UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Seconda prova di esonero

1. Siano $v_1 = (1, -1, 0, 0), v_2 = (0, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(E_3) \in < E_3 >, F(E_2) = E_1 - 2E_4,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Scelto un opportuno parametro $k \in \mathbb{R}$:
(a) determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;
(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;
(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Dato che $F_{|U} = id_U$, si ha, essendo $v_1, v_2 \in U$, $F(v_1) = v_1$ e $F(v_2) = v_2$. Ora $F(E_3) \in < E_3 >$, quindi esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(E_3) = kE_3$. Inoltre $F(E_2) = E_1 - 2E_4 = v_1 - v_2$.

Osserviamo che v_1, v_2, E_3, E_2 sono linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^4$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

In tale base $e = \{v_1, v_2, E_3, E_2\}$ la matrice di F è pertanto

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T(T-1)^2(T-k)$$

e gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq 0,1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_3 = k$ (m.a. 1)
$k = 0$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 2)
$k = 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 0$ (m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = 0$, posto $T = 0$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene $r(M_e(F) - 0I_4) = r(M_e(F)) = 2$, da cui $\dim V_0(F) = 4 - 2 = 2$.
Per ogni k, prendiamo λ_1 come autovalore da considerare nel punto (b), e calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} w = 0 \\ (k-1)z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $w = 0$ se $k = 1$ e $z = w = 0$ se $k \neq 1$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2 + zE_3$ se $k = 1$ e $xv_1 + yv_2$ se $k \neq 1$. Ne segue che una base di $V_1(F)$ è $\{v_1, v_2, E_3\}$ se $k = 1$ e $\{v_1, v_2\}$ se $k \neq 1$.
(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k \neq 0, 1$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
0	1	1
k	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

2) $k = 0$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
0	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

3) $k = 1$

autovalore	m.g.	m.a.
1	3	3
0	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile per ogni k. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + W = 1 \\ Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X = -1 + 5v \\ Y = ku + 2v \\ Z = 2 + ku + 3v \\ W = -3v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k. Per tali valori di k scrivere le equazioni di tutti i possibili p.

(c) Determinare le equazioni di una retta in A che sia incidente S e T_k.

SOLUZIONE:

(a) La matrice del sistema che definisce S è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, da cui, per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $S \neq \emptyset$ ed è quindi un sottospazio. Inoltre la giacitura di S è data dal sistema omogeneo $Bx = 0$, dove $x = {}^t(X, Y, Z, W)$, per cui

$$\dim S = \dim A - r(B) = 4 - 2 = 2.$$

Consideriamo invece T_k. Un suo punto $P(X, Y, Z, W)$ è tale che

$$\vec{OP} = (-1 + 5v)e_1 + (ku + 2v)e_2 + (2 + ku + 3v)e_3 - 3ve_4 =$$

$$= -e_1 + 2e_3 + uk(e_2 + e_3) + v(5e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 3e_4).$$

Pertanto T_k è il sottospazio passante per il punto $Q(-1,0,2,0)$ e di giacitura generata da $5e_1+2e_2+3e_3-3e_4$ se $k=0$ e da $5e_1+2e_2+3e_3-3e_4$ e e_2+e_3 se $k \neq 0$, per cui

$$\dim T_k = \begin{cases} 2 & \text{if } k \neq 0 \\ 1 & \text{if } k = 0 \end{cases}.$$

(b) Supponiamo prima che esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k. Dato che S è un piano, si ha $giac(S) = giac(p)$. Analogamente, se $k \neq 0$, $giac(p) = giac(T_k)$, quindi $giac(S) = giac(T_k)$. Ma questo non può accadere dato che e_2+e_3 appartiene alla giacitura di T_k, ma non a quella di S, perchè non soddisfa il sistema omogeneo $\begin{cases} X-Y+W=0 \\ Z+W=0 \end{cases}$. Quindi se esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k, deve essere $k=0$.
Del resto, se $k=0$, effettivamente la giacitura di T_0 è data da vettori $a(5e_1+2e_2+3e_3-3e_4)$ che soddisfano il sistema omogeneo $\begin{cases} X-Y+W=0 \\ Z+W=0 \end{cases}$, quindi $giac(T_0) \subset giac(S)$, cioè T_0 è parallelo ad S. Dunque basta prendere $p=S$.
In conclusione esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k se e solo se $k=0$.
Infine, per $k=0$, tutti i possibili p sono tutti i piani paralleli ad S, che hanno dunque equazione $\begin{cases} X-Y+W=b \\ Z+W=c \end{cases}$, per due numeri reali qualsiasi b e c.
(c) Prendiamo i punti $Q(1,0,0,0) \in S$ e $Q'(-1,0,2,0) \in T_k$ e consideriamo la retta r che li congiunge

$$r : \begin{cases} X = 1-t \\ Y = 0 \\ Z = t \\ W = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dato che r interseca sia S che T_k sarà sufficiente verificare che S non è parallela a nessuno dei due sottospazi. La giacitura di r è generata da $\vec{QQ'} = 2(-e_1+e_3)$ che non appartiene alla giacitura di S, perchè non soddisfa il sistema omogeneo $\begin{cases} X-Y+W=0 \\ Z+W=0 \end{cases}$ e neanche a quella di T_k dato che, se $k=0$, $\vec{QQ'}$ non è parallelo a $5e_1+2e_2+3e_3-3e_4$ e, se $k \neq 0$, $\vec{QQ'} \notin < 5e_1+2e_2+3e_3-3e_4, e_2+e_3 >$, essendo la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di rango 3. ■

3. Sia $n \in \mathbb{N}$, siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n e sia U un sottospazio di V di dimensione $n-1$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare.
(a) Dimostrare che se $N(F) \cap U = \{0\}$ allora o F è iniettiva o $\dim N(F) = 1$.

(b) Dimostrare che entrambi i casi in (a) sono possibili.

SOLUZIONE:

(a) È sufficiente mostrare che $\dim N(F) \leq 1$, perchè allora o $\dim N(F) = 1$ oppure $\dim N(F) = 0$, nel qual caso $N(F) = \{0\}$ e quindi F è iniettiva.

Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim N(F) = \dim(N(F) + U) + \dim(N(F) \cap U) - \dim U$$

ma $\dim(N(F) \cap U) = 0$, mentre, essendo $N(F) + U \subseteq V$, si ha $\dim(N(F) + U) \leq \dim V = n$. Pertanto, sostituendo nella formula di Grassmann, si trova

$$\dim N(F) \leq n + 0 - (n - 1) = 1.$$

(b) Sia $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ una base di U e completiamola a $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v_n\}$ base di V. Sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di W. Sia F definita da

$$F(u_i) = w_i, 1 \leq i \leq n - 1, F(v_n) = w_n.$$

Allora F ha rango n, dunque è iniettiva per il teorema di rango-nullità.

Sia invece F definita da

$$F(u_i) = w_i, 1 \leq i \leq n - 1, F(v_n) = 0.$$

Allora F ha rango $n - 1$, dunque $\dim N(F) = 1$ per il teorema di rango-nullità e $N(F) =< v_n >$, quindi chiaramente $N(F) \cap U =< v_n > \cap < u_1, \ldots, u_{n-1} >= \{0\}$. ■