UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 16-9-2013

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + kX_2 - X_3 - X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - kX_2 + X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + kX_4 = 1. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_1 - ke_3, v_3 = ke_1 + e_2, v_4 = e_4, v_5 = e_2 - e_3.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_3 >, W =< v_1, v_3, v_4, v_5 >$ i sottospazi generati. Calcolare $\dim U$ e $\dim W$;

(b) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \subseteq W$;

(c) determinare tutti i valori di k (se esistono) tali che $U \oplus W = V$.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} W = 1 \\ X - Z = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + kY = -1 \\ Y - Z = 2 \\ W = 1 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, S è parallelo a T_k.

(c) Determinare le equazioni di un piano p in A che sia incidente S e T_k.

4. Siano $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (0,-1,-1,0) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e, dato $k \in \mathbb{R}$, sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = kid_U, F(E_2) = kv_2, F(E_4) = kE_1 + (k-1)E_3,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;
(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;
(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.