Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 10
24 Maggio 2013

1. Siano A e B due matrici simili; si dimostri che:
   (a) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;
   (b) $tr(A) = tr(B)$;
   (c) A^n e B^n sono simili.

SOLUZIONE:
(a) A e B simili $\rightarrow A = MBM_{-1}$ dove $M \in GL_n(K)$.
$P_A(\lambda) = Det(A-\lambda\mathbb{I}) = Det(MBM^{-1}-\lambda\mathbb{I}) = Det(MBM^{-1}-M\lambda\mathbb{I}M^{-1}) = Det(M(B-\lambda\mathbb{I})M^{-1}) = Det(M)Det(B-\lambda\mathbb{I})(Det(M))^{-1} = Det(B-\lambda\mathbb{I}) = P_B(\lambda)$.
(b) Usando il punto precedente, l'ipotesi diventa $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. Supponiamo dapprima $n = 2$ e scriviamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$Det(A - \lambda\mathbb{I}) = Det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + Det(A) = \lambda^2 - tr(B)\lambda + Det(B) \rightarrow tr(A) = tr(B)$. In generale $A = (a_{i,j}) \rightarrow Det(A\lambda\mathbb{I}) = (-\lambda)^n \pm tr(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda)$ dove $deg(q) \leq n-2$ e le conclusioni sono le stesse.
(c) Lavoriamo per induzione su n.
Sappiamo che $\exists P \in GL_n(K) : P^{-1}AP = B$.Dobbiamo provare che $\exists Q \in GL_n(K) : Q^{-1}A^2Q = B^2$.
$B^2 = (P-1AP)^2 = P^{-1}APP-1AP = P^{-1}A^2P$. Ora, sia A^{n-1} simile a B^{n-1} e si abbia per ogni $n \geq 2$ la seguente ipotesi:
$\exists P \in GL_n(K) : P^{-1}A^{n-1}P = B^{n-1}$. Allora $B^n = B^{n-1}B = P^{-1}A^{n-1}PP-1AP = P-1A^nP$. Rimane da provare che se $B = P^{-1}AP \rightarrow B^n = P^{-1}A_nP$(cioé la matrice P é sempre la stessa). Lavoriamo di nuovo per induzione. Per $n = 2$ l'abbiamo giá mostrato.Supponiamo che per $n \geq 3$ sia vero che $B^{n-1} = P^{-1}A^{n-1}P$.Allora:
$B^n = (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP)$.

2. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

SOLUZIONE:

- Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico; questo si ottiene ponendo uguale a 0 il determinante della matrice $A - \lambda\mathbb{I}$, in questo caso:
$P_\lambda(A) = Det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 2) = 0 \rightarrow$
$\lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$.
Gli autospazi relativi ai vari autovalori λ_i V_{lambda_i},corrispondono al nucleo dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A - \lambda_i\mathbb{I}$,quindi gli elementi dell'i-esimo autospazio sono tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda_i\mathbb{I})\underline{x} = \underline{0}$, dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Gli autospazi sono generati proprio dagli autovettori della matrice. In questo caso:
$V_{\lambda_1} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \ tc \ t \in \mathbb{R}\} \rightarrow$
$: (1, 0, 1)$ é un autovettore relativo all'autovalore 2.
Allo stesso modo si trova che:$V_{\lambda_2} =< (1, -\sqrt{2}, 1) >$ e $V_{\lambda_3} =< (1, \sqrt{2}, 1) >$.
Affinché la matrice sia diagonale deve accadere che per ogni autovalore la molteplicitá algebrica (ossia il numero di volte che l'autovalore compare come radice del polinomio caratteristico) sia uguale alla molteplicitá geometrica(ossia la dimensione dell'autospazio relativo). In generale la prima é sempre maggiore o uguale della seconda. Se trovo tutti autovalori distinti, come in questo caso, la matrice é diagonalizzabile, in quanto se λ é un autovettore il suo autospazio associato deve avere dimensione maggiore o uguale a 1 e la molteplicitá algebrica é uguale a 1. Per quanto detto prima segue subito la diagonalizzabilitá della matrice.

- B $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}, \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}$.
$V_{\lambda_1} =< (2, 3, 1) >, V_{\lambda_2} =< (4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1) >, V_{\lambda_3} =< (4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1) >$. Diagonalizzabile.

- C $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$.
$V_{\lambda_1} =< (-1, 0, 2) >, V_{\lambda_2} =< (0, 1, 0) >, V_{\lambda_3} =< (2, 0, 1) >$. Diagonalizzabile.

- D $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ (con molteplicitá algebrica 2,$\lambda_3 = 3$.
$V_{\lambda_1} =< (1, 1, 1, 1) >, V_{\lambda_2} =< (0, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0) >, V_{\lambda_3} =< (1, -2, 1, 0) >$.
Diagonalizzabile.

- E $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$(con molteplicitá 2,$\lambda_3 = 2$.
$V_{\lambda_1} =< (0, 1, 1, 0) >, V_{\lambda_2} =< (0, 0, 0, 1)(1, 0, 0, 0) >, V_{\lambda_3} =< (0, -1, 1, 0) >$.
Diagonalizzabile.

3. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}:$$
(a) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$.
(b) Posto $a = 0$, esistono 3 autovettori di A linearmente indipendenti?

SOLUZIONE:
(a) In generale λ é un autovalore per l'applicazione f rappresentata dalla matrice $A \Leftrightarrow Det(A - \lambda\mathbb{I} = 0)$. Infatti affinché λ sia un autovalore é necessario che il suo autospazio associato non sia banale, ossia che non consista del solo vettore nullo. Quindi anche il nucleo di $A - \lambda\mathbb{I}$ deve essere non banale, ossia l'applicazione a esso associata non deve essere iniettiva, e quindi neanche un isomorfismo. Poiché g é un isomorfismo se e solo se la matrice a esso associata ha determinante non nullo, segue quanto affermato in precedenza.
In questo caso devo verificare per quali valori di a, $\lambda = 1$ é un autovettore, quindi quando $Det(A - 1\mathbb{I}) = 0 \Rightarrow Det \begin{pmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 4a \Rightarrow$
1 é un autovalore per $A \Leftrightarrow a = 0$.
(b) Posto $a = 0$ $\exists$ tre autovettori lin. ind. se e solo se la matrice A é diagonalizzabile; infatti solo nel caso in cui é possibile scrivere A in forma diagonale si puó scrivere una base dello spazio d'arrivo costituita di soli autovettori. In questo caso: $P_\lambda(A) = Det(\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix}) = 0 \Rightarrow$
$P_\lambda(A) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow A$ é diagonalizzabile se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Posto $\lambda = 1$, affinché A sia diagonalizzabile il rango di $A - 1\mathbb{I}$ deve essere 1; in questo modo per Rouché-Capelli il sistema omogeneo avrá ∞^2 soluzioni, quindi l'autospazio relativo all'autovalore 1 avrá dimensione 2. Tuttavia $r(A - \mathbb{I}) = 2$, in quanto esiste un minore orlato di ordine due non nullo. Quindi per l'autovalore 1 la molteplicitá algebrica$(= 2)$ é diversa da quella geometrica$(= 1)$, quindi la matrice non é diagonalizzabile, quindi non posso trovare tre autovettori lin. indip.

4. Si consideri la matrice simmetrica:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$
(a) Decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};
SOLUZIONE:
$det(A) = 7 \rightarrow A$ è invertibile e $A^{-1} = \frac{(Cof(A))^t}{det(A)} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
(b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;
SOLUZIONE:

$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = -(\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 \rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1$ con $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$.
Calcolando gli autospazi nel modo usuale: $V_1 =< (1, -2, -1) >, V_2 =< (2, 1, 0), (1, 0, 1) >$.
OSS: abbiamo trovato che la molteplicitá algebrica degli autovalori corrisponde alla loro molteplicitá geometrica dunque $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ e mettendo assieme le basi degli autospazi otteniamo la base:
$\underline{d} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ diagonalizzante per A.
(c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale.
SOLUZIONE:
Secondo la base d la matrice che rappresenta l'operatore associato ad A é
$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale).
Quindi sappiamo che applicando le regole del cambiamento di base:
$M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) A M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = D \rightarrow P^{-1} = M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che si ottiene mettendo in colonna le componenti dei vettori della base d rispetto alla base canonica $\rightarrow P = M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = (M_{\underline{d},e}(\mathbb{I})^{-1}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:
$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$
SOLUZIONE:
La matrice considerata ha determinante nullo, dunque un nucleo non banale, il quale é da considerare come l'autospazio associato all'autovalore 0. Quindi cerchiamo il nucleo dell'applicazione associata alla matrice nel modo usuale (risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti la nostra matrice). Vediamo subito che il sistema ha una sola riga indipendente allora la dimensione del nucleo, e dunque la molteplicitá geometrica di 0 come autovalore, è $7 - 1 = 6$ dunque la sua molteplicità algebrica è maggiore uguale a 6. Vogliamo determinare la molteplicitá algebrica di 0 per scrivere il polinomio caratteristico: notiamo che il vettore $(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ viene mandato dalla matrice nel vettore $(49; 49; 49; 49; 49; 49; 49)$, dunque anche 49 é autovalore con molteplicitá geometrica almeno 1, da cui si arriva facilmente al fatto che il polinomio caratteristico della matrice é, a meno del segno, $P(\lambda) = \lambda^6(\lambda - 49)$.

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se A è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:
Innanzitutto sia T l'endomorfismo associato alla matrice$A$. Allora T é tale che $T(x, y, z) = (0, z, -y)$; ora, $P_T(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1)$; ció significa che T ha un solo autovalore reale con molteplicitá algebrica 1 e di conseguenza l'autospazio generato dall'autovettore associato a tale λ avrá dimensione 1. Le conclusioni sono le stesse dell'esercizio 3,funzione G.

7. In $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ si considerino le applicazioni lineari:
$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associate, rispettivamente, alle matrici:
$A = M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
(a) Determinare la dimensione e una base sia per $\ker(gof)$ sia per $\mathrm{Im}(gof)$.
(b) Sia H l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$.
Determinare la dimensione e una base del sottospazio $G = H \cap \ker(gof)$.
(c) Calcolare $(gof)(H)$ e $(gof)^{-1}(K)$, dove K é l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_2 = 0$.

SOLUZIONE:
Innanzitutto si ha che $M(gof) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
NB: le 'grandi parentesi quadre' attorno ai sistemi lineari stanno per 'soluzione di:'

(a) $ker(gof) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =< (1; 2; 6; 0), (1, -4, 0, 6) >$.
Inoltre si ha che $Im(gof) =< (2, 1, 1); (3, 2, 4) >$.
(b) $H =< (1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0) >$ quindi si ha che $H \cap ker(gof) =< (1, 2, 6, 0) >$.
(c) $K =< (1, 0, 0); (0, 0, 1) >$; $gof(H) =< (5, 3, 5); (-2, -1, -1) >$;
$(gof)^{-1}(K) = (gof)^{-1}(K \cap Im(gof)) = (gof)^{-1}(< (5, 2, 0) >) =$
$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \oplus ker(gof) =$$
$< (0, -1, -5, 0); (1, 2, 6, 0); (1, -4, 0, 6) >$.

8. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:
$T(x; y; z; t) = (x + 2y - t; y - 3z; x + 2y + z + t)$.
(a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche.
(b) Verifica che $C = \{(0; 3; 1); (1; 0; 3); (0; -1; 1)\}$ é una base di $\mathbb{R}^3$.
(c) Completa i vettori $v = (1; 0; 0; 1)$ e $u = (0; 2; 0; 0)$ a una base B di $\mathbb{R}^4$.

(d) Scrivi la matrice D associata a T rispetto alle basi C e B.

SOLUZIONE:

9. **(a)** Ricordiamo che se la base d'arrivo é la base canonica le componenti del vettore immagine saranno proprio le sue coordinate risp. la base:
$$\begin{cases} f(e_1) = f((1,0,0,0)) = (1,0,1) \\ f(e_2) = f((0,1,0,0)) = (2,1,2) \\ f(e_3) = f((0,0,1,0)) = (0,-3,1) \\ f(e_4) = f((0,0,0,1)) = (-1,0,1) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(b) Per verificare che C é una base di $\mathbb{R}^3$ mi basta verificare che i tre vettori che appartengono a C siano lin. indipendenti (il fatto che generano tutto lo spazio deriva dal fatto che sono tre vettori lin. ind. in uno spazio di dimensione 3); mi basta dunque verificare che la matrice che ha come righe i vettori di C abbia rango massimo e quindi determinante non nullo.
In effetti $\Rightarrow Det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$, quindi C é una base.
(c) Per completare i due vettori proposti in una base basta prendere altri due vettori in $\mathbb{R}^4$ t.c. l'insieme dei quattro vettori genera tutto lo spazio (infatti se ho 4 vettori che mi generano uno spazio di dimensione 4 ho gratis che sono lin. ind.); scelgo $\underline{w} = (0,0,1,0)$ e $\underline{s} = (0,0,0,1) \Rightarrow$
$B = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{s}\}$ é una base.
(d) Utilizzo la formula del cambiamento di base:
$M_{C,B}((f)) = (M_{E,C}(\mathbb{I}))^{-1} M_{E,e}(f) M_{e,B}(\mathbb{I})$, dove:
$M_{E,e}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, giá calcolata prima;
$M_{E,C}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;
$(M_{E,C}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;
$M_{e,B}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ora basta sostituire nella formula e si ottiene il risultato!!!
$$M_{C,B}((f)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 10 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 0 & -2 \\ -6 & 26 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 13 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$