UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prova scritta del 30-1-2014

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + kX_2 - X_3 = 1 \\ X_1 - kX_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - kX_2 + kX_4 = 1 \\ kX_2 + X_3 + kX_4 = 2. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2X_1 - X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$W_h = < (2, -1, 1, 1), (1, -1, 0, -h), (1, -h, -1, -1 - 3h) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_h e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e

$$(W_h \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X + W = 1 \\ X + Z = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} kX + kY = -1 \\ Y - Z = 2k \\ W = -1 \end{cases}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, S è parallelo a T_k.

(c) Determinare, se esistono, tutte le possibili equazioni di una retta r in A che sia parallela a S e T_k.

4. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (2, -1, 1, 0), v_2 = (1, -1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 \in N(F), v_2 \in N(F), F(E_2) = E_1 + kE_3, F(E_3) = E_1 - v_1,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, per un opportuno autovalore λ di F, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.