UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 13-6-2013

TESTO E SOLUZIONI

A. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + kX_3 - X_4 = -1 \\ 3X_1 + X_2 - X_4 = k \\ kX_1 + X_2 + kX_3 - X_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE (COME RECUPERO DEL I ESONERO):

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & k \\ k & 1 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - 3R_1, R_3 \to R_3 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & k & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -3k & 2 & k+3 \\ 0 & 1+2k & k-k^2 & -1+k & 1+k \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to R_3 - \frac{1+2k}{7} R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & k & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -3k & 2 & k+3 \\ 0 & 0 & \frac{-k^2+10k}{7} & \frac{3k-9}{7} & \frac{-2k^2+4}{7} \end{pmatrix}.$$

Supponiamo $k \neq 0, 10$. Allora il sistema è a gradini ed ha come soluzioni

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{2k^2 + 3kt - 9t - 4}{k(k-10)},\ X_2 = \frac{k^2 + kt - k - t - 6}{k - 10},\ X_1 = \frac{-3k - 3t + 2}{k - 10}.$$

Supponiamo ora $k = 10$. Il sistema ha come soluzioni

$$X_4 = -\frac{28}{3},\ X_3 = -\frac{7t + 9}{10},\ X_2 = \frac{2 - 9t}{3},\ X_1 = t.$$

Infine se $k = 0$, il sistema ha come soluzioni

$$X_4 = -\frac{4}{9},\ X_3 = t,\ X_2 = \frac{5}{9},\ X_1 = -\frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE (COME SCRITTO):

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & k & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & k & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, dunque $r(A) \geq 2$. Inoltre

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 1 & 0 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = k(10 - k),\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(k - 3)$$

pertanto $r(A) = 3$ ed il sistema è risolubile con ∞^1 soluzioni, che possiamo calcolare con la regola di Cramer.

Se $k \neq 0, 10$, posto $X_4 = t$ si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 + t & -2 & k \\ k + t & 1 & 0 \\ 1 + t & 1 & k \end{vmatrix}}{k(10 - k)} = \frac{-3k - 3t + 2}{k - 10},\ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 + t & k \\ 3 & k + t & 0 \\ k & 1 + t & k \end{vmatrix}}{k(10 - k)} = \frac{k^2 + kt - k - t - 6}{k - 10},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 + t \\ 3 & 1 & k + t \\ k & 1 & 1 + t \end{vmatrix}}{k(10 - k)} = \frac{2k^2 + 3kt - 9t - 4}{k(k - 10)}.$$

Se $k = 10$ osserviamo che

$$\begin{vmatrix} -2 & 10 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -30$$

pertanto, posto $X_1 = t$ si ha

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1-t & 10 & -1 \\ 10-3t & 0 & -1 \\ 1-10t & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{2-9t}{3}, \; X_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1-t & -1 \\ 1 & 10-3t & -1 \\ 1 & 1-10t & -1 \end{vmatrix}}{-30} = -\frac{7t+9}{10},$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 10 & -1-t \\ 1 & 0 & 10-3t \\ 1 & 10 & 1-10t \end{vmatrix}}{-30} = -\frac{28}{3}.$$

Se $k = 0$ osserviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

pertanto, posto $X_3 = t$ si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\frac{1}{3}, \; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{5}{9}, X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = -\frac{4}{9}. \blacksquare$$

2. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 = 0 \\ X_1 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$W_h =< (1,-1,1,0),(1,2,0,-1),(1,-h,3,2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e

$$(W_h \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) Posto, nelle equazioni di U, $X_1 = t, X_2 = s$, si trova $X_3 = -\frac{t}{2}, X_4 = t$, quindi ogni vettore di U è del tipo

$$(t, s, -\frac{t}{2}, t) = t(1,0,-\frac{1}{2},1) + s(0,1,0,0)$$

e quindi una base di U è $\{(1,0,-\frac{1}{2},1),(0,1,0,0)\}$ e pertanto U ha dimensione 2.
Per calcolare la dimensione di W_h consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -h & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

PER LO SCRITTO usiamo il principio dei minori orlati. Dato che $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ consideriamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -h & 3 \end{vmatrix} = h-7 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -h & 2 \end{vmatrix} = 7-h$$

da cui deduciamo che $\dim W_h = \begin{cases} 2 & \text{se } h=7 \\ 3 & \text{se } h \neq 7 \end{cases}$ ed una base di W_h è data da $\{(1,-1,1,0),(1,2,0,-1)\}$ se $h=7$ e $\{(1,-1,1,0),(1,2,0,-1),(1,-h,3,2)\}$ se $h \neq 7$.
PER IL RECUPERO DEL I ESONERO facciamo operazioni elementari su A.
Con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -h+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 + \frac{h-1}{3}R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{7-h}{3} & \frac{7-h}{3} \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $\dim W_h = \begin{cases} 2 & \text{se } h=7 \\ 3 & \text{se } h \neq 7 \end{cases}$ ed una base di W_h è data da $\{(1,-1,1,0),(1,2,0,-1)\}$ se $h=7$ e $\{(1,-1,1,0),(1,2,0,-1),(1,-h,3,2)\}$ se $h \neq 7$.
(b) Per calcolare la dimensione di W_h+U, considerate le operazioni fatte sopra per W_h, facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_2 con R_4 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - 3R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{2}{3}R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo pertanto che, per ogni h, $\dim(W_h + U) = 4$ e quindi, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_h \cap U) = \dim W_h + \dim U - \dim(W_h + U) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 7 \\ 1 & \text{se } h \neq 7 \end{cases}.$$

(c) Se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e $(W_h \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4$, allora $\dim V = 4 - \dim(W_h \cap U)$, quindi necessariamente deve essere $h \neq 7$. Del resto se $h \neq 7$ abbiamo $\dim(W_h \cap U) = 1$, dunque basta prendere una base $\{v_1\}$ di $W_h \cap U$, completarla ad una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e scegliere $V =< v_2, v_3, v_4 >$. ■

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

SOLUZIONE:

Facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$(AI_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_2 \to R_2 - aR_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & -ab & -a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_2 \to R_2 + R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-ab & -a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to R_3 - aR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-ab & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a+a^2b & a^2 & -a & 1-a \end{pmatrix}.$$

Se $1-a+a^2b = 0$ allora il sistema $AX = 0$ ha infinite soluzioni, dunque A non può essere invertibile.
Se $1-a+a^2b \neq 0$, posto $d = 1-a+a^2b$, facendo l'operazione $R_3 \to \frac{1}{d}R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-ab & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{d} & -\frac{a}{d} & \frac{1-a}{d} \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - (1-ab)R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{d} & \frac{1}{d} & \frac{ab}{d} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{d} & -\frac{a}{d} & \frac{1-a}{d} \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - bR_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1-a}{d} & \frac{ab}{d} & \frac{b(a-1)}{d} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{d} & \frac{1}{d} & \frac{ab}{d} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{d} & -\frac{a}{d} & \frac{1-a}{d} \end{pmatrix}$$

e infine l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & \frac{ab-1}{d} & -\frac{b}{d} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{d} & \frac{1}{d} & \frac{ab}{d} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{d} & -\frac{a}{d} & \frac{1-a}{d} \end{pmatrix}$$

Si deduce infine che
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & \frac{ab-1}{d} & -\frac{b}{d} \\ -\frac{a}{d} & \frac{1}{d} & \frac{ab}{d} \\ \frac{a^2}{d} & -\frac{a}{d} & \frac{1-a}{d} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4. Sia k un numero reale e sia $A \in M_4$ la seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) Determinare per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile;

(c) Per almeno un valore trovato in (b) trovare una matrice $M \in GL_4$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

SOLUZIONE:

(a) Il polinomio caratteristico di A è
$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -1-T & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1-T & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-T & k \\ 0 & 0 & 0 & k-T \end{vmatrix} = (k-T)[(-1-T)((1-T)(-1-T)+1)-4(-1-T)] =$$
$$= (k-T)(-1-T)[(1-T)(-1-T)-3] = (k-T)(-1-T)(T^2-4) = (T+1)(T-k)(T-2)(T+2).$$

(b) Gli autovalori di A sono

Autovalori di A e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq -1, \pm 2$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_4 = k$ (m.a. 1)
$k = -1$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 1)
$k = -2$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 2), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 1)
$k = 2$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 2)

Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di A saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1.

Vediamo i casi restanti.

Se $k = -1$, posto $T = -1$ nella matrice $A - TI_3$ si ottiene
$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, dunque $\dim V_{-1}(A) = 4 - 3 = 1$. Ne segue che, per $k = -1$, A non è diagonalizzabile.
Se $k = \pm 2$, posto $T = \pm 2$ nella matrice $A - TI_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1-(\pm 2) & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1-(\pm 2) & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-(\pm 2) & \pm 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, dunque $\dim V_{\pm 2}(A) = 4 - 3 = 1$. Ne segue che, per $k = \pm 2$, A non è diagonalizzabile.
Se ne conclude che A è diagonalizzabile se e solo se $k \neq -1 \pm 2$, dato che, in tal caso, A ha tre autovalori distinti.
(c) Scegliamo dunque $k = 0$. Per trovare la matrice M basta trovare una base diagonalizzante. Sia λ un autovalore, in modo che tutti gli autovettori di A con autovalore λ sono soluzioni del sistema $(A - \lambda I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} -x(1+\lambda) - 4y = 0 \\ -x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ -y - (1+\lambda)z = 0 \\ -\lambda w = 0 \end{cases}.$$

Si vede facilmente che il sistema ha soluzione $(0, 0, 0, 1)$ se $\lambda = 0$, $(1, 0, 1, 0)$ se $\lambda = -1$, $(4, 1, 1, 0)$ se $\lambda = -2$ e $(4, -3, 1, 0)$ se $\lambda = 2$. Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

5. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Sia p_1 il piano in $\mathbf{A}$ di equazione cartesiana $X + 2Y - Z = -1$ e sia p_2 un piano in $\mathbf{A}$ di giacitura $< e_1 - e_2, e_2 - e_3 >$.
(a) Determinare tutte le rette r tali che r è parallela a p_1 e p_2.
(b) Determinare tutti i piani p tali che p è parallelo a p_1 ed interseca p_2 in una retta s tale che $r \cap s = \emptyset$.
(c) Determinare tutte le rette t tali che t è parallela a p_2 ed incidente p_1.

SOLUZIONE:

(a) L'equazione di p_2 si trova scegliendo un qualsiasi punto $Q(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{A}$ e considerando il piano passante per Q di giacitura $< e_1 - e_2, e_2 - e_3 >$, che ha dunque equazione

$$\begin{vmatrix} X-\alpha & Y-\beta & Z-\gamma \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè $X+Y+Z=\alpha+\beta+\gamma$. Poichè α,β e γ sono arbitrari, tutti i piani p_2 avranno equazione

$$p_2 : X+Y+Z=d, \quad d\in\mathbb{R}.$$

Una retta r è parallela a p_1 e p_2 se e solo se la sua giacitura è contenuta in quella di p_1 e p_2, dunque se e solo se è contenuta nell'intersezione delle giaciture di p_1 e p_2. Ma l'intersezione delle giaciture di p_1 e p_2 è la giacitura di $p_1 \cap p_2$, dunque r è parallela a p_1 e p_2 se e solo se r è parallela a $p_1 \cap p_2$. Pertanto la giacitura di r è data dai minori 2x2 a segni alterni nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi è $< 3e_1 - 2e_2 - e_3 >$. Ne segue che tutte le rette r tali che r è parallela a p_1 e p_2 sono quelle di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} X = a+3g \\ Y = b-2g \\ Z = c-g \end{cases}, g\in\mathbb{R}, \text{per ogni } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

(b) Dato che p è parallelo a p_1, la sua equazione cartesiana sarà

$$p : X+2Y-Z=e, \quad e\in\mathbb{R}.$$

Inoltre, da quanto visto sopra, p_1 non è parallelo a p_2, quindi p non è parallelo a p_2 e pertanto $s = p\cap p_2$ è una retta che ha equazioni

$$s : \begin{cases} X+2Y-Z=e \\ X+Y+Z=d \end{cases}.$$

Affinchè $r\cap s=\emptyset$ non devono esistere $g\in\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} a+3g+2(b-2g)-c+g=e \\ a+3g+b-2g+c-g=d \end{cases}$$

ovvero deve essere

$$d\neq a+b+c \text{ oppure } e\neq a+2b-c.$$

(c) Sia $< le_1+me_2+ne_3 >$ la giacitura di t. Affinchè t sia parallela a p_2 deve essere

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$n = -l - m.$$

Affinchè t non sia parallela a p_1 deve essere

$$l + 2m - n \neq 0$$

ovvero

$$l \neq -\frac{3}{2}m.$$

Preso un qualsiasi punto $P(-1 - 2u + v, u, v) \in p_1$ si ottengono le equazioni parametriche di t:

$$t : \begin{cases} X = -1 - 2u + v + lh \\ Y = u + mh \\ Z = v - (l + m)h \end{cases}, h \in \mathbb{R}, \text{per ogni } l, m \in \mathbb{R} \text{ tali che } l \neq -\frac{3}{2}m. \blacksquare$$

6. Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare e $U \subseteq V$ un sottospazio tale che $Im(F)$ e $N(F) \oplus U$ hanno la stessa dimensione (finita).
(a) Dimostrare che esiste un sottospazio U' di V tale che $N(F) \subseteq U'$ e $V/U' \cong N(F) \oplus U$;
(b) Dimostrare che se V ha dimensione finita allora U' è unico e $\dim V + \dim U$ è pari.

SOLUZIONE:

(a) Dato che $Im(F)$ e $N(F) \oplus U$ hanno la stessa dimensione, si ha $Im(F) \cong N(F) \oplus U$. Per il teorema dell'omomorfismo abbiamo $V/N(F) \cong Im(F)$, dunque $V/N(F) \cong N(F) \oplus U$ e basta prendere $U' = N(F)$.
(b) Se V ha dimensione finita allora anche U' ha dimensione finita e si ha

$$\dim(V/U') = \dim(N(F) \oplus U) = \dim Im(F)$$

da cui

$$\dim V - \dim U' = \dim N(F) + \dim U = \dim Im(F)$$

e quindi, per il teorema rango-nullità,

$$\dim U' = \dim V - \dim Im(F) = \dim N(F)$$

e quindi $U' = N(F)$ è unico. Inoltre, sostituendo,

$$\dim V - \dim N(F) = \dim N(F) + \dim U$$

da cui

$$\dim V - \dim U = 2 \dim N(F)$$

e quindi anche

$$\dim V + \dim U = \dim V - \dim U + 2 \dim U = 2(\dim N(F) + \dim U)$$

è pari. ■