UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 15-7-2013

TESTO E SOLUZIONI

A. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - X_4 = k \\ 2X_1 + kX_2 - X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 - X_3 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE (COME RECUPERO DEL I ESONERO):

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & k \\ 2 & k & 0 & -1 & 0 \\ k & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & k \\ 0 & k+2 & 0 & 1 & -2k \\ 0 & 1+k & -1 & k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & k \\ 0 & k+2 & 0 & 1 & -2k \\ 0 & -1 & -1 & k-1 & 1-k^2+2k \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & k \\ 0 & -1 & -1 & k-1 & 1-k^2+2k \\ 0 & k+2 & 0 & 1 & -2k \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to R_3 + (k+2)R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & k \\ 0 & -1 & -1 & k-1 & 1-k^2+2k \\ 0 & 0 & -k-2 & k^2+k-1 & -k^3+3k+2 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq -2$ il sistema è a gradini ed ha come soluzioni

$$X_4 = t, X_3 = \frac{k^3+k^2t+kt-3k-t-2}{k+2},\ X_2 = \frac{-2k-t}{k+2},\ X_1 = \frac{k^2+kt+t}{k+2}.$$

Se $k = -2$ il sistema ha come soluzioni

$$X_4 = 4,\ X_3 = t,\ X_2 = -t-5,\ X_1 = -t-3. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE (COME SCRITTO):

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

pertanto $r(A) = 3$ e quindi anche $r(Ab) = 3$ ed il sistema è risolubile con ∞^1 soluzioni, che possiamo calcolare con la regola di Cramer.

Posto $X_2 = t$ si ha

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} k+t & 0 & -1 \\ -kt & 0 & -1 \\ 1-t & -1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -k-t-kt,\ X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+t & -1 \\ 2 & -kt & -1 \\ k & 1-t & 0 \end{vmatrix}}{1} = -k^2-kt-k^2t+t-1,$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k+t \\ 2 & 0 & -kt \\ k & -1 & 1-t \end{vmatrix}}{1} = -2k-2t-kt. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$v_1 = e_1 - e_2 + ke_3, v_2 = ke_1 + e_2, v_3 = (2-k)e_1 - 4e_2 + (2k-1)e_3 + (1-k)e_4, v_4 = e_2 + e_3.$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Calcolare la dimensione di U.
(b) Determinare un sottospazio W di V tale che

$$U + W = V.$$

(c) Siano $u \in U - \{0\}$ e $v \in V - U$. Dimostrare che se $U \neq V$ allora $\dim(U \cap < u, v >) = 1$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione di U consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 2-k & -4 & 2k-1 & 1-k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PER IL RECUPERO DEL I ESONERO facciamo operazioni elementari su A.
Con l'operazione $R_3 \to R_3 + R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2k-1 & 1-k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2k-1 & 1-k \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1-k \\ 0 & 1+k & -k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 + R_2, R_4 \to R_4 - (1+k)R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & -k^2-1-k & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2-1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Dato che $-k^2-1-k \neq 0$ per ogni k, deduciamo che $\dim U = \begin{cases} 3 & \text{se } k=1 \\ 4 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$. Inoltre, seguendo le operazioni, notiamo che l'ultima riga proviene dalle coordinate di v_3, dunque una base di U è data da $\{v_1, v_2, v_4\}$ se $k=1$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se $k \neq 1$.
PER LO SCRITTO notiamo che $\det(A) = k^3 - 1 \neq 0$ se e solo se $k \neq 1$. Del resto se $k=1$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

pertanto $r(A) = 3$. Ne segue che $\dim U = \begin{cases} 3 & \text{se } k=1 \\ 4 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$. Inoltre una base di U è data da $\{v_1, v_2, v_4\}$ se $k=1$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se $k \neq 1$.
(b) Se $k \neq 1$ prendiamo $W = \{0\}$. Se $k = 1$ prendiamo $W =< e_4 >$, in modo che $U + W =< v_1, v_2, v_4, e_4 >$.
PER IL RECUPERO DEL I ESONERO si ha allora, in base ai calcoli precedenti, che la matrice di $\{v_1, v_2, v_4, e_4\}$ si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque ha rango 4 e pertanto $U + W = V$.
PER LO SCRITTO analogamente osserviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

e pertanto $U + W = V$.
(c) Iniziamo con l'osservare che u e v sono linearmente indipendenti. Infatti sia $au+bv = 0$. Se $b \neq 0$ si ha $v = -\frac{a}{b}u \in U$, contraddizione. Dunque $b = 0$, quindi $au = 0$ e pertanto $a = 0$. Ora $u \in U \cap < u, v >$ quindi

$$1 \leq \dim(U \cap < u, v >) \leq \dim < u, v >= 2$$

e se fosse $\dim(U \cap < u, v >) = 2$ si avrebbe $U \cap < u, v >=< u, v >$, da cui $v \in U$, contraddizione. Ne segue che $\dim(U \cap < u, v >) = 1$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;
(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

SOLUZIONE:

(a) Iniziamo con operazioni elementari su B. Con l'operazione $R_2 \to R_2 + R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ne deduciamo che B è invertibile, quindi potremo trasformare A in B se e solo se A è invertibile.

Ora facciamo operazioni elementari su A. Con le operazioni $R_2 \to R_2 - kR_1, R_3 \to R_3 - R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -k^2 \\ 0 & 1 & -2-k \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ da la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -k^2 \\ 0 & 0 & -2-k+k^2 \end{pmatrix}.$$

Ora $-2-k+k^2 = 0$ se e solo se $k = -1, 2$, dunque si può trasformare A in B se e solo se $k \neq -1, 2$.
(b) Per $k \neq -1, 2$ proseguiamo a trasformare C in I_3. Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{-2-k+k^2} R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -k^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 + k^2 R_3, R_1 \to R_1 - kR_3$ si ottiene I_3.
Ora ci resta da invertire le operazioni fatte su B in ordine inverso. L'operazione $R_1 \to R_1 + R_2$ trasforma I_3 in

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to 2R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed infine con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si ottiene B. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ e sia $\{E_1, E_2, E_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Siano $v = -E_1 + kE_2 + kE_3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1) = E_1 + kE_2 + kE_3, F(E_3) = -E_1 - E_3, F(v) = (-1-k)E_1.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;

(b) Trovare una base per almeno un autospazio di F;

(c) Determinare quando F è (o no) diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che E_1, E_3 e v sono linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^3$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & k & k \end{vmatrix} = -k \neq 0.$$

Dato che $kE_2 = v + E_1 - kE_3$ si ha $F(E_1) = 2E_1 + v$ e pertanto nella base $e = \{E_1, E_3, v\}$ la matrice di F è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -1 & -1-k \\ 0 & -1-T & 0 \\ 1 & 0 & -T \end{vmatrix} = (T+1)(-T^2+2T-1-k)$$

e gli autovalori di F sono ottenuti risolvendo $(T+1)(-T^2+2T-1-k) = 0$, che ha per soluzioni reali -1 e, se $k < 0$, $1 \pm \sqrt{-k}$. Dunque, se $k > 0$, $\lambda_1 = -1$, mentre se $k < 0$ notiamo che $1 \pm \sqrt{-k} = -1$ se e solo se si sceglie il segno $-$ e $k = -4$. Ne segue che gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k > 0$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1)
$k = -4$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 3$ (m.a. 1)
$k < 0, k \neq -4$	$\lambda_1 = -1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1 - \sqrt{-k}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 1 + \sqrt{-k}$ (m.a. 1)

(b) Il caso opportuno da considerare è quello per $k = -4$ per $\lambda_1 = -1$.

Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore -1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) + I_3)X = 0$ dove $X =^t(x, y, z)$. Si ottiene

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = 0, z = -x$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore -1 sono tutti del tipo $xE_1 - xv$. Ne segue che una base di $V_{-1}(F)$ è $\{E_1 - v\}$ e $\dim V_{-1}(F) = 1$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k > 0$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $1 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k = -4$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	2
3	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 3$ e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k < 0, k \neq -4$

autovalore	m.g.	m.a.
-1	1	1
$1 - \sqrt{-k}$	1	1
$1 + \sqrt{-k}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < 0, k \neq -4$. ∎

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia p_k il piano di equazione $X - kY + Z = 0$ e si considerino la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} X - Y - Z = 1 \\ X + Y = 0 \end{cases}$$

e la retta r_k passante per $P(0, 1, 0)$ e con vettore di direzione $v = e_1 + e_2 - ke_3$.

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette per qualche valore di k?

(b) Si determinino i valori di k (se ne esistono) per i quali esiste un piano affine p tale che p è parallelo a p_k, r_k ed r.

(c) Si determinino i valori di k per cui esiste una retta affine s parallela a p_k ed incidente r_k. In tal caso si determini l'equazione cartesiana di s.

SOLUZIONE:

Troviamo le equazioni di r_k. Le parametriche sono

$$r_k : \begin{cases} X = t \\ Y = 1 + t \\ Z = -kt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

e cartesiane

$$r_k : \begin{cases} X - Y + 1 = 0 \\ kX + Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Dunque r ed r_k sono complanari se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -k-4 = 0 \text{ se e solo se } \; k = -4.$$

(b) Osserviamo che la giacitura di r è $< e_1 - e_2 + 2e_3 >$. Supponiamo che p esiste. Dato che p è parallelo a p_k, la sua giacitura è la stessa di p_k e dunque la sua giacitura ha equazione $X - kY + Z = 0$. Dato che p è parallelo a r_k ed r, le giaciture di r_k ed r devono soddisfare l'equazione della giacitura di p. Si ottiene

$$1 - 2k = 0 \text{ e } 3 + k = 0$$

che è chiaramente impossibile. Si conclude che un tale p non esiste per nessun valore di k.
(c) Per vedere se s esiste prendiamo un qualsiasi punto $P = P(t, 1+t, -kt)$ di r_k ed una giacitura $< le_1 + me_2 + ne_3 >$. Dato che s è parallela a p_k, si deve avere $l - km + n = 0$, dunque $n = km - l$. Ora s già interseca r_k in P, dunque sarà incidente a r_k se non sono parallele, dunque se

$$r\begin{pmatrix} l & m & km-l \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

ovvero se

$$l \neq m$$

(l'altra condizione $km \neq 0$ non è veriicata se $k = 0$). Si conclude che s esiste per ogni k ed ha equazione

$$s : \begin{cases} X = t + ul \\ Y = 1 + t + um \\ Z = -kt + u(km - l) \end{cases}, \; u \in \mathbb{R}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $l, m \in \mathbb{R}$ tali che $l \neq m$. ■

6. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione n ed m rispettivamente e con $n \leq m$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare con $\dim N(F) = k$. Determinare per quali n, m, k esiste un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che:
(a) $N(F) \cap N(G) = \{0\}$;
(b) $V/N(G) \cong W/\mathrm{Im}(F)$.

SOLUZIONE:

Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $N(F)$ e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un completamento ad una base di V.

(a) Poniamo

$$G(v_i) = \begin{cases} w_i & \text{se } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{se } k+1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Come è noto esiste un'unica applicazione lineare $G : V \to W$ che soddisfa le condizioni sopra. Si verifica facilmente allora che $N(G) =< v_{k+1}, \dots, v_n >$ e pertanto

$$N(F) \cap N(G) =< v_1, \dots, v_k > \cap < v_{k+1}, \dots, v_n >= \{0\}.$$

Quindi, nel caso a), G esiste per ogni n, m, k.

(b) Se $V/N(G) \cong W/\mathrm{Im}(F)$ allora $\dim(V/N(G)) = \dim(W/\mathrm{Im}(F))$ e quindi

$$n - \dim N(G) = m - (n - k)$$

da cui $\dim N(G) = 2n - m - k$. Pertando si deve avere $0 \leq 2n - m - k \leq n$, da cui $n \leq m + k \leq 2n$. Ora supponiamo $n \leq m + k \leq 2n$ e sia $s = 2n - m - k$. Poniamo

$$G(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq i \leq s \\ w_i & \text{se } s+1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

Come è noto esiste un'unica applicazione lineare $G : V \to W$ che soddisfa le condizioni sopra. Si verifica facilmente allora che $N(G) =< v_1, \dots, v_s >$ e pertanto $\dim N(G) = s = 2n - m - k$ e quindi $n - \dim N(G) = m - (n - k)$. Ne segue che $\dim(V/N(G)) = \dim(W/\mathrm{Im}(F))$, da cui $V/N(G) \cong W/\mathrm{Im}(F)$.

Se ne conclude che, nel caso b), G esiste se e solo se $n \leq m + k \leq 2n$. $\blacksquare$