}$.

Un divisore di Cartier è *principale* se è nell'immagine della mappa naturale $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \to \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.

Due divisori di Cartier D_1 e D_2 si dicono *linearmente equivalenti*, e scriviamo $D_1 \sim D_2$, se $D_1 - D_2$ è un divisore principale.

Un divisore di Cartier su X si dice $effettivo$ se può essere rappresentato da $\{(U_i, f_i)\}$ dove tutti gli f_i sono in $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$.

Comunque noi lavoreremo sempre su varietà complesse irriducibili X per le quali $\mathcal{K}_X$ sarà il fascio costante $\mathbb{C}(X)$ delle funzioni razionali su X.

Da ora in poi quando parleremo di "divisori" intenderemo sempre divisori di Cartier.

Definizione 1.2 (Divisori di Weil)**.** Sia X una varietà di dimensione n. Un $k-$*ciclo* su X è una combinazione lineare finita a coeffincienti in $\mathbb{Z}$ di sottovarietà di X di dimensione k.

Un *divisore di Weil* D su X è un $(n-1)$-ciclo, cioè un elemento del gruppo abeliano libero $\mathrm{WDiv}(X)$ generato dalle sottovarietà $Y \subseteq X$ di dimensione $n-1$.

Scriviamo un divisore di Weil come una somma finita $D = \sum_i n_i Y_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}\ \forall i$. Se $n_i \geq 0\, \forall i$ diciamo che D è $effettivo$.

Ora sia K il campo delle funzioni di X e sia $f \in K$. Definiamo il *divisore di Weil di* f come $div(f) := \sum_Y ord_Y(f) \cdot Y$ dove la somma è presa sulle sottovarietà $Y \subseteq X$ di codimensione 1 e ord_Y è la valutazione discreta corrispondente. Ogni divisore di Weil che è divisore di una funzione è detto *principale*. Due divisori di Weil D_1 e D_2 si dicono *linearmente equivalenti*, e si scrive $D_1 \sim D_2$, se $D_1 - D_2$ è principale.

Ora osserviamo che esiste una mappa

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$$

$$D \longmapsto \sum_Y ord_Y(D) \cdot Y$$

dove $ord_Y(D)$ è l'ordine di D lungo le $(n-1)$-sottovarietà.

Proposizione 1.1.1. *La mappa* $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{WDiv}(X)$ *è iniettiva se* X *è normale ed è un isomorfismo se* X *è non-singolare, caso in cui i divisori principali di Weil corrispondono ai divisori principali di Cartier.*

Dimostrazione. Si rimanda a [Har77, II, Rmk. 6.11.2] . □

1.2 Fibrati lineari

Un aspetto importante della teoria dei divisori è la relazione con il concetto di *fibrato lineare*, che è un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango 1, cioè un fascio invertibile secondo la definizione di [Har77].

Per ogni divisore D su uno schema X possiamo considerare il "fibrato lineare associato a D" nel modo seguente:

Definizione 1.3. Sia D un divisore su X rappresentato da $\{(U_i, f_i)\}$. Il *fibrato lineare associato a* D, denotato con $\mathcal{O}_X(D)$, è il sotto-$\mathcal{O}_X$-modulo di $\mathcal{K}_X$ generato da f_i^{-1} su ogni U_i.

$\mathcal{O}_X(D)$ è ben definito perché gli elementi f_i/f_j in $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ sono invertibili quindi f_i^{-1} e f_j^{-1} generano lo stesso $\mathcal{O}_X$-modulo.

Inoltre:

Proposizione 1.2.1. *Sia* X *uno schema. Allora:*

1. *per ogni divisore* D *si ha che* $\mathcal{O}_X(D)$ *è un fascio invertibile su* X*. La mappa* $D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$ *dà una corrispondenza* $1-1$ *tra il gruppo dei divisori di Cartier su* X *e i sottofasci invertibili di* $\mathcal{K}_X$*;*

2. $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$*;*

3. $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$*.*

Dimostrazione. Si veda [Har77, II, Prop. 6.13] □

Quindi, denotando con $\mathrm{Pic}(X)$ il gruppo delle classi di isomorfismo dei fibrati lineari su X, possiamo dire che è ben definito un omomorfismo di gruppi abeliani

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

$$D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$$

che induce un omomorfismo iniettivo dal gruppo $\mathrm{Div}(X)/_\sim$ dei divisori di Cartier modulo equivalenza lineare in $\mathrm{Pic}(X)$.

In generale la mappa $\mathrm{Div}(X)/_\sim \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ non è suriettiva perché potrebbero esserci fibrati lineari su X che non sono isomorfi a nessun sottofascio invertibile di $\mathcal{K}_X$.

Osservazione 1. La mappa $D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$ induce un isomorfismo tra $\mathrm{Div}(X)/_\sim$ e $\mathrm{Pic}(X)$ nei casi seguenti:

(i) se X è proiettiva su un campo k;

(ii) se X è integrale o, equivalentemente, ridotta ed irriducibile.

Dimostrazione. Si veda [Har77, II, Prop. 6.15] □

1.3 Sistemi lineari

Sia $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su una varietà proiettiva non singolare X e sia $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ una sezione globale non nulla. Associamo ad s un divisore effettivo di X nel modo seguente: su ogni aperto $U \subseteq X$ su cui $\mathcal{L}$ è banale, consideriamo un isomorfismo $\varphi_U : \mathcal{L}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_U$. Allora $\varphi_U(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ e la collezione $\{(U, \varphi_U(s))\}$, che indichiamo con $(s)_0$, determina un divisore effettivo di Cartier al variare di U in un ricoprimento aperto di X.

Proposizione 1.3.1. *Sia X una varietà proiettiva non singolare su un campo k algebricamente chiuso. Sia D un divisore su X e sia $\mathcal{O}_X(D)$ il fibrato lineare associato. Allora:*

a) $\forall s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$, $s \neq 0$, *il divisore effettivo* $(s)_0$ *è linearmente equivalente a* D*;*

b) *ogni divisore effettivo di* X *linearmente equivalente a* D *è* $(s)_0$ *per qualche* $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$*;*

c) *a due sezioni* $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ *è associato lo stesso* $(s)_0$ *se e solo se* $s = \lambda s'$ *con* $\lambda \in k^*$*.*

Dimostrazione. Si veda [Har77, II, Prop. 7.7] □

Definizione 1.4. Definiamo un *sistema lineare completo* su X varietà proiettiva non singolare come l'insieme $|D|$ di tutti i divisori effettivi di X linearmente equivalenti a un dato divisore D.

Allora la proposizione ci dice che c'è una corrispondenza biunivoca

$$\big(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) - \{0\}\big) \,/\, k^* \longleftrightarrow |D| := \{E \in \mathrm{Div}(X), E \,\text{effettivo}, E \sim D\}$$
$$s \longleftrightarrow (s)_0$$

che dà a $|D|$ la struttura di spazio proiettivo.

Definizione 1.5. Un *sistema lineare* δ su X è un sottospazio proiettivo di un sistema lineare completo $|D|$ come spazio proiettivo.

Allora δ corrisponde ad un sottospazio vettoriale $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ tale che

$$V = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \,\big|\, (s)_0 \in \delta\} \cup \{0\}.$$

In generale sia X una varietà, $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su X e $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ un sottospazio vettoriale non nullo e di dimensione finita.

Denotiamo con $|V|$ lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di V e ci riferiamo a $|V|$ come ad un sistema lineare.

Se $|V| = \Gamma(X, \mathcal{L})$ ci riferiamo a $|V|$ come ad un sistema lineare completo e lo indichiamo con $|\mathcal{L}|$.

Se X è completa (caso in cui $\Gamma(X, \mathcal{L})$ ha sempre dimensione finita) per $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ ci riferiamo a $|V|$ come ad un sistema lineare nel senso della definizione vista prima, e per $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$ ci riferiamo a $|V| = |\mathcal{L}| = |\mathcal{O}_X(D)|$ come ad un sistema lineare completo e lo indichiamo con $|D|$.

Quindi ad ogni sottospazio $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ è associato un sistema lineare. A questo è associato, in alcuni casi, un morfismo di X in $\mathbb{P}(V)$. Vediamo come.

Definizione 1.6. Chiamiamo *punto base* di $|V|$ un punto $x \in X$ tale che $s(x) = 0 \, \forall s \in V$. Indichiamo con $Bs(|V|)$ il luogo in X dei punti base di $|V|$.

Definizione 1.7. Un divisore D e il fibrato lineare ad esso associato $\mathcal{O}_X(D)$ sono *liberi da punti base* se lo sono i sistemi lineari completi ad essi associati.

Osservazione 2. Osserviamo che in generale un fibrato lineare $\mathcal{L}$ è libero da punti base se e solo se è generato dalle sue sezioni globali.

Sia X completa. Allora $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ è finitamente generato come spazio vettoriale e sia $\{s_0, \ldots, s_r\}$ una sua base.

Allora se ignoriamo i punti base di V possiamo definire un morfismo associato a $|V|$ di $X - Bs(|V|)$ in $\mathbb{P}(V)$:

$$\varphi = \varphi_{|V|} : X - Bs(|V|) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$
$$x \longmapsto \varphi(x) := [s_0(x), \ldots, s_r(x)].$$

Nota: se scegliessimo una base differente il morfismo corrispondente di X in $\mathbb{P}(V)$ differirebbe solo per un automorfismo di $\mathbb{P}(V)$.

1.4 Ampiezza

Ora vediamo la definizione di divisori molto ampi e ampi e come l'ampiezza possa essere caratterizzata geometricamente (definizione), coomologicamente (Teorema di Cartan-Serre-Grothendieck) e poi numericamente (criterio di Nakai-Moishazen-Kleiman).

Definizione 1.8. Sia X una varietà completa e $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su X.

(i) $\mathcal{L}$ è *molto ampio* se esiste un'immersione chiusa $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ tale che $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$;

(ii) $\mathcal{L}$ è *ampio* se $\mathcal{L}^{\otimes m}$ è molto ampio per qualche $m > 0$.

Il primo fatto importante è la caratterizzazione coomologica dell'ampiezza:

Teorema 1.4.1 (Cartan-Serre-Grothendieck)**.** *Sia $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su una varietà completa X.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\mathcal{L}$ è ampio;

(ii) dato un fascio coerente $\mathcal{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_1(\mathcal{F})$ tale che $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ per ogni $i > 0$, $m \geq m_1(\mathcal{F})$;

(iii) dato un fascio coerente $\mathcal{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_2(\mathcal{F})$ tale che $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ è generato dalle sue sezioni globali per ogni $m \geq m_2(\mathcal{F})$;

(iv) esiste un intero positivo $m_3 > 0$ tale che $\mathcal{L}^{\otimes m}$ è molto ampio per ogni $m \geq m_3$.

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Thm. 1.2.6]. □

Osservazione 3. Nel caso più generale di varietà non complete la proposizione (*iii*) viene presa come definizione di fibrato lineare ampio. Vedi [Har77, II,7].

Lemma 1.4.2. *Sia D un divisore su una varietà completa X. Allora esistono $H_1, H_2 \in \mathrm{Div}(X)$ molto ampi tali che $D = H_1 - H_2$.*

Dimostrazione. Sia A un divisore ampio su X. Allora per il teorema 1.4.1 esiste un intero positivo m_0 tale che $D + m_0 A$ è globalmente generato. Sappiamo anche che esiste un intero positivo m_1 tale che sA è molto ampio per ogni $s \geq m_1$ (per definizione di divisore ampio).

Allora abbiamo che

$$(m_0 + m_1)A + D = m_1A + (m_0A + D)$$

è molto ampio per [Har77, II, Exercise 7.5d], essendo m_1A un divisore molto ampio e $m_0A + D$ un divisore globalmente generato. Ponendo $m = m_0 + m_1$ abbiamo chiaramente che mA è molto ampio essendo $m > m_1$. Definiamo $H_2 := mA$ e $H_1 := mA + D$ che sono entrambi molto ampi. Allora abbiamo $H_2 + D = H_1 \Rightarrow D = H_1 - H_2$. □

1.5 Teoria dell'intersezione

Sia X una varietà complessa irriducibile completa.

Vogliamo definire il numero di intersezione di un divisore $D \in \mathrm{Div}(X)$ con una curva irriducibile $C \subseteq X$.

Sappiamo che $D \sim H_1 - H_2$ con H_1 e H_2 divisori molto ampi su X e trasversali a C.

Definizione 1.9. Il *numero di intersezione* $(D \cdot C)$ di D con C è il numero intero $(D \cdot C) := (H_1 \cdot C) - (H_2 \cdot C)$

dove $(H_i \cdot C) := \sharp(H_i \cap C)$, i=1,2. Si può verificare che $(D \cdot C)$ non dipende da H_1 e H_2.

Ora generalizziamo definendo per induzione il numero di auto-intersezione di un divisore D, k volte, lungo una sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione k (o semplicemente "numero di intersezione di D lungo V").

Denotiamo $(\underbrace{D \cdot \ldots \cdot D}_{k\,volte})$ con (D^k) quindi $(\underbrace{D \cdot \ldots \cdot D}_{k\,volte} \cdot V)$ con $(D^k \cdot V)$.

Per $k = 1$ siamo nel caso precendente.

Per $k \geq 2$, considerando $(D^{k-1} \cdot W)$ definito per ipotesi induttiva $\forall$ W sottovarietà di X di dimensione $k-1$, definiamo

$$(D^k \cdot V) := \big((D^{k-1} \cdot (H_1 \cap V)\big) - \big((D^{k-1} \cdot (H_2 \cap V)\big)$$

dove H_1 e H_2, come prima, sono due divisori molto ampi, trasversali a V e tali che $D \sim H_1 - H_2$.

Allo stesso modo riusciamo a definire il numero di intersezione di un fibrato lineare $\mathcal{L}$ lungo una sottovarietà V di dimensione k ponendo $(\mathcal{L}^k \cdot V) = (D^k \cdot V)$ dove D è un divisore a cui è associato $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$.

Teorema di Riemann-Roch asintotico

Definizione 1.10. Sia X una varietà proiettiva di dimensione n e sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X. Chiamiamo *caratteristica di Eulero di* $\mathcal{F}$ il numero intero

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}).$$

Teorema 1.5.1 (Riemann-Roch asintotico)**.** *Sia X una varietà proiettiva di dimensione n e sia D un divisore di Cartier su X. Allora*

$$\chi\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) = \frac{(D^n)}{n!} \cdot m^n + O(m^{n-1}) \ , \ m \in \mathbb{N}.$$

Corollario 1.5.2. *Nelle ipotesi del teorema, se $H^i\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) = 0$ per $i > 0$ e $m \gg 0$ allora*

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) = \frac{(D^n)}{n!} \cdot m^n + O(m^{n-1}).$$

Allora dato il teorema 1.1.4 (Cartan-Serre-Grothendieck) vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.5.3. *Sia X una varietà proiettiva di dimensione n e D un divisore ampio su X. Allora*

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) = \frac{(D^n)}{n!} \cdot m^n + O(m^{n-1}).$$

Cioè la dimensione di $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big)$ per D ampio è una polinomiale in m di grado al più n.

Il lemma seguente permette di stimare definitivamente $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big)$ nel caso di D ampio.

Lemma 1.5.4. *Sia $p(t) = a_n t^m + \ldots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$ con $a_n > 0$. Allora*

(1) $\exists\, c > 0$ *tale che* $p(m) \leq c \cdot m^n \;\forall\, m \in \mathbb{N}$*;*

(2) $\exists\, c' > 0$ *e* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tali che* $p(m) > c' \cdot m^n \;\forall\, m > m_0$*.*

Dimostrazione. Consideriamo

$$\frac{p(m)}{m^n} = a_n + a_{n+1} \cdot \frac{1}{m} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{m^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{m^n}.$$

Allora

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m^n} = a_n$$

cioè $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, m_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, m > m_1$ si ha

$$|\frac{p(m)}{m^n} - a_n| < \varepsilon \Longrightarrow a_n - \varepsilon < \frac{p(m)}{m^n} < a_n + \varepsilon \Longrightarrow$$

$$(a_n - \varepsilon) \cdot m^n < p(m) < (a_n + \varepsilon) \cdot m^n.$$

Indicando $a_n - \varepsilon =: c'$ otteniamo il punto (2).

Vediamo il punto (1). Abbiamo che $p(m) < (a_n + \varepsilon) \cdot m^n \;\forall\, m > m_1$. Indicando $(a_n + \varepsilon) =: d$ abbiamo

$$p(m) < d \cdot m^n \;\; \forall\, m > m_1.$$

Cerchiamo delle costanti $c_1, \ldots, c_{m_1}$ tali che $p(i) \leq c_i \cdot i^n \;\forall\, i \in \{1, \cdots, m_1\}$. Allora basta prendere $c_i \geq \frac{P(i)}{i^n}$ e scegliere

$$c = \max\{d\;,\; \frac{p(i)}{i^n} + 1\;,\; 1 \leq i \leq m_1\}$$

Concludiamo che

$$p(m) \leq c \cdot m^n \;\forall\, m \in \mathbb{N}.$$

□

È quindi dimostrata la seguente proposizione.

Proposizione 1.5.5. *Sia* X *un varietà proiettiva e* D *divisore ampio su* X*. Allora*

(1) $\exists\, c > 0$ *tale che* $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) \leq c \cdot m^n \;\forall\, m \in \mathbb{N}$*;*

(2) $\exists\, c' > 0$ *e* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tali che* $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) > c' \cdot m^n \;\forall\, m > m_0$*.*

1.6 Equivalenza Numerica

Definiamo una nuova relazione d'equivalenza su $\mathrm{Div}(X)$.

Definizione 1.11. Due divisori di Cartier $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ si dicono *numericamente equivalenti*, e si scrive $D_1 \equiv_{num} D_2$, se $(D_1 \cdot C) = (D_2 \cdot C)$ per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$, o equivalentemente se $(D_1 \cdot \gamma) = (D_2 \cdot \gamma)$ per tutti gli 1-cicli γ su X.

L'equivalenza numerica tra due fibrati lineari è definita allo stesso modo.

Un divisore (o fibrato lineare) è detto *numericamente banale* se è numericamente equivalente a 0, e indichiamo con $\mathrm{Num}(X)$ il sottogruppo di $\mathrm{Div}(X)$ dei divisori numericamente banali.

Definizione 1.12. Chiamiamo *gruppo di Néron-Severi di X* il gruppo

$$N^1(X) := \mathrm{Div}(X)/\,\mathrm{Num}(X)$$

delle classi di equivalenza numerica di divisori su X.

Proposizione 1.6.1. *Il gruppo di Nèron-Severi $N^1(X)$ è un gruppo abeliano libero di rango finito.*

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Prop. 1.1.16] □

Definizione 1.13. Il rango di $N^1(X)$ è detto *numero di Picard di X* e lo indichiamo con $\rho(X)$.

I numeri di intersezione rispettano l'equivalenza numerica:

Lemma 1.6.2. *Sia X una varietà completa e siano $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$. Se $D_1 \equiv_{num} D_2$ allora $(D_1^k \cdot V) = (D_2^k \cdot V)$ per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione k.*

Questo ci permette di definire il numero di intersezione lungo classi di equivalenza numerica:

Definizione 1.14. Data una classe $\delta \in N^1(X)$, denotiamo con

$$(\delta^k \cdot V) := (\underbrace{\delta \cdot \ldots \cdot \delta}_{k\,volte} \cdot V)$$

il numero di intersezione di δ con V.

Proposizione 1.6.3. *Sia $Y \longrightarrow X$ un morfismo finito di varietà complete e $\mathcal{L}$ un fibrato lineare ampio su X. Allora $f^*\mathcal{L}$ è ampio su Y. In particolare se $Y \subseteq X$ è una sottovarietà di X, allora la restrizione $\mathcal{L}|_Y$ è ampia.*

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Prop. 1.2.13] □

Corollario 1.6.4. *Consideriamo un fibrato lineare $\mathcal{L}$ globalmente generato su X e sia $\Phi = \phi_{|\mathcal{L}|} :\longrightarrow \mathbb{P}(V)$ con $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$ il morfismo in $\mathbb{P}(V)$ associato al sistema lineare $|\mathcal{L}|$. Allora $\mathcal{L}$ è ampio $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{L} \cdot C) > 0$ per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$.*

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Cor. 1.2.15]. □

Vediamo adesso come l'ampiezza si caratterizza numericamente:

Teorema 1.6.5 (Criterio di Nakai-Moishazen-Kleiman)**.** *Sia $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su una varietà proiettiva X. Allora $\mathcal{L}$ è ampio se e solo se*

$$(\mathcal{L}^{\dim V} \cdot V) > 0$$

per ogni sottovarietà irriducibile $V \subseteq X$ di dimensione positiva.

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Thm. 1.2.23]. □

Corollario 1.6.6. *Se $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ sono numericamente equivalenti su una varietà priettiva o schema X, allora D_1 è ampio se e solo se D_2 è ampio.*

Questo ci permette di definire le classi di ampiezza:

Definizione 1.15. Una classe di equivalenza numerica $\delta \in N^1(X)$ è ampia se è la classe di un divisore ampio.

1.7 $\mathbb{Q}$-Divisori

Un $\mathbb{Q}$-divisore è semplicemente una combinazione $\mathbb{Q}$-lineare di divisori di Cartier.

Definizione 1.16. Sia X una varietà. Un $\mathbb{Q} - divisore$ su X è un elemento del $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X) := \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Rappresentiamo un divisore $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ come una somma finita

$$D = \sum c_i \cdot A_i$$

dove $c_i \in \mathbb{Q}$ e $A_i \in \mathrm{Div}(X)$.

Raccogliendo i denominatori dei c_i possiamo scrivere $D = c \cdot A$ per un singolo numero razionale c e un divisore di Cartier A.

Un $\mathbb{Q}$-divisore si dice *intero* se giace nell'immagine della mappa naturale $\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Un $\mathbb{Q}$-divisore D è $effettivo$ se è della forma $D = \sum c_i \cdot A_i$ con $c_i \geq 0$ e A_i effettivo.

Tutte le proprietà dei divisori di Cartier si estendono naturalmente ai $\mathbb{Q}$-divisori.

Sia X varietà completa:

(i) dato un $\mathbb{Q}$-divisore $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ e una sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione k definiamo il *numero di intersezione* $(D^k \cdot V)$ come per i divisori di Cartier;

(ii) due divisori $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ sono *numericamente equivalenti*, e scriviamo $D_1 \equiv_{num,\mathbb{Q}} D_2$ se $(D_1 \cdot C) = (D_2 \cdot C)$ per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$.

Denotiamo con $N^1(X)_{\mathbb{Q}}$ il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale (finito dimensionale) delle classi di equivalenza numerica di $\mathbb{Q}$-divisori;

(iii) due divisori $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ sono *linearmente equivalenti*, e scriviamo $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$, se esiste un $r \in \mathbb{Z}$ tale che rD_1 e rD_2 sono divisori interi e linearmente equivalenti nel senso usuale, cioè se $r(D_1 - D_2)$ è immagine di un divisore principale di $\mathrm{Div}(X)$.

Osservazione 4. Può succedere che due divisori interi in classi di equivalenza lineari distinte siano invece linearmente equivalenti nel senso di (*iii*) quando sono considerati come $\mathbb{Q}$-divisori. Perciò preferiremo usare l'equivalenza numerica.

Definizione 1.17. Un $\mathbb{Q}$-divisore $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ si dice *ampio* se è soddisfatta una delle tre equivalenti condizioni seguenti:

1. D è della forma $D = \sum c_i \cdot A_i$ con $c_i > 0$ numero razionale positivo e A_i divisore di Cartier ampio;
2. esiste un numero intero $r > 0$ tale che $r \cdot D$ è intero e ampio;
3. D soddisfa il criterio di Nakai, cioè $(D^{\dim V} \cdot V) > 0$ per ogni sottovarietà irriducibile $V \subseteq X$ di dimensione positiva.

Anche in questo caso l'equivalenza numerica conserva l'ampiezza, quindi potremo parlare di classi di ampiezza in $N^1(X)_{\mathbb{Q}}$.

Vediamo ora che l'ampiezza è una condizione aperta per piccole perturbazioni di un divisore:

Proposizione 1.7.1. *Sia X una varietà proiettiva, H un $\mathbb{Q}$-divisore ampio su X e E un $\mathbb{Q}$-divisore arbitrario. Allora $H+\varepsilon E$ è ampio per tutti i razionali ε sufficientemente piccoli, $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$. Più in generale, dati $E_1, \dots, E_r \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$,*

$$H + \varepsilon_1 E_1 + \ldots + \varepsilon_r E_r$$

è ampio per $0 \leq |\varepsilon_i| \ll 1$.

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Prop. 1.3.7] □

1.8 $\mathbb{R}$-divisori

La definizione di $\mathbb{R}$-divisore segue fedelmente quella di $\mathbb{Q}$-divisore.

Definizione 1.18. Sia X una varietà. Un $\mathbb{R} - divisore$ su X è un elemento dell' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X) := \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Rappresentiamo un divisore $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ come una somma finita

$$D = \sum c_i \cdot A_i$$

dove $c_i \in \mathbb{R}$ e $A_i \in \mathrm{Div}(X)$.

Un $\mathbb{R}$-divisore si dice *intero* se giace nell'immagine della mappa naturale $\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$. Un $\mathbb{R}$-divisore D è $effettivo$ se è della forma $D = \sum c_i \cdot A_i$ con $c_i \geq 0$ e A_i effettivo.

Supponendo X completa abbiamo una teoria dell'intersezione per gli $\mathbb{R}$-divisori e come per i $\mathbb{Q}$-divisori possiamo parlare di equivalenza numerica ($\equiv_{num,\mathbb{R}}$) e definire lo spazio vettoriale $N^1(X)_{\mathbb{R}}$.

Definizione 1.19. Sia X una varietà completa. Un $\mathbb{R}$-divisore D su X è *ampio* se si può esprimere coma somma finita $D = \sum c_i \cdot A_i$, con $c_i > 0$ numero reale positivo e A_i divisore di Cartier ampio.

Proposizione 1.8.1 (Nakai, Campana, Peternell)**.** *D è un $\mathbb{R}$-divisore ampio se e solo se $(D^{\dim V} \cdot V) > 0$ per ogni sottovarietà irriducibile $V \subseteq X$ di dimensione positiva.*

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Thm. 2.3.18] □

Proposizione 1.8.2. *L'ampiezza di un $\mathbb{R}$-divisore dipende solo dalla sua classe di equivalenza numerica.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che se D e D' sono due $\mathbb{R}$-divisori tali che $D \equiv_{num} D'$ allora se D' è ampio $\Rightarrow D$ è ampio.

Sia $B := D - D'$. È chiaro che $B \equiv_{num} 0$. Si può dimostrare che esistono $r_j \in \mathbb{R}$ e B_j divisori interi con $B_j \equiv_{num} 0$ tali che $B = \sum_{j=i}^{t} r_j B_j$ (si veda [Laz04, Prop. 1.3.13]). Consideriamo $D = D' + B$. Essendo D' ampio abbiamo $D' = \sum_{i=1}^{s} a_i A_i$ con $a_i \in \mathbb{R}^+$ e A_i divisore ampio intero. Allora

$$D = \sum_{i=1}^{s} a_i A_i + \sum_{j=1}^{t} r_j B_j = \sum_{j=1}^{t} \frac{a_1}{t}\big(A_1 + \frac{t}{a_1} \cdot r_j B_j\big) + \sum_{i=2}^{s} a_i A_i$$

dove $\sum_{i=2}^{s} a_i A_i$ è ampio o è 0 se $s = 1$. Essendo $\frac{a_1}{t} \in \mathbb{R}^+$, resta da dimostrare che $A_1 + \frac{t}{a_1} \cdot r_j B_j$ è ampio. Cioè dimostriamo che se abbiamo A e B divisori interi con A ampio e $B \equiv_{num} 0$ allora $A + rB$ è ampio per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Sia $r \in \mathbb{Q}$, cioè $r = \frac{p}{q}$. Possiamo assumere $q > 0$. In questo caso $A + rB$ è ampio se e solo se esiste un $z \in \mathbb{N}$ tale che $z(A + rB)$ è un divisore intero ampio. Sia $z = q$. Allora $q(A + rB) = qA + pB \equiv_{num} qA$ essendo $B \equiv_{num} 0$. Ma qA è ampio quindi $qA + pB$ è ampio per il corollario 1.6.6. Concludiamo che $A + rB$ è ampio.

Se invece r è un numero reale qualsiasi, prendiamo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $r_1 < r < r_2$. Abbiamo che $r = tr_1 + (1 - t)r_2$, $t \in (0, 1)$. Allora $A + rB = t(A + r_1 B) + (1 - t)(A + r_2 B)$ dove $A + r_1 B$ e $A + r_2 B$ sono ampi perché $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Allora, essendo $t > 0$ e $1 - t > 0$ abbiamo che $A + rB$ è ampio. □

Proposizione 1.8.3. *Dati un $\mathbb{R}$-divisore ampio H e $E_1, \ldots, E_r \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ $\mathbb{R}$-divisori arbitrari, allora*

$$H + \varepsilon_1 E_1 + \ldots + \varepsilon_r E_r$$

è ampio per $0 \leq |\varepsilon_i| \ll 1$.

Dimostrazione. Si veda [Laz04, Ex. 1.3.14] □

Capitolo 2

Proprietà di positività dei divisori

2.1 Divisori nef

Definizione 2.1. Sia X una varietà completa. Un fibrato lineare $\mathcal{L}$ su X si dice *numericamente effettivo* o *nef* se

$$(\mathcal{L} \cdot C) \geq 0$$

per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$.

Un divisore di Cartier (con coefficienti in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) si dice *nef* se

$$(D \cdot C) \geq 0$$

per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$.

Dipendendo queste definizioni esclusivamente dalla classe di equivalenza numerica di $\mathcal{L}$ o D abbiamo le nozioni di classi di divisori nef in $N^1(X)$, $N^1(X)_{\mathbb{Q}}$ e $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Osserviamo inoltre che ogni classe ampia è nef e che la somma di due classi nef è nef.

Teorema 2.1.1 (Kleiman)**.** *Sia X una varietà completa. Se D è un $\mathbb{R}$-divisore nef su X, allora*

$$(D^k \cdot V) \geq 0$$

per ogni sottovarietà irriducibile $V \subseteq X$ di dimensione $k > 0$. Allo stesso modo

$$(\mathcal{L}^k \cdot V) \geq 0$$

per ogni fibrato lineare nef $\mathcal{L}$ su X.

Dimostrazione. Assumiamo X ridotta e irriducibile. Per il lemma di Chow possiamo assumerla anche proiettiva. Si veda [Laz04, Rmk. 1.4.3]. Procediamo per induzione su $n = \dim X$.

Per $n = 1$ è chiaro che $V = X \Rightarrow (D \cdot X) \geq 0$.

Ora supponiamo

$$(D^k \cdot V) \geq 0 \; \forall \, V \subseteq X \text{ con } \dim V = k \leq n - 1.$$

Vogliamo che $(D^n \cdot X) =: (D^n) \geq 0$. Supponiamo che D sia un $\mathbb{Q}$-divisore. Sia H un divisore (intero) ampio su X e consideriamo

$$P(t) := (D + tH)^n \in \mathbb{R} \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Allora $P(t)$ è un polinomio in t e vogliamo dimostrare che $P(0) \geq 0$.

Sia per assurdo $P(0) < 0$. Notiamo che se $k < n$, essendo H ampio si ha che H^{n-k} è un k-ciclo effettivo e razionale e se applichiamo l'ipotesi induttiva ad ogni componente del ciclo otteniamo che $(D^k \cdot H^{n-k}) \geq 0$. In particolare, per $k < n$, il coefficiente di t^{n-k} in $P(t)$ è non negativo quindi, poiché $P(0) < 0$, possiamo dire che $P(t)$ ha un'unica radice reale $t_0 > 0$.

Ora dimostriamo che per ogni razionale $t > t_0$, il $\mathbb{Q}$-divisore $D + tH$ è ampio. Verificare questo equivale a verificare che $D + tH$ soddisfi la disuguaglianza di Nakai, cioè che $\big((D + tH)^k \cdot V\big) > 0$, $\forall \, V \subseteq X$ sottovarietà irriducibile di dimensione k.

Se $V = X$ questo segue dal fatto che $P(t) > P(t_0) = 0$.

Se $V \subsetneq X$ si espande il numero di intersezione come un polinomio in t. Anche in questo caso tutti i coefficienti sono non negativi e il coefficiente direttore $(H^k \cdot V)$ è strettamente positivo $\Rightarrow \big((D + tH)^k \cdot V\big) > 0 \Rightarrow D + tH$ è ampio.

Ora scriviamo $P(t) := Q(t) + R(t)$ con

$$Q(t) = \big(D \cdot (D + tH)^{n-1}\big) \text{ e } R(t) = \big(tH \cdot (D + tH)^{n-1}\big).$$

Se $t > t_0 \Rightarrow D+tH$ è ampio $\Rightarrow \big(D\cdot(D+tH)^{n-1}\big)$ è il numero di intersezione di un divisore nef con un 1-ciclo effettivo $\Rightarrow Q(t) \geq 0$ per ogni razionale $t > t_0 \Rightarrow Q(t_0) \geq 0$ per continuità. D'altra parte anche tutti i coefficienti di $R(t)$ sono non negativi perché $(D^k \cdot H^{n-k}) \geq 0$ e l'ultimo, (H^n) è strettamente positivo $\Rightarrow R(t_0) > 0 \Rightarrow P(t_0) > 0$ e questa è una contraddizione $\Rightarrow P(0) \geq 0$ cioè $(D^n) \geq 0$. Abbiamo così dimostrato il teorema nel caso in cui D è razionale.

Resta da dimostrarlo nel caso in cui D sia un $\mathbb{R}$-divisore arbitrario. A questo scopo scegliamo dei divisori ampi $H_1, \ldots, H_r$ le cui classi generano $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Allora $\varepsilon_1 H_1 + \ldots + \varepsilon_r H_r$ è ampio $\forall \varepsilon_i > 0$. In particolare $D + \varepsilon_1 H_1 + \ldots + \varepsilon_r H_r$, essendo la somma di un $\mathbb{R}$-divisore nef e di uno ampio, è evidentemente nef. Ma le classi di questi divisori riempiono un sottoinsieme aperto di $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ quindi possiamo trovare degli ε_i arbitrariamente piccoli, $0 \leq \varepsilon_i \ll 1$, tali che $D + \varepsilon_1 H_1 + \ldots + \varepsilon_r H_r$ sia numericamente equivalente ad un divisore razionale.

Allora, per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, $\big((D + \varepsilon_1 H_1 + \ldots + \varepsilon_r H_r)^k \cdot V\big) \geq 0$.

Con $\varepsilon_i \longrightarrow 0$ abbiamo che $(D^k \cdot V) \geq 0$. $\square$

L'importanza di questo teorema è particolarmente evidente nella dimostrazione del seguente corollario, il quale caratterizza i divisori nef come limiti di divisori ampi.

Corollario 2.1.2. *Sia X una varietà proiettiva e D un $\mathbb{R}$-divisore nef. Se H è un $\mathbb{R}$-divisore ampio su X, allora*

$$D + \varepsilon H$$

è ampio per tutti gli $\varepsilon > 0$.

Viceversa se D e H sono due $\mathbb{R}$-divisori tali che $D + \varepsilon H$ è ampio per tutti gli $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccoli, allora D è nef.

Dimostrazione. Se $D + \varepsilon H$ è ampio per $\varepsilon > 0$, allora per la disuguaglianza di Nakai

$$\big((D + \varepsilon H) \cdot C\big) = (D \cdot C) + \varepsilon(H \cdot C) > 0$$

per ogni curva irriducibile C.

Per $\varepsilon \longrightarrow 0$ si ha $(D \cdot C) \geq 0$ e cioè che D è nef.

Viceversa siano D un divisore nef e H un divisore ampio. Essendo εH ampio per ogni ε, basta dimostrare che $D+H$ è ampio. Nel caso in cui $D+H$ sia numericamente equivalente ad un divisore razionale dimostrare che $D+H$ è ampio equivale a dimostrare che $D+H$ soddisfa la disugiaglianza di Nakai: $\big((D+H)^k \cdot V\big) > 0$ per ogni sottovarietà irriducibile $V \subset X$.

Ora $\big((D+H)^k \cdot V\big) = \sum\limits_{s=0}^{k} \binom{k}{s}(H^s \cdot D^{k-s} \cdot V)$.

H, per definizione di $\mathbb{R}$-divisore ampio, è una combinazione lineare a coefficienti positivi di divisori interi quindi $(H^s \cdot V)$ è rappresentato da un $(k-s)$-ciclo reale effettivo. Applicando a questo ciclo il teorema di Kleiman abbiamo che $(H^s \cdot D^{k-s} \cdot V) \geq 0 \; \forall s$. Allora ogni termine della somma è non negativo e l'ultimo termine $(H^k \cdot V)$ è positivo perché H è ampio e quindi vale la disuguaglianza di Nakai: $(H^k \cdot V) > 0$.

Perciò $\big((D+H)^k \cdot V)\big) > 0$ e se $D+H$ è numericamente equivalente ad un divisore razionale si ha che $D+H$ è ampio sempre per la disuguaglianza Nakai.

Ora resta da vedere il caso in cui $D+H$ è irrazionale.

Come nella dimostrazione del teorema scegliamo una base "ampia" $H_1, \ldots, H_r$ di $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Sappiamo che $H - \varepsilon_1 H_1 - \ldots - \varepsilon_r H_r$ è ampio per tutti gli ε_i tali che $0 \leq \varepsilon_i \ll 1$. Quindi come prima esistono $\varepsilon_i\,, 0 \leq \varepsilon_i \ll 1$ tali che $D' := D + H - \varepsilon_1 H_1 - \ldots - \varepsilon_r H_r$ rappresenta una classe razionale in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$.

Allora D' è ampio $\Rightarrow D + H = D' + \varepsilon_1 H_1 + \ldots + \varepsilon_r H_r$ è ampio. □

2.2 Coni di divisori ampi e nef

Definizione 2.2. Sia V uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale. Un *cono* in V è un sottoinsieme $K \subseteq V$ chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari positivi.

Definizione 2.3. Il *cono ampio*

$$\mathrm{Amp}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

di X è il cono convesso di tutte le classi ampie di $\mathbb{R}$-divisori su X.

Il *cono nef*

$$\mathrm{Nef}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

di X è il cono convesso di tutte le classi nef di $\mathbb{R}$-divisori su X.

È chiaro che si può equivalentemente definire $\mathrm{Amp}(X)$ come il cono convesso in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ generato dalle classi di tutti i divisori interi (o razionali) ampi, cioè come lo spazio convesso di tutti i multipli reali positivi di tali classi.

Ora vedendo $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ come uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale possiamo considerare su di esso la topologia euclidea usuale. Questo ci permette di discutere chiusura e interno di insiemi di classi di equivalenza numerica di $\mathbb{R}$-divisori.

Osservazione 5. Il cono $\mathrm{Amp}(X)$ è aperto.

Dimostrazione. Sia A un $\mathbb{R}$-divisore ampio su X. Vogliamo dimostrare che esiste un $r > 0$ tale che il disco di raggio r centrato in $[A]$ (la classe di equivalenza numerica di A) sia contenuto in $\mathrm{Amp}(X)$.

Sia $[E_1], \ldots, [E_\rho]$ una base di $N^1(X)_{\mathbb{R}}$, dove ρ è il rango di $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Per [Laz04, Ex. 1.3.14] esiste $r > 0$ tale che se $|\varepsilon_i| < r$ allora $A + \varepsilon_1 E_1 + \ldots + \varepsilon_\rho E_\rho$ è ampio.

Ora sia $[M]$ un punto in $D_r([A])$, cioè un punto tale che $||M - A|| < r$. Dato che $[E_1], \ldots, [E_\rho]$ è una base di $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ deduciamo che esistono numeri reali ε'_i tali che $M - A = \varepsilon'_1 E_1 + \ldots + \varepsilon'_\rho E_\rho$. Usando la norma euclidea abbiamo che $r > ||M - A|| = \sqrt{{\varepsilon'_1}^2 + \ldots + {\varepsilon'_\rho}^2} \geq |\varepsilon'_i| \; \forall i$.

Dunque $M - A = \varepsilon'_1 E_1 + \ldots + \varepsilon'_\rho E_\rho$ è ampio $\Rightarrow [M] \in \mathrm{Amp}(X)$. $\square$

Almeno nel caso di X varietà proiettiva, il teorema di Kleiman è equivalente al fatto che il cono nef è la chiusura del cono ampio.

Teorema 2.2.1. *Sia X varietà proiettiva.*

i) $\mathrm{Nef}(X) = \overline{\mathrm{Amp}(X)}$*;*

ii) $\mathrm{Amp}(X) = \mathrm{int}\big(\mathrm{Nef}(X)\big)$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathrm{Amp}(X)$ è aperto ed è evidente che $\mathrm{Nef}(X)$ è chiuso. Allora dato che $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Nef}(X)$ abbiamo che

$$\overline{\mathrm{Amp}(X)} \subseteq \mathrm{Nef}(X) \text{ e } \mathrm{Amp}(X) \subseteq \mathrm{int}\big(\mathrm{Nef}(X)\big).$$

Le inclusioni inverse sono conseguenza del corollario 2.1.2. Infatti sia H un $\mathbb{R}$-divisore ampio e D un $\mathbb{R}$-divisore nef. Il corollario ci dice che $D + \varepsilon H$ è ampio per $\varepsilon > 0 \Rightarrow D$ è limite di divisori ampi $\Rightarrow \mathrm{Nef}(X) \subseteq \overline{\mathrm{Amp}(X)}$.

Per quanto riguarda l'inclusione $\mathrm{int}\big(\mathrm{Nef}(X)\big) \subseteq \mathrm{Amp}(X)$ osserviamo che se la classe di D sta in $\mathrm{int}\big(\mathrm{Nef}(X)\big)$ allora $D - \varepsilon H$ resta nef per $0 \leq \varepsilon \ll 1 \Rightarrow D = (D - \varepsilon H) + \varepsilon H$ è ampio perchè $D - \varepsilon H$ è nef e εH è ampio. □

2.3 Divisori Big

In questa sezione studieremo una particolare classe di fibrati lineari su una varietà X: quelli con dimensione di Iitaka uguale alla dimensione della varietà. Assumeremo sempre X normale.

Iniziamo con alcune definizioni ed esempi riguardanti i sistemi lineari.

Definizione 2.4. Sia $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su una varietà proiettiva irriducibile X. Il *somigruppo di* $\mathcal{L}$ consiste dell'insieme di tutte le potenze non negative di $\mathcal{L}$ che hanno sezioni non negative:

$$N(\mathcal{L}) = N(X, \mathcal{L}) := \{m \geq 0 \mid H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) \neq 0\}.$$

In particolare $N(\mathcal{L}) = 0$ se $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0 \;\forall\, m > 0$. Assumendo $N(\mathcal{L}) \neq 0$ tutti gli elementi sufficientemente grandi di $N(\mathcal{L})$ sono multipli di un singolo numero naturale $e = e(\mathcal{L}) \geq 1$, che chiamiamo esponente di $\mathcal{L}$. (L'esponente è il massimo comun divisore di tutti gli elementi di $N(\mathcal{L})$). Il semigruppo

$N(X,D)$ e l'esponente $e = e(D)$ di un divisore di Cartier D sono definiti analogamente o equivalentemente passando a $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$.

Dato $m \in N(X,\mathcal{L})$ consideriamo la mappa razionale

$$\varphi_m := \varphi_{|\mathcal{L}^{\otimes m}|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$$

associata al sistema lineare $|\mathcal{L}^{\otimes m}|$. Denoteremo con $\varphi_m(X)$ la chiusura dell'immagine di X in $\mathbb{P}\big(\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})\big)$.

Definizione 2.5 (Dimensione di Iitaka)**.** Sia $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su una varietà proiettiva X. Allora la *dimensione di Iitaka di* $\mathcal{L}$ è definita come

$$\kappa(\mathcal{L}) = \kappa(X,\mathcal{L}) := \max\{\dim \varphi_m(X)\} \text{ con } m \in N(\mathcal{L}).$$

Questo nel caso in cui $N(\mathcal{L}) \neq 0$. Nel caso in cui $N(\mathcal{L}) = 0$ poniamo $\kappa(X,\mathcal{L}) = -\infty$. Infine per un divisore di Cartier D poniamo

$$\kappa(X,D) := \kappa\big(X, \mathcal{O}_X(D)\big).$$

Abbiamo $\kappa(X,\mathcal{L}) = -\infty$ oppure $0 \leq \kappa(X,\mathcal{L}) \leq \dim X$.

Esempio 2.1 (Dimensione di Kodaira)**.** Sia X una varietà proiettiva (non singolare) e $\mathcal{K}_X$ un divisore canonico su X. Allora $\kappa = \kappa(X, \mathcal{K}_X)$ è la *dimensione di Kodaira* di X.

Vediamo ora la definizione di divisore big.

Definizione 2.6. Un fibrato lineare $\mathcal{L}$ su una varietà proiettiva X si dice *big* se $\kappa(X,\mathcal{L}) = \dim X$. Un divisore di Cartier D su X si dice *big* se $\mathcal{O}_X(D)$ è big.

Essendo X normale, come vedremo nel corollario 2.3.5, chiedere che $\mathcal{L}$ sia big equivale a chiedere che la mappa $\varphi_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ definita da $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sia birazionale sull'immagine per qualche $m > 0$.

Ci soffermeremo adesso sul comportamento asintotico dei sistemi lineari $|mD|$ per vedere poi una caratterizzazione numerica dei divisori big.

Lemma 2.3.1. *Sia X varietà proiettiva di dimensione n e sia D un divisore di Cartier su X. Allora esistono una costante $C > 0$ e un $m_0 \in \mathbb{N}$ tali che*

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) \leq C \cdot m^n \ , \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Sia A ampio su X. Allora esiste $m_0 \gg 0$ tale che $m_0A - D$ è globalmente generato. Quindi esiste un divisore E effettivo tale che $E \sim m_0A - D$. Ora per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $mm_0A \sim mD + mE$ e inoltre $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) \leq h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD + mE)\big)$.

La disuguaglianza è dovuta al fatto che aggiungendo un divisore effettivo (nel nostro caso E) la coomologia cresce. Infatti in generale se E è un divisore effettivo su una varietà X ad esso è associato un sottoschema chiuso Y di X il cui fascio di ideali $\mathcal{I}_Y$ è $\mathcal{O}_X(-E)$ $\big($Si veda [Har77, II, Prop. 6.18]$\big)$. Allora, essendo $\mathcal{I}_Y$ il nucleo del morfismo $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ indotto dal morfismo di inclusione di Y in X, abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-E) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

che, tensorizzando con $\mathcal{O}_X(D + E)$, diventa

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D + E) \longrightarrow \dots$$

Passando alla coomologia si ottiene la successione esatta a sinistra

$$0 \longrightarrow H^0\big(X, \mathcal{O}_X(D)\big) \longrightarrow H^0\big(X, \mathcal{O}_X(D + E)\big) \longrightarrow \dots.$$

Allora $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(D)\big) \leq h^0\big(X, \mathcal{O}_X(D + E)\big)$ il morfismo

$$H^0\big(X, \mathcal{O}_X(D)\big) \longrightarrow H^0\big(X, \mathcal{O}_X(D + E)\big)$$

essendo iniettivo. In particolare vale

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD)\big) \leq h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD + mE)\big).$$

Ma $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mD + mE)\big) = h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0A)\big) \leq C \cdot m^n$ essendo m_0A ampio.

L'ultima disuguaglianza dipende dalla proposizione 1.5.5. $\square$

Lemma 2.3.2 (Kodaira). *Siano D un divisore di Cartier e F un divisore effettivo di Cartier su X varietà proiettiva di dimensione n. Allora se esistono una costante $c > 0$ e un $m_0 \in \mathbb{N}$ tali che $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) \geq c \cdot m^n$, si ha*

$$H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D - F)\big) \neq 0 \ , m \gg 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(mm_0D - F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(mm_0D) \longrightarrow \mathcal{O}_F(mm_0D) \longrightarrow 0.$$

Essendo F uno schema di dimensione $n-1$, abbiamo che $h^0\big(X, \mathcal{O}_F(mm_0D)\big)$ cresce al più come m^{n-1} per il lemma precedente. Allora

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) > h^0\big(X, \mathcal{O}_F(mm_0D)\big) \Longrightarrow H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D - F)\big) \neq 0$$

perchè se fosse nullo avremmo

$$H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) \cong H^0\big(X, \mathcal{O}_F(mm_0D - F)\big)$$

e questo è assurdo perché $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big)$ e $H^0\big(X, \mathcal{O}_F(mm_0D - F)\big)$ hanno dimensione diversa. □

Lemma 2.3.3. *Sia X varietà proiettiva di dimensione n. Un divisore D su X è big se e solo se esiste una costante $c > 0$ e un $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che*

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) \geq c \cdot m^n \ , m \gg 0.$$

Dimostrazione. Assumiamo che D sia big e consideriamo $\mathcal{O}_X(D)$. Per definizione di divisore big abbiamo che $\kappa(X, D) = n$ cioè che esiste $m_0 \in N(X, D)$ tale che $\dim\big(\varphi_{|m_0D|}(X)\big) = n$ dove

$$\varphi_{|m_0D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0\big(X, \mathcal{O}_X(m_0D)\big)$$

è il morfismo associato al sistema lineare $|m_0D|$.

Da adesso indicheremo $\varphi_{|m_0D|}$ con φ e $\varphi_{|m_0D|}(X)$ con $\varphi(X)$. Risolviamo le indeterminazioni di φ (si veda [Har77, II, Ex. 7.17.3]). Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ lo scoppiamento dell'ideale base di $|m_0D|$. Abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & & \\ p\downarrow & \searrow q & \\ \varphi : X & \longrightarrow & \mathbb{P}H^0\big(X, \mathcal{O}_X(m_0D)\big). \end{array}$$

Consideriamo $p^*\big(\mathcal{O}_X(m_0D)\big) = M+F$ dove M rappresenta la "parte mobile", cioè la parte senza punti base, di $p^*\big(\mathcal{O}_X(m_0D)\big)$ e F è un divisore effettivo fisso.

Prendiamo un $m \in \mathbb{N}$. Abbiamo

$$p^*\big(\mathcal{O}_X(mm_0D)\big) = mp^*\big(\mathcal{O}_X(m_0D)\big) = mM + mF.$$

Allora
$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) = h^0\big(\widetilde{X}, p^*\big(\mathcal{O}_X(mm_0D)\big)\big) = h^0\big(\widetilde{X}, \mathcal{O}_X(mM + mF)\big) \geq h^0\big(\widetilde{X}, \mathcal{O}_X(mM)\big)$. Come visto nella dimostrazione del lemma 2.3.1 , la disuguaglianza è dovuta al fatto che aggiungendo un divisore effettivo (in questo caso F) la coomologia cresce. Ora M definisce un sottofascio invertibile di $p^*\big(\mathcal{O}_X(m_0D)\big)$ su $\widetilde{X}$ il cui morfismo associato è q. Quindi per [Har77, II, prop. 7.1b] possiamo dire che $h^0\big(\widetilde{X}, mM\big) = h^0\big(\widetilde{X}, mq^*\mathcal{O}(1)\big) = h^0(\widetilde{X}, q^*\big(\mathcal{O}(m)\big)) = h^0\big(\varphi(X), \mathcal{O}_{\varphi(X)}(m)\big) \geq c \cdot m^n$, $m \gg 0$ come volevamo dimostrare.

Viceversa dimostriamo che se esistono una costante $c > 0$ e un $m_0 \in \mathbb{N}$ tali che $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)\big) \geq c{\cdot}m^n$, $m \gg 0$, allora D è big. Sia H un divisore effettivo molto ampio su X. Allora per il lemma 2.3.2 $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D - H)\big) \neq 0$ cioè esiste $0 \neq s \in H^0\big(X, \mathcal{O}_X(mm_0D - H)\big)$. Sia E il divisore di s. Quindi $E \sim mm_0D - H \Rightarrow mm_0D \sim H + E$. Vogliamo che D sia big. Allora consideriamo $\varphi_{|mm_0D|} : X \dashrightarrow \varphi_{|mm_0D|}(X)$. Questo è iniettivo su $X - \mathrm{Supp}(E)$ (lo vedremo più avanti) perciò $\dim\big(\varphi_{|mm_0D|}(X)\big) \geq \dim\big(X - \mathrm{Supp}(E)\big) = \dim X$ perché $X - \mathrm{Supp}(E)$ è un sottoinsieme aperto di X. Allora $\dim\big(\varphi_{|mm_0D|}(X)\big) = n \Rightarrow D$ è big.

Restava da dimostrare che $\varphi_{|mm_0D|} : X \dashrightarrow \varphi_{|mm_0D|}(X)$ è iniettivo su $X - \mathrm{Supp}(E)$. Sia $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$ una base di $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(H)\big)$. Consideriamo

$\sigma_0 s, \ldots, \sigma_r s \in H^0\big(X, \mathcal{O}_X(H+E)\big)$. Queste sono linearmente indipendenti, infatti supponiamo $\sum a_i(\sigma_i s) = 0$ e mostriamo che $a_i = 0\ \forall\ i$. Se $\sum a_i(\sigma_i s) = 0$ allora $s \sum a_i \sigma_i = 0$ e sia $\sum a_i \sigma_i =: \tau$. Abbiamo che $s\tau = 0$. Nei punti in cui $s(x) \neq 0$ cioè se $x \in X - \mathrm{Supp}(E)$ si ha che $\tau(x) = 0 \Rightarrow \tau = 0$ sull'aperto $X - \mathrm{Supp}(E)$ cioè $X - \mathrm{Supp}(E) \subset \{\tau = 0\} \Rightarrow \overline{X - Supp(E)} \subset \{\tau = 0\}$ che è chiuso. Ma $\overline{X - Supp(E)} = X$ quindi $\tau = 0$ su tutto X. Si ha allora che $a_i = 0\ \forall i$ perché $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$ è una base. Ora completiamo la base $\sigma_0 s, \ldots \sigma_r s$ per ottenere una base $\sigma_0 s, \ldots \sigma_r s, \tau_1, \ldots, \tau_k$ per $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(H+E)\big)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi_{|mm_0D|} :& X \dashrightarrow \varphi_{|mm_0D|}(X) \\ & x \longmapsto [\sigma_0(x)s(x), \ldots, \sigma_r(x)s(x), \tau_1(x), \ldots, \tau_k(x)]. \end{aligned}$$

Se $x \in X - \mathrm{Supp}(E)$, cioè se $s(x) \neq 0$, possiamo scrivere

$$\varphi_{|mm_0D|}(x) = \big[\sigma_0(x), \ldots, \sigma_r(x), \frac{\tau_1(x)}{s(x)}, \ldots, \frac{\tau_k(x)}{s(x)}\big]$$

ma $\sigma_0(x), \ldots, \sigma_r(x)$ definiscono $\varphi_{|H|}$ che è un isomorfismo sull'immagine $\varphi_{|H|}(X)$ cioè $\varphi_{|H|}$ è iniettivo $\Rightarrow$ $\varphi_{|mm_0D|}$ è iniettivo $\big($sempre su $X - \mathrm{Supp}(E)\big)$. Infatti $\varphi_{|mm_0D|}(x) = \varphi_{|mm_0H|}(y)$ con $x, y \notin \mathrm{Supp}(E) \Rightarrow$

$$\varphi_{|H|}(x) = [\sigma_0(x), \ldots, \sigma_r(x)] = [\sigma_0(y), \ldots, \sigma_r(y)] = \varphi_{|H|}(y) \Rightarrow x = y$$

perché $\varphi_{|H|}$ è iniettivo. □

Una importante conseguenza del lemma di Kodaira è la seguente caratterizzazione dei divisori big.

Corollario 2.3.4. *Sia D un divisore su una varietà proiettiva X. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *D è big;*

(ii) *per ogni divisore intero A ampio su X esistono un $m \in \mathbb{N}$ e un divisore effettivo N su X tali che $mD \sim A + N$;*

(iii) *come in (ii) ma solo per qualche divisore ampio A;*

(iv) esistono un divisore ampio A, un $m \in \mathbb{N}$ e un divisore effettivo N tali che $mD \equiv_{num} A + N$.

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Sia D un divisore big. Se prendiamo un $r >> 0$ abbiamo che $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(rA)\big) \neq 0$ e $H^0(X, \mathcal{O}_X\big((r+1)A\big)) \neq 0$. Allora possiamo considerare due divisori effettivi H_r e H_{r+1} tali che $H_r \sim rA$ e $H_{r+1} \sim (r+1)A$ e applicando il lemma di Kodaira a H_{r+1} possiamo dire che esiste un $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $H^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'm_0D - H_{r+1})\big) \neq 0$, $m' \gg 0$. Prendiamo una sezione $s \in H^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'm_0D - H_{r+1})\big)$ tale che $\{s = 0\} =: N'$ sia il divisore effettivo associato ad s linearmente equivalente a $m'm_0D - H_{r+1}$. Allora $m'm_0D \sim N' + H_{r+1} \sim A + (H_r + N')$. Prendendo $N := H_r + N'$ e $m := m'm_0$ otteniamo $mD \sim A + N$.

Le implicazioni $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (iv)$ sono ovvie.

Dimostriamo $(iv) \Rightarrow (i)$. Sia $mD \equiv_{num} A + N$ con A divisore ampio, N divisore effettivo e $m \in \mathbb{N}$. Allora $mD - N \equiv_{num} A$ ma siccome A è ampio abbiamo che $mD - N$ è ampio per il corollario 1.6.6. Sia $A' = mD - N \Rightarrow mD = A' + N \Rightarrow m'mD = m'A' + m'N \; \forall \, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'mD)\big) = h^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'A' + m'N)\big)$$

quindi, come visto nella dimostrazione del lemma 2.3.1,

$$h^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'mD)\big) \geq h^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'A')\big)$$

perchè N è effettivo. Essendo A' ampio, $\exists \, c > 0$ tale che $h^0\big(X, \mathcal{O}_X(m'A)\big) \geq c \cdot m'^n$ per $m' \gg 0$ per il lemma 1.5.5. Quindi D è big per il lemma 2.3.3.

□

Corollario 2.3.5. *Sia D un divisore ampio (big) su una varietà proiettiva X. Allora esiste un $q \in \mathbb{N}$ tale che il morfismo $\varphi_{|qD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0\big(X, \mathcal{O}_X(qD)\big)$ è un'immersione (è birazionale sull'immagine).*

Dimostrazione. D è ampio se e solo se esiste un $q \gg 0$ tale che $qD =: H$ è molto ampio. Per definizione di divisore molto ampio abbiamo che $H =$

$\varphi*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)\big)$ attraverso un'immersione $\varphi : X \to \mathbb{P}^N$ che è proprio il morfismo $\varphi_{|qD|} = \varphi_{|H|}$ associato al divisore molto ampio H.

Se D è big allora per ogni divisore intero ampio A esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $mD \sim A + N$ con A divisore intero ampio e N divisore intero effettivo per il corollario 2.3.4. Inoltre esiste $s \gg 0$ tale che $sA := H$ è molto ampio. Quindi se $sm =: q$ e $sN =: E$ allora $qD \sim H + E$ e, come nella dimostrazione del lemma 2.3.3, abbiamo che $\varphi_{|qD|}$ è birazionale sull'immagine perché è un isomorfismo sull'aperto $X - \operatorname{Supp} E$.

Viceversa se esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{|qD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0\big(X, \mathcal{O}_X(qD)\big)$ è birazionale sull'immagine allora $\dim\big(\varphi_{|qD|}(X)\big) = \dim X$ cioè D è big per definizione.

$\square$

Una immediata conseguenza del punto (iv) del corollario 2.3.4 è la seguente:

Corollario 2.3.6. *Se $D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(X)$ sono numericamente equivalenti su una varietà proiettiva X, allora D_1 è big se e solo se D_2 è big.*

Osservazione 6. Notiamo inoltre che un divisore D è big se e solo se ogni (o qualcuno) suo multiplo positivo è big.

A questo punto possiamo estendere la definizione di divisore big ai $\mathbb{Q}$-divisori e agli $\mathbb{R}$-divisori. Infatti la precedente osservazione giustifica la seguente definizione:

Definizione 2.7. Un $\mathbb{Q}$-divisore D è big se esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che mD è intero e big.

Anche in questo caso vale l'analogo del corollario 2.3.6.

Per quanto riguarda gli $\mathbb{R}$-divisori la definizione è la seguente:

Definizione 2.8. Un $\mathbb{R}$-divisore $D \in \operatorname{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ è big se può essere scritto nella forma

$$D = \sum a_i \cdot D_i$$

dove D_i è un divisore intero big e a_i è un numero reale positivo.

Questa definizione è giustificata dal fatto che se D_1 e D_2 sono due $\mathbb{Q}$-divisori big allora $a_1D_1 + a_2D_2$ è big $\forall\, a_1, a_2$ numeri razionali positivi.

Ora possiamo estendere le caratterizzazioni numeriche dei divisori big interi al caso degli $\mathbb{R}$-divisori.

Proposizione 2.3.7. *Siano D e D' due $\mathbb{R}$-divisori su X.*

(i) Se $D \equiv_{num} D'$ allora D' è big $\Leftrightarrow$ D è big;

(ii) D è big $\Leftrightarrow$ $D \equiv_{num} A + N$ con A $\mathbb{R}$-divisore ampio e N $\mathbb{R}$-divisore effettivo.

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Sia $B = D - D'$, allora $B \equiv_{num} 0$. Come nella dimostrazione della proposizione 1.8.2 si può dimostrare che esistono $r_j \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathrm{Div}(X)$ con $B_j \equiv_{num} 0$ tali che $B = \sum_{j=1}^{t} r_j Bj$. Consideriamo $D = D' + B$. Essendo D' big $\Rightarrow$ $D' = \sum_{i=1}^{s} a_i P_i$ con $P_i \in \mathrm{Div}(X)$ big e $a_i \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

$$D = \sum_{i=1}^{s} a_i P_i + \sum_{j=1}^{t} r_j B_j = \sum_{j=1}^{t} \frac{a_1}{t}\big(P_1 + \frac{t}{a_1} \cdot r_j B_j\big) + \sum_{i=2}^{s} a_i P_i$$

dove $\sum_{i=2}^{s} a_i P_i$ è big oppure è 0 se $s = 1$. Allora, essendo $\frac{a_1}{t} \in \mathbb{R}^+$, resta da dimostrare che $P_1 + \frac{t}{a_1} \cdot r_j B_j$ è big. Cioè dimostriamo che se abbiamo $P, B \in \mathrm{Div}(X)$ con P big e $B \equiv_{num} 0$ allora $P + rB$ è big per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Se $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, possiamo assumere $q > 0$ e si ha che $P + rB$ è big (razionale) $\Leftrightarrow$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tale che $m(P + rB)$ è big (intero). Sia $m = q \Rightarrow q(P + rB) = qP + pB = qP$ perché $B \equiv_{num} 0$. Ma qP è big $\Rightarrow$ $(P + rB)$ è big per il corollario 2.3.6.

Se invece r è un numero reale qualsiasi, prendiamo $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $r_1 < r < r_2 \Rightarrow r = tr_1 + (1-t)r_2$, $t \in (0, 1)$. Allora $P + rB = t(P + r_1B) + (1-t)(P + r_2B)$ dove $P + r_1B$ e $P + r_2B$ sono big perché $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Allora, essendo $t > 0$ e $(1-t) > 0$ si ha che $P + rB$ è big ciè che D è big.

Dimostriamo (ii). Sia D un $\mathbb{R}$-divisore big. Allora è della forma $D = \sum d_i \cdot D_i$ con $d_i \in \mathbb{R}^+$ e $D_i \in \mathrm{Div}(X)$ big per ogni i. Quindi esiste $m_i \in \mathbb{N}$

tale che $m_iD_i \equiv_{num} A_i + N_i$ con $A_i \in \mathrm{Div}(X)$ ampio e $N_i \in \mathrm{Div}(X)$ effettivo per ogni i. Allora $D_i \equiv_{num} \frac{1}{m_i}A_i + \frac{1}{m_i}N_i \Rightarrow$

$$D \equiv_{num} \sum_{i=1}^{s} d_i\big(\frac{1}{m_i}A_i + \frac{1}{m_i}N_i\big) = \sum_{i=0}^{s} \frac{d_i}{m_i}A_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{m_1}N_i$$

dove $\sum_{i=0}^{s} \frac{d_i}{m_i}A_i =: A$ resta ampio e $\sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{m_1}N_i =: N$ resta effettivo quindi $D \equiv_{num} A + N$ nel modo desiderato.

Viceversa sia D un $\mathbb{R}$-divisore tale che $D \equiv_{num} A + N$ con A $\mathbb{R}$-divisore ampio e N $\mathbb{R}$-divisore effettivo. Allora

$$A = \sum_{i=1}^{s} a_iA_i \text{ con } a_i \in \mathbb{R}^+ \text{ e } A_i \in \mathrm{Div}(X) \text{ ampio e}$$
$$N = \sum_{j=1}^{t} n_iN_i \text{ con } n_i \in \mathbb{R}^{\geq 0} \text{ e } N_i \in \mathrm{Div}(X) \text{ effettivo } \forall\, i.$$

$$\Rightarrow D \equiv_{num} \sum_{i=1}^{s} a_iA_i + \sum_{j=1}^{t} n_iN_i = \sum_{j=1}^{t} \frac{a_1}{t}\big(A_1 + \frac{t}{a_1} \cdot n_jN_j\big) + \sum_{i=2}^{s} a_iA_i$$

dove $\sum_{i=2}^{s} a_iA_i$ è ampio quindi big oppure 0 se $s = 1$. Essendo $\frac{a_1}{t} \in \mathbb{R}^+$ resta da dimostrare che $A_1 + \frac{t}{a_1} \cdot n_jN_j$ è big. Quindi in generale che se A è un divisore intero ampio e N un divisore intero effettivo allora $A + sN$ è big per ogni $s \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Se $s \in \mathbb{Q}$, $s = \frac{p}{q}$ con $p, q > 0$, allora $A + sN = A + \frac{p}{q}N = \frac{1}{q}(qA + pN)$. Se poniamo $D := A + sN \Rightarrow qD = qA + pN$ dove $qA \in \mathrm{Div}(X)$ è ampio e $pN \in \mathrm{Div}(X)$ è effettivo (essendo $p, q > 0$) e siccome $q \in \mathbb{N} \Rightarrow D = A + sN$ è big.

Se invece s è un numero reale qualsiasi, sempre non-negativo, prendiamo $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $0 < s_1 < s < s_2$ e $s = ts_1 + (1 - t)s_2$, $t \in (0, 1)$. Allora $A + sN = t(A + s_1N) + (1 - t)(A + s_2N)$ dove $A + s_1N$ e $A + s_2N$ sono big perché $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$. Quindi, essendo $t > 0$ e $1 - t > 0$ si ha che $a + sN$ è big cioè che D è big.

$\square$

Corollario 2.3.8. *Sia $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ un $\mathbb{R}$-divisore big e siano $E_1, \ldots, E_t \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ $\mathbb{R}$-divisori arbitrari. Allora*

$$D + \varepsilon_1 E_1 + \ldots + \varepsilon_t E_t$$

resta big per $0 \leq |\varepsilon_i| \ll 1$.

Dimostrazione. Segue da (ii) della precedente proposizione e dall'analoga proposizione sull'ampiezza degli $\mathbb{R}$-divisori. □

2.4 Coni di divisori big e pseudoeffettivi

Dato che se due $\mathbb{R}$-divisori D e D' sono numericamente equivalenti allora D è big se e solo se D' è big, possiamo parlare di classi di equivalenza big e considerare altri coni in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$.

Definizione 2.9. Il *cono big*

$$\mathrm{Big}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

di X è il cono convesso di tutte le classi big di $\mathbb{R}$-divisori su X.

Il *cono pseudoeffettivo*

$$\overline{\mathrm{Eff}}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

di X è la chiusura del cono convesso generato dalle classi di tutti gli $\mathbb{R}$-divisori effettivi su X. Un divisore D si dice *pseudoeffettivo* se la sua classe giace nel cono pseudoeffettivo.

Teorema 2.4.1. *Il cono big è l'interno del cono pseudoeffettivo e il cono pseudoeffettivo è la chiusura del cono big:*

$$\mathrm{Big}(X) = \mathrm{int}\left(\overline{\mathrm{Eff}}(X)\right) \text{ , } \overline{\mathrm{Eff}}(X) = \overline{\mathrm{Big}(X)}.$$

Dimostrazione. Il cono pseudoeffettivo è chiuso per definizione, il cono big è aperto per il corollario precedente e $\mathrm{Big}(X) \subseteq \overline{\mathrm{Eff}}(X)$. Infatti sia $[B] \in \mathrm{Big}(X)$ si ha $B \equiv_{num} A + N$ con $A \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ ampio e $N \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ effettivo per la proposizione 2.3.7 e possiamo assumere A effettivo $\Rightarrow [B] \in \overline{\mathrm{Eff}}(X) \Rightarrow \mathrm{Big}(X) \subseteq \overline{\mathrm{Eff}}(X) \Rightarrow$

$$\mathrm{Big}(X) \subseteq \mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Eff}}(X)\big) \text{ e } \overline{\mathrm{Big}(X)} \subseteq \overline{\mathrm{Eff}}(X).$$

Dimostriamo le inclusioni inverse. Data $\eta \in \overline{\mathrm{Eff}}(X)$, η si può scrivere come $\eta = \lim_{k\to\infty} \eta_k$ dove η_k sono classi effettive. Fissando una classe ampia $\alpha \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ si ha

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \big(\eta_k + \frac{1}{k}\alpha\big).$$

Ognuna delle classi $\eta_k + \frac{1}{k}\alpha$ è big sempre per la proposizione precedente, quindi η è limite di classi big e abbiamo $\overline{\mathrm{Eff}}(X) \subseteq \overline{\mathrm{Big}(X)}$. Ora vogliamo $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Eff}}(X)\big) \subseteq \mathrm{Big}(X)$. Osserviamo che, in generale, $C \subseteq \mathbb{R}^N$, C convesso, implica che $\mathrm{int}(C) = \mathrm{int}(\overline{C})$, allora $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Eff}}(X)\big) = \mathrm{int}\big(\mathrm{Eff}(X)\big)$. Sia $\mu \in \mathrm{int}\big(\mathrm{Eff}(X)\big)$ e sia a una classe ampia. Abbiamo che $\mu - \varepsilon a \in \mathrm{Eff}(X)$ con $0 < \varepsilon \ll 1$. Allora $\mu = \varepsilon a + b$ con εa ampia e b effettiva cioè μ è big per la proposizione 2.3.7. Questo dimostra che $\mathrm{int}\big(\overline{\mathrm{Eff}}(X)\big) \subseteq \mathrm{Big}(X)$.

□

Vedremo adesso due lemmi che saranno molto utili nel capitolo successivo.

Lemma 2.4.2. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso. Siano $x \in \mathrm{int}(C)$ e $y \in \overline{C}$. Allora $x + y \in \mathrm{int}(C)$.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathrm{int}(C)$ allora $\exists\, r > 0$ tale che $D_r(x) \subset C$. Dimostriamo che $D_{\frac{r}{2}}(x+y) \subset C$.

Sia $z \in D_{\frac{r}{2}}(x+y)$. Allora $||z-x-y|| < \frac{r}{2}$. Sia $u := z-x-y \Rightarrow ||u|| < \frac{r}{2}$. Abbiamo $z = u + x + y$. Prendiamo $c \in C$ tale che $||y - c|| < \frac{r}{2}$ e scriviamo $z = u+x+y-c+c$. Vogliamo che $u+x+y-c \in C$. Questo è vero perché $||u + x + y - c - x|| = ||u + y - c|| \leq ||u|| + ||y - c|| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Cioè $u+x+y-c \in D_r(x)$ che sta in C. Ora, un cono convesso è chiuso rispetto alla somma, quindi $z = (u + x + y - c) + c \in C$.

Questo vuol dire che $D_{\frac{r}{2}}(x + y) \subset C$, cioè che $x + y \in \mathrm{int}(C)$.

□

Abbiamo quindi il seguente lemma:

Lemma 2.4.3. *Sia X una varietà proiettiva. Siano D un $\mathbb{R}$-divisore pseudoeffettivo (nef) e B un $\mathbb{R}$-divisore big (ampio) su X. Allora $D + B$ è un $\mathbb{R}$-divisore big (ampio).*

Dimostrazione. Il lemma segue dal Lemma 2.4.2 e dai teoremi 2.2.1 e 2.4.1. □

Capitolo 3

Bracket di divisori reali

3.1 Bracket di $\mathbb{R}$-divisori

Sia D un $\mathbb{R}$-divisore su una varietà proiettiva X. Allora D è della forma $D = \sum_i r_i D_i$ con $r_i \in \mathbb{R}$ e $D_i \in \mathrm{Div}(X)$. Come visto nel Lemma 1.4.2 possiamo scrivere, per ogni i, $D_i = H_{1i} - H_{2i}$, con $H_{1i}, H_{2i} \in \mathrm{Div}(X)$ divisori interi molto ampi.

Allora

$$D = \sum_i r_i H_{1i} - \sum_i r_i H_{2i} \sim_{\mathbb{R}} \sum_j b_j H_j$$

con $b_j \in \mathbb{R}$ e $H_j \in \mathrm{Div}(X)$.

Quindi, per ogni $\mathbb{R}$-divisore L su una varietà proiettiva X esistono A_i divisori interi molto ampi e $t_i \in \mathbb{R}$ tali che

$$L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i.$$

Definizione 3.1. Dato un $\mathbb{R}$-divisore L nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^s t_i A_i$ e un $m \in \mathbb{N}$, definiamo il *bracket* di mL come

$$\langle mL \rangle := \sum_{i=1}^s \lfloor m t_i \rfloor A_i$$

dove $\lfloor m t_i \rfloor$ è la parte intera del numero reale $m t_i$.

Indicheremo sempre $\mathcal{O}_X(\langle mL\rangle)$ con $\mathcal{O}_X\langle mL\rangle$ quindi $\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X\langle mL\rangle$ con $\mathcal{F}\langle mL\rangle$.

Osservazione 7. Essendo ogni numero reale $x\in\mathbb{R}$ uguale alla somma della sua parte intera $\lfloor x\rfloor$ con la sua parte frazionaria $\{x\}$ possiamo scrivere

$$\langle mL\rangle = \sum_i \lfloor mt_i\rfloor A_i = \sum_i mt_iA_i - \sum_i \{mt_i\}A_i$$

da cui

$$mL \sim_{\mathbb{R}} \sum_i mt_iA_i = \langle mL\rangle + \sum_i \{mt_i\}A_i.$$

3.2 Funzione di Hilbert del bracket

Chiariamo adesso alcuni aspetti sulla crescita di funzioni $h:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ che ci saranno utili per una caratterizzazione asintotica di $\mathbb{R}$-divisori big nella forma $L\sim_{\mathbb{R}}\sum t_iA_i$ prima descritta.

Definizione 3.2. Sia $h:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ una funzione. Diciamo che

- h *"cresce al più come m^n"* se
$$\limsup_{m\to\infty}\frac{h(m)}{m^n}<\infty;$$
- h *"cresce come m^n"* se
$$0<\limsup_{m\to\infty}\frac{h(m)}{m^n}<\infty.$$

Lemma 3.2.1. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n<\infty \Leftrightarrow \exists\, c\in\mathbb{R} \text{ tale che } a_n\le c\;\forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Sia $b_k=\sup_{n\ge k}\{a_n\}$. Allora $\limsup_{n\to\infty} a_n=\inf b_k=\lim_{k\to\infty} b_k =: \beta$.

($\Leftarrow$) $a_n\le c\;\forall\, n\Rightarrow b_k\le c\;\forall\, k\Rightarrow \beta=\lim_{k\to\infty} b_k\le c\Rightarrow\beta<\infty$;

($\Rightarrow$) $\limsup_{n\to\infty} a_n=\beta<\infty\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0\;\exists\, k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che $|b_k-\beta|<\varepsilon$, $\forall\, k\ge k_\varepsilon$. Ma β è anche $\beta=\inf_k\{b_k\}\Rightarrow b_k-\beta\ge 0\Rightarrow |b_k-\beta|=b_k-\beta\Rightarrow b_k<\beta+\varepsilon$, $\forall\, k>k_\varepsilon$. Ora consideriamo delle costanti c_i per $i\in\{1,\dots,k_\varepsilon\}$ tali che $a_i\le c_i$, $\forall\, i$. Sia $c:=\max\{c_i \text{ con } 1\le i\le k_\varepsilon, \beta+\varepsilon\}\Rightarrow a_k\le b_k\le c$, per $k>k_\varepsilon\Rightarrow a_n\le c$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. $\square$

Lemma 3.2.2. *Sia X una varietà proiettiva di dimensione n. Sia L un $\mathbb{R}$-divisore nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i$ con $t_i \in \mathbb{R}$ e $A_i \in \mathrm{Div}(X)$ divisori molto ampi. Sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X. Allora $h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)$ cresce al più come m^n.*

Dimostrazione. Prendiamo un intero $t > 0$ tale che $t_i \leq t$ per ogni i. Consideriamo i divisori $\langle mL\rangle = \sum_i \lfloor mt_i \rfloor A_i$ e $\sum_i mtA_i$. Allora

$$D := \sum_i mtA_i - \sum_i \lfloor mt_i \rfloor A_i = \sum_i (mt - \lfloor mt_i \rfloor) A_i$$

è molto ampio, essendo $mt - \lfloor mt_i \rfloor > 0$ e A_i molto ampio per ogni i. Abbiamo quindi che $\mathcal{F}(-\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{F}$ (si veda [Bir13, 2.6]) cioè

$$\mathcal{F}(\sum_i \lfloor mt_i \rfloor A_i - \sum_i mtA_i) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}(\sum_i \lfloor mt_i \rfloor A_i) \subseteq \mathcal{F}(\sum_i mtA_i).$$

Allora esiste un morfismo iniettivo

$$H^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle) \longrightarrow H^0\big(X, \mathcal{F}(\sum_i mtA_i)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle) \leq h^0\big(X, \mathcal{F}(\sum_i mtA_i)\big)$$

ma $\sum_i tA_i$ è ampio essendo $t > 0$ quindi per 1.5.5

$$h^0\big(X, \mathcal{F}(\sum_i mtA_i)\big) \leq c \cdot m^n, \ \exists\, c > 0 \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \frac{h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)}{m^n} \leq c, \ \exists\, c > 0 \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Allora per il Lemma 3.2.1 abbiamo

$$\limsup_{m \to \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty$$

cioè $h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)$ cresce al più come m^n.

□

Proposizione 3.2.3. *Sia X una varietà proiettiva di dimensione n. Sia L un $\mathbb{R}$-divisore nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i$.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle)$ *cresce come* m^n*;*

2) per qualche fascio coerente $\mathcal{F}$*,* $h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)$ *cresce come* m^n*;*

3) per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ *con supporto uguale a* X*,* $h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)$ *cresce come* m^n*;*

4) L *è big.*

Dimostrazione. **1)** $\Rightarrow$ **3)** Ricordiamo che il supporto di un fascio coerente $\mathcal{F}$ è definito come $\operatorname{Supp} F := \{p \in X \mid \mathcal{F}_p \neq 0\}$.

Sia A un divisore intero effettivo e sufficientemente ampio, cioè A è un multiplo molto grande di un divisore ampio ($A = mA_1$ con $m \gg 0$ e A_1 divisore ampio). Abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-A) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

da cui otteniamo, tensorizzando con $\mathcal{F}(A)$, la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{O}_A \longrightarrow 0.$$

Sostituendo $\mathcal{F}$ con $\mathcal{F}(A)$ possiamo assumere $\mathcal{F}$ globalmente generato $\big(\mathcal{F}(A)$ lo è perché A è ampio$\big)$. Sia $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ una base di $H^0(X, \mathcal{F})$. Per definizione di fascio globalmente generato abbiamo il morfismo suriettivo $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ che induce, per ogni i, un morfismo $\varphi_i : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$. Possiamo dire che esiste un $i \in \{1, \dots, r\}$ per il quale φ_i è iniettivo. Infatti supponiamo per assurdo che φ_i sia non iniettivo per ogni i. Sia $\mathcal{F}_i := \operatorname{Im} \varphi_i$. Essendo $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ suriettivo abbiamo $\operatorname{Supp} \mathcal{F} = \bigcup \operatorname{Supp} \mathcal{F}_i$ con $\operatorname{Supp} \mathcal{F}_i \subsetneq X$ (perché se φ_i non è iniettivo allora esiste un $p \in X$ tale che $(\mathcal{F}_i)_p = 0$) e questo contraddice l'opotesi fatta sul supporto di $\mathcal{F}$. Allora esiste un $i \in \{1, \dots, r\}$ tale che $\varphi_i : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ è iniettivo.

$$\Rightarrow h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle) \leq h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle).$$

Per ipotesi sappiamo che

$$0 < \limsup_{m \to \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty$$

e per il lemma 3.2.2 sappiamo che

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty$$

$$\Rightarrow 0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty$$

che significa che $h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle)$ cresce come m^n per $\mathcal{F}$ fascio coerente con $\operatorname{Supp}\mathcal{F} = X$.

3) $\Rightarrow$ **4**) Prendiamo $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(-A)$ con A sufficientemente ampio. Allora $h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle) \gg 0$ per $m \gg 0$ cioè in particolare

$$\begin{aligned} h^0(X, \mathcal{F}\langle mL\rangle) &= h^0\big(X, \mathcal{O}_X(\mathcal{F}\langle mL\rangle - A)\big) = \\ &= h^0\big(X, \mathcal{O}_X(\textstyle\sum_i \lfloor mt_i\rfloor A_i - A)\big) \neq 0 \text{ per } m \gg 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste un divisore intero effettivo D tale che

$$D \sim \sum_i \lfloor mt_i\rfloor A_i - A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow mL &\sim_{\mathbb{R}} \sum_i mt_iA_i \sim_{\mathbb{R}} \sum_i mt_iA_i + D + A - \sum_i \lfloor mt_i\rfloor A_i = \\ &= \sum_i (mt_i - \lfloor mt_i\rfloor)A_i + D + A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow mL \equiv_{num} \sum_i (mt_i - \lfloor mt_i\rfloor)A_i + D + A$$

$$\Rightarrow L \equiv_{num} \frac{1}{m}\Big(\sum_i (mt_i - \lfloor mt_i\rfloor)A_i + A\Big) + \frac{1}{m}D$$

dove $\frac{1}{m}\big(\sum_i (mt_i - \lfloor mt_i\rfloor)A_i + A\big)$ è ampio e $\frac{1}{m}D$ è effettivo $\Rightarrow L$ è big per il lemma 2.3.4.

4) $\Rightarrow$ **1**) Per il lemma 3.2.2 sappiamo che

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle)}{m^n} > 0.$$

Consideriamo $\langle mL\rangle$. Abbiamo che $\langle mL\rangle = \langle mL\rangle - m\langle L\rangle + m\langle L\rangle = \sum_i \lfloor mt_i\rfloor A_i - m\sum_i \lfloor t_i\rfloor A_i + m\langle L\rangle = \sum_i(\lfloor mt_i\rfloor - m\lfloor t_i\rfloor)A_i + m\langle L\rangle$ dove $\lfloor mt_i\rfloor - m\lfloor t_i\rfloor \geq 0$. Allora $\sum_i(\lfloor mt_i\rfloor - m\lfloor t_i\rfloor)A_i$ è un divisore effettivo e questo implica, come visto nella dimostrazione del lemma 2.3.1, che

$$h^0(X,\mathcal{O}_X\langle mL\rangle) \geq h^0\big(X,\mathcal{O}_X(m\langle L\rangle)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X,\mathcal{O}_X\langle mL\rangle)}{m^n} \geq \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0\big(X,\mathcal{O}_X(m\langle L\rangle)\big)}{m^n}.$$

Possiamo sostituire L con un suo multiplo sL con $s \gg 0$. Infatti in generale se abbiamo una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ allora $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_{sn}$ per ogni sottosuccessione $\{a_{sn}\}$ di $\{a_n\}$. Ora sia $L' = sL$, che è big perché L è big. Vogliamo che $\limsup\limits_{m\to\infty} \frac{h^0(X,\mathcal{O}_X\langle mL'\rangle)}{m^n} > 0$. Come vedremo nel Teorema 3.3.1 vale che, per $s \gg 0$, L è big $\Leftrightarrow$ $\langle sL\rangle$ è big. Allora abbiamo

$$h^0(X,\mathcal{O}_X\langle mL'\rangle) \geq h^0\big(X,\mathcal{O}_X(m\langle L'\rangle)\big) \geq c\cdot m^n\ ,\ c>0$$

per il lemma 2.3.3. Quindi

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0\big(X,\mathcal{O}_X(m\langle L'\rangle)\big)}{m^n} \geq c > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X,\mathcal{O}_X\langle mL'\rangle)}{m^n} > 0.$$

Ma abbiamo detto che

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0\big(X,\mathcal{O}_X(\langle mL\rangle)\big)}{m^n} \geq \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0\big(X,\mathcal{O}_X(\langle mL'\rangle)\big)}{m^n}$$

$$\Rightarrow 0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0\big(X,\mathcal{O}_X(\langle mL\rangle)\big)}{m^n} < \infty$$

$\Rightarrow h^0(X,\mathcal{O}_X\langle mL\rangle)$ cresce come m^n se L è big.

3) $\Rightarrow$ **2**) Questa implicazione è ovvia.

2) $\Rightarrow$ **1**) Per ipotesi

$$0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X,\mathcal{F}\langle mL\rangle)}{m^n} =: \beta < \infty.$$

Ora per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ esiste una filtrazione di fasci coerenti

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$$

tale che per ogni $0 < j \leq n$ esiste un'immersione chiusa $f : S \to X$ di uno schema integrale S in X e un fascio ideale $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ tale che $\mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1} \cong f_*\mathcal{I}$ (si veda [StkPr, 29, "dévissage of coherent sheaves"]).

Sia $\mathcal{T} := \{l \in \{0, \ldots, n\} \mid h^0(X, \mathcal{F}_l\langle mL\rangle) \text{ cresce come } m^n\}$. Per ipotesi $n \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} \neq \emptyset$. Sia $j := \min \mathcal{T}$. In particolare

$$0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty.$$

Abbiamo quindi la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{j-1} \longrightarrow \mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1} \cong f_*\mathcal{I} \longrightarrow 0$$

da cui la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle \longrightarrow \mathcal{F}_j\langle mL\rangle \longrightarrow (f_*\mathcal{I})\langle mL\rangle \longrightarrow 0$$

da cui la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle) \longrightarrow H^0\big(X, (f_*\mathcal{I})\langle mL\rangle\big) \longrightarrow \ldots.$$

Ma $H^0\big(X, (f_*\mathcal{I})\langle mL\rangle\big) \cong H^0\big(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle\big)$ per [Har77, III, Lemma 2.10]. Abbiamo quindi la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle) \longrightarrow \ldots.$$

$$\Rightarrow h^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle) \leq h^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle) + h^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle)$$

$$\Rightarrow \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle)}{m^n} \geq$$

$$\geq \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle)}{m^n} - \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle)}{m^n}.$$

Quì

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle)}{m^n} = \beta > 0$$

per ipotesi, mentre

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle)}{m^n} = 0.$$

Infatti $\mathcal{F}_{j-1} \subset \mathcal{F}_j \Rightarrow h^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle) \leq h^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle)}{m^n} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{F}_j\langle mL\rangle)}{m^n} = \beta > 0$$

$\Rightarrow$ se $\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X,\mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle)}{m^n} > 0$ allora $h^0(X, \mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle)$ cresce come m^n e questo contraddice la definizione di j. Allora $\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X,\mathcal{F}_{j-1}\langle mL\rangle)}{m^n} = 0.$ Questo implica che

$$\Rightarrow \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle)}{m^n} \geq \beta > 0$$

Ora $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S \Rightarrow \mathcal{I}\langle mL\rangle \subset \mathcal{O}_S\langle mL\rangle \Rightarrow h^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle) \leq h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle) \Rightarrow$

$$\frac{h^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle)}{m^n} \leq \frac{h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle)}{m^n} = \frac{h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle)}{m^{\dim S}} \cdot \frac{m^{\dim S}}{m^n}.$$

Per il lemma 3.2.2 e il lemma 3.2.1 abbiamo

$$\frac{h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle)}{m^{\dim S}} \leq c < \infty \ , \ \exists\, c \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo quindi che

$$0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(S, \mathcal{I}\langle mL\rangle)}{m^n} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle)}{m^n}.$$

Se fosse $\dim S < n$ allora

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle)}{m^n} = \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(S, \mathcal{O}_S\langle mL\rangle)}{m^{\dim S}} \cdot \frac{m^{\dim S}}{m^n} \leq$$

$$\leq \limsup_{m\to\infty} c \cdot m^{\dim S - n} = 0$$

e questo non è possbile. Quindi risulta che $\dim S = n \Rightarrow S = X \Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{O}_X \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle)}{m^n} < \infty$$

cioè $h^0(X, \mathcal{O}_X\langle mL\rangle)$ cresce come m^n.

□

3.3 Positività del bracket di $\mathbb{R}$-divisori

Vedremo adesso una caratterizzazione di $\mathbb{R}$-divisori ampi e big quando vengono sostituiti dal bracket di un loro multiplo positivo.

I risultati di questa sezione sono indipendenti da quelli della sezione 3.2.

Teorema 3.3.1. *Sia X una varietà proiettiva e L un $\mathbb{R}$-divisore di Cartier nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i$ dove $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ e A_i divisore di Cartier molto ampio $\forall i$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) L è ampio (big);

(2) $\exists\, s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è ampio (big) per ogni $s \geq s_0$;

(3) $\exists\, s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è ampio (big).

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) Sia L ampio (big). Indichiamo $L = A$ (rispettivamente $L = A + N$ con N $\mathbb{R}$-divisore effettivo per la proprosizione 2.3.7) e A $\mathbb{R}$-divisore ampio. Per l'osservazione 7 possiamo scrivere $\langle sL \rangle \equiv_{num} sL - \sum_i \{st_i\} A_i \equiv_{num} sA - \sum_i \{st_i\} A_i$ (rispettivamente $\langle sL \rangle \equiv_{num} sA + sN - \sum_i \{st_i\} A_i$). Quì abbiamo $sA - \sum_i \{st_i\} A_i$ con $0 \leq \{st_i\} < 1\ \forall\ s$. Vogliamo dimostrare che esiste un $s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $sA - \sum_i \{st_i\} A_i$ è ampio per ogni $s \geq s_0$. Possiamo farlo in due modi:

(1)

$$sA - \sum_{i=1}^{p} \{st_i\} A_i = s\big(A - \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i\big)$$

dove $0 \leq \frac{\{st_i\}}{s} < 1$. Ora

$$||A - \big(A - \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i\big)|| = ||\sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i|| \leq \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} ||A_i||.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $D_\varepsilon\big([A]\big) \subseteq \mathrm{Amp}(X)$ e sia $M := \max_{1 \leq i \leq p}\{||A_i||\} \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} ||A_i|| < \frac{pM}{s} < \varepsilon \text{ se } s > \frac{pM}{\varepsilon}.$$

Sia $s_0 := \lceil \frac{pM}{\varepsilon} \rceil$ la parte intera superiore di $\frac{pM}{\varepsilon}$. Allora abbiamo dimostrato che per ogni $s \geq s_0$ si ha

$$||A - \big(A - \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i\big)|| < \varepsilon,$$

cioè che

$$A - \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i \in D_\varepsilon\big([A]\big) \subseteq \mathrm{Amp}(X),$$

cioè che $A - \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i$ è ampio. Questo implica che $s\big(A - \sum_{i=1}^{p} \frac{\{st_i\}}{s} A_i\big)$ è ampio per $s \geq s_0$, quindi che $sA - \sum_i \{st_i\} A_i$ è ampio per $s \geq s_0$.

Un altro modo per dimostrare che $sA - \sum_i \{st_i\} A_i$ è ampio è il seguente:
(2)

$$sA - \sum_i \{st_i\} A_i = sA - \sum_i A_i + \sum_i \big(1 - \{st_i\}\big) A_i$$

dove $\sum_i \big(1 - \{st_i\}\big) A_i$ è ampio essendo $1 - \{st_i\} > 0$. Ora A è un $\mathbb{R}$-divisore ampio quindi è della forma $A = a_1 A'_1 + \ldots + a_t A'_t$ con $a_i \in \mathbb{R}^+$ e A'_i divisore intero ampio per ogni i. Poniamo $\sum_i A_i =: D$. Poiché A'_1 è intero ampio esiste $s_1 \in \mathbb{N}$ tale che $s_1 A'_1 - D$ è ampio. Sia ora $s_0 = \lceil \frac{s_1}{a_1} \rceil + 1$ e sia $s \in \mathbb{Z}$ tale che $s \geq s_0$. Allora $sA - D = sa_1 A'_1 - D + sa_2 A'_2 + \ldots + sa_t A'_t = (sa_1 - s_1) A'_1 + (s_1 A'_1 - D) + sa_2 A'_2 + \ldots + sa_t A'_t$ è ampio essendo $sa_1 - s_1 > 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che esiste un $s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $sA - \sum_i \{st_i\} A_i$ è ampio per $s \geq s_0$ cioè tale che

$$\langle sL \rangle \equiv_{num} sA - \sum_i \{st_i\} A_i$$

$$(\text{rispettivamente } \langle sL \rangle \equiv_{num} sA + sN - \sum_i \{st_i\} A_i)$$

è ampio (rispettivamente big per la proposizione 2.3.7, essendo sN un $\mathbb{R}$-divisore effettivo).

(2) $\Rightarrow$ (3) Questa implicazione è ovvia.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supponiamo che $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è ampio (big). Per l'osservazione 7 possiamo scrivere $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle + \sum_i \{st_i\} A_i$. Essendo $\langle sL \rangle$ ampio (rispettivamente big) otteniamo $sL \equiv_{num} A + \sum_i \{st_i\} A_i$ (rispettivamente

$sL \equiv_{num} A + N + \sum_i \{st_i\} A_i$ con N $\mathbb{R}$-divisore effettivo per la proposizione 2.3.7) e A $\mathbb{R}$-divisore ampio. Siccome $\{st_i\} \geq 0$, $\forall i \Rightarrow A + \sum_i \{st_i\} A_i =: A'$ è ampio. Allora $sL \equiv_{num} A'$ (rispettivamente $sL \equiv_{num} A' + N$) è ampio (rispettivamente big) per la proposizione 1.8.2 (rispettivamente per la proposizione 2.3.7). Quindi L è ampio (rispettivamente big).

□

Meno generale è la caratterizzazione della positività del bracket di $\mathbb{R}$-divisori nef e pseudoeffettivi. La vediamo nel seguente teorema:

Teorema 3.3.2. *Sia X una varietà proiettiva e L un $\mathbb{R}$-divisore di Cartier nella forma $L \sim_{\mathbb{R}} \sum_i t_i A_i$ dove $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ e A_i divisore di Cartier molto ampio $\forall i$:*

(1) L è big (ampio) o L è pseudoeffettivo non big (nef non ampio) e $t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \Leftrightarrow$ esiste un $s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef), $\forall\ s \geq s_0$;

(2) L è big (ampio) o L è pseudoeffettivo non big (nef non ampio) e $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i \Leftrightarrow$ esiste un $s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef).

Dimostrazione. Dimostriamo (1). ($\Rightarrow$) Sia L big (ampio). Allora, per il teorema 3.3.1, $\exists\ s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è big (ampio), $\forall s \geq s_0$. Quindi $\exists\ s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef), $\forall s \geq s_0$, per il teorema 2.4.1 (rispettivamente per il teorema 2.2.1). Supponiamo invece che L sia pseudoeffettivo non big (nef non ampio) e $t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$. Per l'osservazione 7 possiamo scrivere $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle + \sum_i \{st_i\} A_i$. Ma se $t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \Rightarrow st_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$, $\forall s \in \mathbb{N} \Rightarrow \{st_i\} = 0$, $\forall i$, $\forall s \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_i \{st_i\} A_i \equiv_{num} 0$. Allora $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle$, $\forall s \in \mathbb{N}$, cioè $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef), $\forall s \in \mathbb{N}$. Quindi $\exists\ s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef), $\forall s \geq s_0$.

($\Leftarrow$) Supponiamo che $\exists\ s_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef), $\forall s \geq s_0$. Per l'osservazione 7 possiamo scrivere $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle + \sum_i \{st_i\} A_i$. Poniamo $A_s := \sum_i \{st_i\} A_i$. Osserviamo che $A_s \equiv_{num} 0$, $\forall s \geq s_0 \Leftrightarrow t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$. Infatti se $t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \Rightarrow st_i \in \mathbb{Z}, \forall i$, $\forall s \in \mathbb{N}$, in particolare $\forall\ s \geq$

$s_0 \Rightarrow \{st_i\} = 0$, $\forall i$, $\forall s \geq s_0 \Rightarrow A_s \equiv_{num} 0$, $\forall s \geq s_0$. D'altra perte, se $A_s \equiv_{num} 0$, $\forall s \geq s_0 \Rightarrow \{st_i\} = 0$, $\forall i$, $\forall s \geq s_0$, altrimenti A_s sarebbe ampio $\Rightarrow st_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$, $\forall s \geq s_0$, quindi $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i$. Ora, se per assurdo $\exists\ i$ tale che $t_i \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ allora $t_i =: \frac{a}{b}$, con $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$. Ma $\exists\ s \geq s_0$ tale che $\mathrm{MCD}(s, b) = 1 \Rightarrow st_i = \frac{sa}{b} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e questa è una contraddizione perché $st_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$, $\forall s \geq s_0$.

Ora, se L non è big (non è ampio) dovrà essere $A_s \equiv_{num} 0$, $\forall s \geq s_0$, altrimenti sL sarebbe numericamente equivalente alla somma di un divisore pseudoeffettivo (nef) e di uno big (ampio) quindi sarebbe big (ampio), cioè L sarebbe big (ampio) per il lemma 2.4.3 e questa è una contraddizione. Allora $A_s \equiv_{num} 0$, $\forall s \geq s_0$, cioè $t_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$ e $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle$ che è pseudoeffettivo (nef), $\forall s \geq s_0$, quindi L è pseudoeffettivo (nef).

Dimostriamo (2). ($\Rightarrow$) Sia L big (ampio). Allora per il teorema 3.3.1 $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è big (ampio), cioè tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef) per il teorema 2.4.1 (rispettivamente per il teorema 2.2.1). Supponiamo invece che L sia pseudoeffettivo non big (nef non ampio) e $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i$. Per l'osservazione 7 possiamo scrivere $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle + \sum_i \{st_i\} A_i$. Ma se $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i$, cioè $t_i =: \frac{a_i}{b_i}$, con $\mathrm{MCD}(a_i, b_i) = 1$, $\forall i$, allora esiste $s = \mathrm{mcm}(b_1, b_2, \ldots) \in \mathbb{N}$ tale che $st_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \Rightarrow \exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\{st_i\} = 0$, $\forall i \Rightarrow \exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_i \{st_i\} A_i \equiv_{num} 0$. Allora $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle$, cioè $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef).

($\Leftarrow$) Supponiamo che $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\langle sL \rangle$ è pseudoeffettivo (nef). Per l'osservazione 7 possiamo scrivere $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle + \sum_i \{st_i\} A_i$. Poniamo $A_s := \sum_i \{st_i\} A_i$. Osserviamo che $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $A_s \equiv_{num} 0 \Leftrightarrow t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i$. Infatti se $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i$, abbiamo visto che $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $A_s \equiv_{num} 0$. Viceversa se $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $A_s \equiv_{num} 0$ allora $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $\{st_i\} = 0$, $\forall i \Rightarrow \exists\ s \in \mathbb{N}$ tale che $st_i =: a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \Rightarrow t_i = \frac{a_i}{s} \in \mathbb{Q}$, $\forall i$.

Ora, se L non è big (non è ampio) dovrà essere $A_s \equiv 0$ altrimenti sL sarebbe numericamente equivalente alla somma di un divisore pseudoeffettivo (nef) e di uno big (ampio) quindi sarebbe big (ampio) per il lemma 2.4.3, cioè L sarebbe big (ampio) e questa è una contraddizione. Allora $A_s \equiv_{num} 0$

quindi $t_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i$ e $sL \equiv_{num} \langle sL \rangle$ che è pseudoeffettivo (nef) quindi L è pseudoeffettivo (nef).

□

Esempio 3.1. Vediamo ora un esempio di $\mathbb{R}$-divisore L pseudoeffettivo non big tale che $\langle sL \rangle$ sia non pseudoeffettivo per ogni $s \in \mathbb{N}$.

Consideriamo $L = 0$. Questo è un divisore pseudoeffettivo non big.

Sia $H \in \mathrm{Div}(X)$, H molto ampio. Siano $H_1, H_2 \in \mathrm{Div}(X)$ molto ampi tali che $H_1 \sim H$ e $H_2 \sim H$, ma $H_1 \neq H_2$. Allora $0 \sim H_1 - H_2$ e quindi $0 \sim_{\mathbb{R}} \sqrt{2}H_1 - \sqrt{2}H_2$. Ora, per $s \in \mathbb{N}$ consideriamo il bracket di $s0$:

$$\langle s0 \rangle = \lfloor s\sqrt{2} \rfloor H_1 + \lfloor -s\sqrt{2} \rfloor H_2.$$

Ma $\lfloor -s\sqrt{2} \rfloor = -\lfloor s\sqrt{2} \rfloor - 1$, quindi

$$\begin{aligned}\langle s0 \rangle &= \lfloor s\sqrt{2} \rfloor H_1 + \big(- \lfloor s\sqrt{2} \rfloor - 1 \big) H_2 = \\ &= \lfloor s\sqrt{2} \rfloor H_1 - \lfloor s\sqrt{2} \rfloor H_2 - H_2 \sim_{\mathbb{R}} \\ &\sim_{\mathbb{R}} -H_2 \sim -H\end{aligned}$$

ma $-H$ non è pseudoeffettivo, quindi $\langle s0 \rangle$ non è pseudoeffettivo per ogni $s \in \mathbb{N}$.

Bibliografia

[Bir13] Caucher Birkar, *The augmented base locus of real divisors over arbitrary fields*, 2013.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Laz04] Robert Lazersfeld, *Positivity in Algebraic Geometry, I* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[StkPr] *The stacks project.* Sito web: http://stacks.math.columbia.edu.

Ringraziamenti

Ringrazio infinitamente la mia famiglia per la pazienza, il sostegno e la fiducia incondizionata che ho ricevuto in questi anni.

Ringrazio il professor Lopez per la professionalità, la passione e la pazienza con le quali mi ha permesso di realizzare questo lavoro.

Ringrazio le amiche geometre per le consulenze tecniche senza le quali la geometria algebrica sarebbe rimasta molto distante da me.

Infine mi rivolgo agli amici. Tutti, senza esclusione, sono stati partecipi di un percorso che, se vale qualcosa, è anche il loro.