UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Prima prova di esonero

1. Per $h, k \in \mathbb{R}$ considerare i sistemi lineari

$$(*)_A : \begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 1 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ kX_1 - X_2 + X_4 = k \end{cases} \quad \text{e } (*)_B : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ -3X_2 + (2k-3)X_3 + 6X_4 = 4k - 2 \\ (k+2)X_2 - kX_3 + hX_4 = -2k \end{cases}.$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare per quali valori di h i sistemi sono (o no) equivalenti e, in tal caso, si calcolarne esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di a per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.

(b) Determinare i valori di a per i quali è possibile (o no) trasformare ${}^tA$ in I_4 con sole operazioni elementari.

3. Sia $h \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano

$$v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,h,0), v_3 = (h,0,1), v_4 = (1,h,h),$$

$$U =< v_1, v_2 > \text{e } W = U\cap < v_3, v_4 > .$$

(a) Calcolare la dimensione di U e di W, usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;

(b) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$, usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;

(c) Determinare se esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che

$$U \oplus W = V.$$