UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 13-6-2013

TESTO

A. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + kX_3 - X_4 = -1 \\ 3X_1 + X_2 - X_4 = k \\ kX_1 + X_2 + kX_3 - X_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 = 0 \\ X_1 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$W_h =< (1, -1, 1, 0), (1, 2, 0, -1), (1, -h, 3, 2) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e

$$(W_h \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Sia k un numero reale e sia $A \in M_4$ la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) Determinare per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile;

(c) Per almeno un valore trovato in (b) trovare una matrice $M \in GL_4$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

5. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Sia p_1 il piano in $\mathbf{A}$ di equazione cartesiana $X + 2Y - Z = -1$ e sia p_2 un piano in $\mathbf{A}$ di giacitura $< e_1 - e_2, e_2 - e_3 >$.

(a) Determinare tutte le rette r tali che r è parallela a p_1 e p_2.

(b) Determinare tutti i piani p tali che p è parallelo a p_1 ed interseca p_2 in una retta s tale che $r \cap s = \emptyset$.

(c) Determinare tutte le rette t tali che t è parallela a p_2 ed incidente p_1.

6. Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare e $U \subseteq V$ un sottospazio tale che $Im(F)$ e $N(F) \oplus U$ hanno la stessa dimensione (finita).

(a) Dimostrare che esiste un sottospazio U' di V tale che $N(F) \subseteq U'$ e $V/U' \cong N(F) \oplus U$;

(b) Dimostrare che se V ha dimensione finita allora U' è unico e $\dim V + \dim U$ è pari.