UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $h, k \in \mathbb{R}$ considerare i sistemi lineari

$$(*)_A : \begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 1 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ kX_1 - X_2 + X_4 = k \end{cases} \quad \text{e } (*)_B : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ -3X_2 + (2k-3)X_3 + 6X_4 = 4k - 2 \\ (k+2)X_2 - kX_3 + hX_4 = -2k \end{cases}.$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare per quali valori di h i sistemi sono (o no) equivalenti e, in tal caso, si calcolarne esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata di $(*)_A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1 & -1 & 1 \\ k & -1 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{k}{2}R_1$ danno

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -k - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 1 \\ 0 & -1 - \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & 1 & k \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_2 \to -2R_2, R_3 \to -2R_3$ danno

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & k+2 & -k & -2 & -2k \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_2 \to R_2 - 2R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3+2k & 6 & -2+4k \\ 0 & k+2 & -k & -2 & -2k \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 + \frac{k+2}{3}R_2$ si ha la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3+2k & 6 & -2+4k \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}(k^2-k-3) & 2k+2 & \frac{4}{3}(k^2-1) \end{pmatrix}.$$

Ora consideriamo la matrice orlata di $(*)_B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3+2k & 6 & -2+4k \\ 0 & k+2 & -k & h & -2k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 + \frac{k+2}{3}R_2$ si ha la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3+2k & 6 & -2+4k \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}(k^2-k-3) & h+2k+4 & \frac{4}{3}(k^2-1) \end{pmatrix}.$$

Dato che $C = D$ se $h = -2$ deduciamo intanto che

$$(*)_A \text{ e } (*)_B \text{ sono equivalenti se } h = -2.$$

Ora verifichiamo se possno essere equivalenti per altri h.
Supponiamo $k^2 - k - 3 \neq 0$, ovvero se $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.
Il sistema $(*)_A$, che è equivalente a quello associato a C, ha come soluzioni

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{2k^2 - 3kt - 3t - 2}{k^2 - k - 3},\ X_2 = \frac{-kt + 2k - 3t}{k^2 - k - 3},\ X_1 = \frac{k^2 - kt - k - 1}{k^2 - k - 3}$$

mentre il sistema associato a D ha come soluzioni (calcoliamo solo le prime due, le altre non ci servono)

$$X_4 = t,\ X_3 = \frac{4k^2 - 4 - 3t(h + 2k + 4)}{2(k^2 - k - 3)}.$$

Se $(*)_A$ e $(*)_B$ sono equivalenti, si ha che hanno la stessa soluzione X_3, dunque

$$\frac{2k^2 - 3kt - 3t - 2}{k^2 - k - 3} = \frac{4k^2 - 4 - 3t(h + 2k + 4)}{2(k^2 - k - 3)}$$

che si semplifica in

$$t(3h+6)=0.$$

Dato che questo deve valere per ogni t si ottiene che $h=-2$.
Dunque se $k\neq \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, abbiamo che $(*)_A$ e $(*)_B$ sono equivalenti se e solo se $h=-2$.
Supponiamo ora $k=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.
Il sistema $(*)_A$, che è equivalente a quello associato a C, ha come soluzioni

$$X_4=\frac{2}{3}(k-1),\ X_3=t,\ X_2=\frac{1}{3}((2k-3)t-2),\ X_1=-\frac{1}{6}((2k-6)t-2).$$

mentre il sistema associato a D ha come soluzioni (calcoliamo solo la prima, le altre non ci servono)

$$X_4=\frac{4(k^2-1)}{3(h+2k+4)}.$$

Se $(*)_A$ e $(*)_B$ sono equivalenti, si ha che hanno la stessa soluzione X_4, dunque

$$\frac{2}{3}(k-1)=\frac{4(k^2-1)}{3(h+2k+4)}$$

dato cui si ottiene ancora $h=-2$.
Si conclude allora che $(*)_A$ e $(*)_B$ sono equivalenti se e solo se $h=-2$. ∎

2. Sia $a\in\mathbb{R}$ e sia

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&a\\1&1&0&-1\\0&0&1&0\\a&2&0&1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di a per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.
(b) Determinare i valori di a per i quali è possibile (o no) trasformare ${}^tA$ in I_4 con sole operazioni elementari.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&a\\1&1&0&-1\\0&0&1&0\\a&2&0&1\end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - aR_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_4 con R_2 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ da

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Se $a = 0$ il sistema $AX = 0$ ha infinite soluzioni, dunque A non può essere invertibile, quindi A non è prodotto di matrici elementari.

Supponiamo ora $a \neq 0$ e facciamo le operazioni $R_2 \to R_2 - R_4, R_4 \to \frac{1}{a}R_4$ alla matrice B, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 + R_4$ e $R_2 \to R_2 - R_4$ si trova

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $a = 2$ il sistema $AX = 0$ ha infinite soluzioni, dunque A non può essere invertibile, quindi A non è prodotto di matrici elementari.

Supponiamo ora $a \neq 0, 2$ e facciamo l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2-a} R_2$ alla matrice C, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, abbiamo allora dimostrato che A è prodotto di matrici elementari se e solo se $a \neq 0, 2$. Inoltre risalendo alle operazioni fatte, sempre nel caso $a \neq 0, 2$, si deduce che

$$R_{12}(-1)R_2(\frac{1}{2-a})R_{24}(-1)R_{14}(1)R_4(\frac{1}{a})R_{24}(-1)R_{43}(-1)R_{42}R_{42}(-a)R_{12}A = I_4$$

da cui

$$A = R_{12}^{-1}R_{42}(-a)^{-1}R_{42}^{-1}R_{43}(-1)^{-1}R_{24}(-1)^{-1}R_4(\frac{1}{a})^{-1}R_{14}(1)^{-1}R_{24}(-1)^{-1}R_2(\frac{1}{2-a})^{-1}R_{12}(-1)^{-1}$$

e quindi

$$A = R_{12}R_{42}(a)R_{42}R_{43}(1)R_{24}(1)R_4(a)R_{14}(-1)R_{24}(1)R_2(2-a)R_{12}(1).$$

(b) Si può trasformare ${}^tA$ in I_4 con sole operazioni elementari se e solo se esistono delle matrici elementari $A_1, \dots, A_s$ tali che $A_1 \cdots A_s\, {}^tA = I_4$, quindi se e solo se $A^tA_s \cdots {}^tA_1 = I_4$, dunque se e solo se A è invertibile, se e solo se A è prodotto di matrici elementari, quindi se e solo se $a \neq 0, 2$. ■

3. Sia $h \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, h, 0), v_3 = (h, 0, 1), v_4 = (1, h, h),$$

$$U =< v_1, v_2 > \text{ e } W = U\cap < v_3, v_4 > .$$

(a) Calcolare la dimensione di U e di W, usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;

(b) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$, usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;
(c) Determinare se esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che

$$U \oplus W = V.$$

SOLUZIONE:

(a) Una coppia di numeri reali (a_1, a_2) è tale che $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ se e solo se (a_1, a_2) è soluzione del sistema $AX = 0$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per calcolare la dimensione di U, facciamo operazioni elementari su A (ovvero su v_1, v_2).
Scambiando R_1 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - hR_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema $AX = 0$ ha come unica soluzione $(0, 0)$. Pertanto $\dim U = 2$.
Per calcolare la dimensione di W vediamo prima quella di $< v_3, v_4 >$ e di $U+ < v_3, v_4 >$.
Una coppia di numeri reali (a, b) è tale che $av_3 + bv_4 = 0$ se e solo se (a, b) è soluzione del sistema $BX = 0$ dove

$$B = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 0 & h \\ 1 & h \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & h \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - hR_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & h \\ 0 & 1-h^2 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema $BX = 0$ ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$. Pertanto $\dim < v_3, v_4 >= 2$.
Una quaterna di numeri reali (a_1, a_2, a_3, a_4) è tale che $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$ se e solo se (a_1, a_2, a_3, a_4) è soluzione del sistema $CX = 0$ dove

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h & 1 \\ 0 & h & 0 & h \\ 1 & 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h & 1 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & -1 & 1-h & h-1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h & 1 \\ 0 & -1 & 1-h & h-1 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 + hR_2$ si trova

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h & 1 \\ 0 & -1 & 1-h & h-1 \\ 0 & 0 & h(1-h) & h^2 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che il sistema $DX = 0$ ha ∞^1 soluzioni se $h \neq 0$ e ∞^2 soluzioni se $h = 0$.
Pertanto $\dim(U+ < v_3, v_4 >) = \begin{cases} 2 & \text{if } h = 0 \\ 3 & \text{if } h \neq 0 \end{cases}$ e quindi, per la formula di Grassmann,

$$\dim W = \dim U + \dim < v_3, v_4 > - \dim(U+ < v_3, v_4 >) = \begin{cases} 2 & \text{if } h = 0 \\ 1 & \text{if } h \neq 0 \end{cases}.$$

(b) Osserviamo che $W \subseteq U$, quindi $\dim(U \cap W) = \dim W = \begin{cases} 2 & \text{if } h = 0 \\ 1 & \text{if } h \neq 0 \end{cases}$. Inoltre $U + W = U$, quindi $\dim(U + W) = \dim U = 2$.

(c) Dato che $U \cap W = W \neq \{0\}$ per ogni h, si conclude che non può mai essere $U \oplus W = V$.

■