UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 16-9-2013

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + kX_2 - X_3 - X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - kX_2 + X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + kX_4 = 1. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = -2k^2 - k + 1 = 0 \text{ se e solo se } k = -1, \frac{1}{2}.$$

Se $k \neq -1, \frac{1}{2}$ si ha $r(A) = 4$ e quindi anche $r(Ab) = 4$ ed il sistema è risolubile con un'unica soluzione, che possiamo calcolare con la regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{-2k^2 - k + 1} = \frac{k-1}{2k^2+k-1}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{-2k^2 - k + 1} = -\frac{2(k-1)}{2k^2+k-1},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{-2k^2 - k + 1} = \frac{3(k-1)}{2k^2+k-1}, \quad X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2k^2 - k + 1} = \frac{2k}{2k^2+k-1}.$$

Se $k = -1, \frac{1}{2}$ consideriamo il minore di A

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k - 1 \neq 0.$$

Dunque, in tal caso, $r(A) = 3$, mentre

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 2(k-1) \neq 0$$

e quindi $r(Ab) = 4$. Ne segue che il sistema non è risolubile se $k = -1, \frac{1}{2}$.
Si conclude che il sistema è risolubile se e solo se $k \neq -1, \frac{1}{2}$. ■

2. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_1 - ke_3, v_3 = ke_1 + e_2, v_4 = e_4, v_5 = e_2 - e_3.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_3 >, W =< v_1, v_3, v_4, v_5 >$ i sottospazi generati. Calcolare $\dim U$ e $\dim W$;
(b) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \subseteq W$;
(c) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \oplus W = V$.

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione di U consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -k \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = k + 1$$

da cui $\dim U = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -1 \\ 3 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}.$

Per calcolare la dimensione di W consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det(B) = 1 - k$ mentre

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

da cui $\dim W = r(B) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 1 \\ 4 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$.

(b) Se $k \neq 1$ si ha $W = V$, dunque, ovviamente, $U \subseteq W$. Se $k = 1$ si ha $\dim U = \dim W = 3$, dunque $U \subseteq W$ se e solo se $U = W$. Ma ciò non può accadere dato che $e_4 \in W$, mentre $e_4 \notin U$ essendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Pertanto $U \subseteq W$ se e solo se $k \neq 1$.

(c) Per nessun valore di k si può avere che $U \oplus W = V$ dato che $0 \neq v_1 \in U \cap W$ e quindi $U \cap W \neq \{0\}$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} W = 1 \\ X - Z = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + kY = -1 \\ Y - Z = 2 \\ W = 1 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, S è parallelo a T_k.

(c) Determinare le equazioni di un piano p in A che sia incidente S e T_k.

SOLUZIONE:

(a) La giacitura di S è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\text{giac}(S) : \begin{cases} W = 0 \\ X - Z = 0 \end{cases}$$

ed è quindi costituita da tutti i vettori del tipo $Ze_1 + Ye_2 + Ze_3 = Z(e_1 + e_3) + Ye_2$. Pertanto $\text{giac}(S) =< e_1 + e_3, e_2 >$. Ne segue che $\dim S = 2$.

La giacitura di T_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\text{giac}(T_k) : \begin{cases} X + kY = 0 \\ Y - Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

ed è quindi costituita da tutti i vettori del tipo $-kYe_1 + Ye_2 + Ye_3 = Y(-ke_1 + e_2 + e_3)$. Pertanto $\text{giac}(T_k) =< -ke_1 + e_2 + e_3 >$. Ne segue che $\dim T_k = 1$ per ogni k.

(b) Dato che $\dim T_k \leq \dim S$, abbiamo che S è parallelo a T_k se e solo se $\text{giac}(T_k) \subseteq \text{giac}(S)$, dunque se e solo se $-ke_1 + e_2 + e_3 \in < e_1 + e_3, e_2 >$ e quindi se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se $k = -1$.

(c) Per trovare un piano p incidente ad S e T_k scegliamo un punto $P \in T_k$, un punto $Q \in S$, per esempio $P(-1, 0, -2, 1)$ e $Q(0, 1, 0, 1)$. Ora scegliamo la giacitura $< e_4, \vec{QP} >$ per p, dove $\vec{QP} = -e_1 - e_2 - 2e_3$. Sia dunque p il sottospazio affine passante per Q e di giacitura $< e_4, \vec{QP} >$ (che ha dimensione 2). Allora $Q \in p$ e $\vec{QP} \in < e_4, \vec{QP} >$, dunque anche $P \in p$. Resta da dimostrare che p non è parallelo nè ad S nè a T_k. Se p fosse parallelo ad S si avrebbe che $\text{giac}(S) = \text{giac}(p)$, dunque $e_4 \in \text{giac}(S) =< e_1 + e_3, e_2 >$, assurdo. D'altro canto abbiamo anche che $-ke_1 + e_2 + e_3 \notin < e_4, \vec{QP} >$ dato che

$$r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -k & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

quindi p non è parallelo a T_k. ■

4. Siano $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e, dato $k \in \mathbb{R}$, sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = kid_U, F(E_2) = kv_2, F(E_4) = kE_1 + (k-1)E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;

(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Dato che $F_{|U} = kid_U$, si ha, essendo $v_1, v_2 \in U$, $F(v_1) = kv_1$ e $F(v_2) = kv_2$. Osserviamo che v_1, v_2, E_2, E_4 sono linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^4$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Si vede facilmente che, in tale base $e = \{v_1, v_2, E_2, E_4\}$, si ha $F(E_4) = kv_1 + v_2 + E_2$ e quindi la matrice di F è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & k \\ 0 & k & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 0 & k \\ 0 & k-T & k & 1 \\ 0 & 0 & -T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T^2(T-k)^2$$

e gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 4)
$k \neq 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = k$ (m.a. 2)

(b) Posto $T = 0$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$r(M_e(F) - 0I_4) = r(M_e(F)) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases},$$

da cui $\dim V_0(F) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$.

Per $k \neq 0$, prendiamo $\lambda_2 = k$ come autovalore da considerare nel punto (b), e calcoliamo la base di $V_k(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore k sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - kI_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} kw = 0 \\ kz + w = 0 \\ -kz + w = 0 \\ -kw = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $z = w = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore k sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$. Ne segue che una base di $V_1(F)$ è $\{v_1, v_2\}$ se $k \neq 0$ e $\dim V_1(F) = 2$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k \neq 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	2
k	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $3 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	3	4

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $3 < 4$ e quindi F è non diagonalizzabile.

Se ne conclude che F non è diagonalizzabile per ogni k. $\blacksquare$