UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 15-7-2013

TESTO

A. Per il primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - X_4 = k \\ 2X_1 + kX_2 - X_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 - X_3 = 1 \end{cases} .$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 - e_2 + ke_3, v_2 = ke_1 + e_2, v_3 = (2-k)e_1 - 4e_2 + (2k-1)e_3 + (1-k)e_4, v_4 = e_2 + e_3.$$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Calcolare la dimensione di U.

(b) Determinare un sottospazio W di V tale che

$$U + W = V.$$

(c) Siano $u \in U - \{0\}$ e $v \in V - U$. Dimostrare che se $U \neq V$ allora $\dim(U \cap < u, v >) = 1$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;
(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ e sia $\{E_1, E_2, E_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Siano $v = -E_1 + kE_2 + kE_3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_1) = E_1 + kE_2 + kE_3, F(E_3) = -E_1 - E_3, F(v) = (-1-k)E_1.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;
(b) Trovare una base per almeno un autospazio di F;
(c) Determinare quando F è (o no) diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia p_k il piano di equazione $X - kY + Z = 0$ e si considerino la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} X - Y - Z = 1 \\ X + Y = 0 \end{cases}$$

e la retta r_k passante per $P(0, 1, 0)$ e con vettore di direzione $v = e_1 + e_2 - ke_3$.
(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette per qualche valore di k?
(b) Si determinino i valori di k (se ne esistono) per i quali esiste un piano affine p tale che p è parallelo a p_k, r_k ed r.
(c) Si determinino i valori di k per cui esiste una retta affine s parallela a p_k ed incidente r_k. In tal caso si determini l'equazione cartesiana di s.

6. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione n ed m rispettivamente e con $n \leq m$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare con $\dim N(F) = k$. Determinare per quali n, m, k esiste un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che:
(a) $N(F) \cap N(G) = \{0\}$;
(b) $V/N(G) \cong W/\mathrm{Im}(F)$.