UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 30-1-2014

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + kX_2 - X_3 = 1 \\ X_1 - kX_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - kX_2 + kX_4 = 1 \\ kX_2 + X_3 + kX_4 = 2. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 0 \\ 1 & -k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & k \\ 0 & k & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = k^2(1-k) = 0 \text{ se e solo se } k = 0, 1.$$

Se $k \neq 0, 1$ si ha $r(A) = 4$ e quindi anche $r(Ab) = 4$ ed il sistema è risolubile con un'unica soluzione, che possiamo calcolare con la regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & -k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & k \\ 2 & k & 1 & k \end{vmatrix}}{k^2(1-k)} = \frac{1}{1-k}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 & k \end{vmatrix}}{k^2(1-k)} = \frac{1}{k},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{vmatrix}}{k^2(1-k)} = \frac{k}{1-k}, \quad X_4 = \frac{\begin{vmatrix} k & k & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 2 \end{vmatrix}}{k^2(1-k)} = \frac{1-2k}{k(1-k)}.$$

Se $k=0$ si ha

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

e si vede facimente che $r(A)=2$. D'altro canto il minore di (Ab)

$$\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

pertanto $r(Ab)\geq 3$ ed il sistema non è risolubile se $k=0$.
Se $k=1$ consideriamo il minore di (Ab)

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&0\\1&-1&0&1\\0&1&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

e quindi $r(Ab)=4$. Del resto sappiamo che $r(A)\leq 3$, quindi il sistema non è risolubile se $k=1$.
Si conclude che il sistema è risolubile se e solo se $k\neq 0,1$. ■

2. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases}2X_1-X_3=0\\X_1+X_2-X_4=0\end{cases}$$

e sia

$$W_h=<(2,-1,1,1),(1,-1,0,-h),(1,-h,-1,-1-3h)>.$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.
(b) Determinare le dimensioni di W_h+U e di $W_h\cap U$;
(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V\neq\{0\}, V\neq\mathbb{R}^4$ e

$$(W_h\cap U)\oplus V=\mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione ed una base di di U osserviamo che i suoi vettori soddisfano $X_3=2X_1$ e $X_4=X_1+X_2$ e dunque sono tutti del tipo

$$(X_1,X_2,2X_1,X_1+X_2)=X_1(1,0,2,1)+X_2(0,1,0,1).$$

Dunque $\{(1,0,2,1),(0,1,0,1)\}$ è una base di U e $\dim U = 2$.

Per calcolare la dimensione di W calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -h \\ 1 & -h & -1 & -1-3h \end{pmatrix}$$

usando il principio dei minori orlati intorno al minore $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -h & -1 \end{vmatrix} = 2-h = 0 \text{ se e solo se } \ h = 2$$

mentre

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -h \\ 1 & -h & -1-3h \end{vmatrix} = -2h^2+3h+2 = 0 \text{ se e solo se } \ h = 2, -\frac{1}{2}.$$

Se ne deduce che $\dim W = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 2 \\ 3 & \text{se } h \neq 2 \end{cases}$ e basi di W sono $\{(2,-1,1,1),(1,-1,0,-2)\}$ se $h = 2$ e $\{(2,-1,1,1),(1,-1,0,-h),(1,-h,-1,-1-3h)\}$ se $h \neq 2$.

(b) Calcoliamo il rango di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -h \\ 1 & -h & -1 & -1-3h \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -h \end{vmatrix} = 3h = 0 \text{ se e solo se } \ h = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -h & -1 & -1-3h \end{vmatrix} = 6(h+1) = 0 \text{ se e solo se } \ h = -1.$$

Dunque $\dim(W_h + U) = r(B) = 4$ per ogni h e, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_h \cap U) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 2 \\ 1 & \text{se } h \neq 2 \end{cases}.$$

(c) Se $h = 2$ non esiste $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e $(W_2 \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4$, poichè si avrebbe che $V = \mathbb{R}^4$.

Se $h \neq 2$ si ha $\dim(W_h \cap U) = 1$ quindi basta scegliere una base $\{v_1\}$ di $W_h \cap U$, completarla ad una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e prendere $V =< v_2, v_3, v_4 >$.
Si conclude che V esiste se e solo se $h \neq 2$. $\blacksquare$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X + W = 1 \\ X + Z = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} kX + kY = -1 \\ Y - Z = 2k \\ W = -1 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.
(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, S è parallelo a T_k.
(c) Determinare, se esistono, tutte le possibili equazioni di una retta r in A che sia parallela a S e T_k.

SOLUZIONE:

(a) Consideriamo le matrici del sistema che definisce S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $r(B) = r(C) = 2$, da cui, per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $S \neq \emptyset$ ed è quindi un sottospazio. Inoltre

$$\dim S = \dim A - r(B) = 4 - 2 = 2.$$

Consideriamo invece le matrici del sistema che definisce T_k:

$$B_k = \begin{pmatrix} k & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C_k = \begin{pmatrix} k & k & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $r(B_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$, mentre $r(C_k) = 3$ per ogni k. Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ se e solo se $k \neq 0$. Dunque T_k è un sottospazio per $k \neq 0$ e, in tal caso,

$$\dim T_k = \dim A - r(B_k) = 4 - 3 = 1.$$

Da ora in poi considereremo solo il caso $k \neq 0$.
(b) La giacitura di S è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\text{giac}(S) : \begin{cases} X + W = 0 \\ X + Z = 0 \end{cases}$$

cioè $W = Z = -X$, ed è quindi costituita da tutti i vettori del tipo

$$Xe_1 + Ye_2 - Xe_3 - Xe_4 = X(e_1 - e_3 - e_4) + Ye_2.$$

Pertanto giac$(S) =< e_1 - e_3 - e_4, e_2 >$.
La giacitura di T_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\text{giac}(T_k) : \begin{cases} k(X+Y) = 0 \\ Y - Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}.$$

Si ottiene $X = -Y, Z = Y, W = 0$ ed è quindi costituita da tutti i vettori del tipo

$$-Ye_1 + Ye_2 + Ye_3 = Y(-e_1 + e_2 + e_3).$$

Pertanto giac$(T_k) =< -e_1 + e_2 + e_3 >$.

Dato che, per ogni k, si ha $\dim T_k \leq \dim S$, abbiamo che S è parallelo a T_k se e solo se giac$(T_k) \subseteq$ giac(S).
Osserviamo che $-e_1 + e_2 + e_3 \notin < e_1 - e_3 - e_4, e_2 >$ dato che

$$r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Quindi S non è parallelo a T_k.
Si conclude che per nessun valore di k si ha che S è parallelo a T_k.
(c) Una retta r che sia parallela a S e T_k esiste se e solo se c'è un vettore non nullo v tale che $v \in$ giac$(T_k) \cap$ giac(S), ovvero se e solo se

$$\dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S)) \geq 1.$$

Sappiamo che $-e_1 + e_2 + e_3 \notin < e_1 - e_3 - e_4, e_2 >$, dunque

$$\dim(\text{giac}(T_k) + \text{giac}(S)) = 3$$

e la formula di Grassmann da

$$\dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S)) = 0,$$

pertanto r non esiste.
Si conclude che per nessun valore di k esiste una retta r in A che sia parallela a S e T_k. ∎

4. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (2,-1,1,0), v_2 = (1,-1,-1,1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 \in N(F), v_2 \in N(F), F(E_2) = E_1 + kE_3, F(E_3) = E_1 - v_1,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, per un opportuno autovalore λ di F, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che v_1, v_2, E_2, E_3 sono linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^4$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Si vede facilmente che, in tale base $e = \{v_1, v_2, E_2, E_3\}$, si ha

$$F(E_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}E_2 + (k - \frac{1}{2})E_3, \quad F(E_3) = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}E_2 + -\frac{1}{2}E_3$$

e quindi la matrice di F è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & k - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - T & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & k - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - T \end{vmatrix} = T^2(T^2 - \frac{k}{2})$$

e gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 4)
$k > 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \sqrt{\frac{k}{2}}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -\sqrt{\frac{k}{2}}$ (m.a. 1)

(b) Consideriamo l'autovalore $\lambda_1 = 0$ e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w = 0 \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w = 0 \\ (k - \frac{1}{2})z - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $z = w = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{v_1, v_2\}$ e $\dim V_0(F) = 2$ per ogni k.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k < 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	4

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k > 0$

autovalore	m.g.	m.a.
0	2	2
$\sqrt{\frac{k}{2}}$	1	1
$\sqrt{\frac{k}{2}}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k > 0$. ■