UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2012-2013

Seconda prova di esonero

1. Siano $v_1 = (1, -1, 0, 0), v_2 = (0, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(E_3) \in < E_3 >, F(E_2) = E_1 - 2E_4,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Scelto un opportuno parametro $k \in \mathbb{R}$:

(a) determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;

(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + W = 1 \\ Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X = -1 + 5v \\ Y = ku + 2v \\ Z = 2 + ku + 3v \\ W = -3v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k. Per tali valori di k scrivere le equazioni di tutti i possibili p.

(c) Determinare le equazioni di una retta in A che sia incidente S e T_k.

3. Sia $n \in \mathbb{N}$, siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n e sia U un sottospazio di V di dimensione $n - 1$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Dimostrare che se $N(F) \cap U = \{0\}$ allora o F è iniettiva o $\dim N(F) = 1$.

(b) Dimostrare che entrambi i casi in (a) sono possibili.